Acad. prof. OCTAV ONICESCU

PROBABILITĂȚI ȘI PROCESE ALEATOARE

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ ȘI ENCICLOPEDICĂ
București, 1977

REDACTOR M. BORICEAN

TEHNOREDACTOR C. IORDACHE

COPERTA DE CONSTANTIN GHEORGHIU-ENESCU

PREFAȚĂ

În Conferința pe care a ținut-o la București în 1971, dar pe care n-a reușit s-o redacteze definitiv din pricina decesului intempestiv, L. J. Savage împarte teoriile probabiliste în cele trei categorii obișnuite, care se regăsesc și la Bruno de Finetti, cea logică sau clasică, cea frecventistă și cea personalistă (Savage) sau subiectivistă (de Finetti). Împărțirea aceasta a rezultat din considerațiile asupra originii și înțelesului care s-a dat conceptului de probabilitate.

Modelele urnei și al jocurilor, care cu o anume bunăvoință pot fi reduse la cel dintîi, au dat impulsul teoriei clasice sau logice care a constituit ceea ce s-a numit mai întîi calculul probabilităților și a devenit acum teoria matematică a probabilităților.

Frecvențele pe care le oferă experimentarea fizică sau experiența din diverse domenii, cu înregistrările ei statistice, au constituit, cu von Mises în special, substratul unei teoretizări care însă s-a revărsat repede în matca bogată și cuprinzătoare a teoriei clasice, întărindu-i substanțial baza fenomenologică.

Pentru nici una dintre direcțiile de gîndire precedente probabilitatea nu corespunde direct unei existențe ca atare: ea este un simbol matematic, chiar numeric, cu care întîmpinăm sau caracterizăm, direct sau indirect, evenimente aleatoare, spunem noi azi în mod obișnuit, dominate de întîmplare se spunea de preferință în epoca ce merge de la Bernoulli la Poincaré, sub semnul nesiguranței (*incertainty*) au preferat să spună B. de Finetti și L. J. Savage. Cel dintîi ține de formula

« *Probability does not exist* », ca un leit motiv necesar după el ca să nu se uite caracterul de opinie, estimată doar numeric, pe care trebuie să-l atribuim acestui concept. Aceasta nu înseamnă că în teoria matematică clădită de de Finetti, Savage și alții, probabilitatea nu devine și ea un obiect matematic ca și în teoria clasică cu care, deși se diferențiază, în special prin poziția principială față de aditivitate, pe care n-o considera decît sub forma finită, se întîlnește în numeroase capitole și aplicații. Stau pentru aceasta mărturie cele două volume ale lui B. de Finetti, apărute succesiv în 1974 și 1975 la John Wiley sub titlul nediferențiat de *Theory of Probability*. Pentru cei care vor să adîncească în toată originalitatea lui conceptul de probabilitate asociat în particular „incertitudinei" și corelativei sale „previziuni" poate mai mult decît curentei noțiuni a „întîmplării", cărțile de mai sus conțin o foarte adîncită bogăție de sugestii. În ele se cercetează pe foarte bogate exemple conceptul de inferență statistică construit cu probabilitatea așa cum e definită de de Finetti, precum și problemele de verificabilitate legate de inferență și previziune.

În același timp bogăția de fenomene aleatoare pe care e chemată să le rezolve fizica macroscopică ca și cea a cuantelor, toată fenomenologia la care se referă mecanica statistică clasică ca și aceea a sistemelor în evoluție ireversibilă, întreaga teorie și practică statistică (a lui Fisher de pildă), unele ramuri ale psihologiei pure ca și a celei aplicate, în procesul învățării de pildă, întinse domenii ale științelor sociale și economice, meteorologia deopotrivă cu fizica cosmică, adoptă conceptul de probabilitate și de proces aleator ca un instrument necesar de măsură a valorii estimative, pe care cercetătorul e condus să o atribuie evenimentelor pe care le cercetează. Caracterul valorilor date ca și al celor rezultate din calculele prescrise de știința probabilităților depinde de natura evenimentelor la care se referă și nu vom avea să discutăm în lucrarea prezentată aici natura lor intimă. Nu pentru că nu este un obiect interesant de studiat. Însă, după cum mecanica nu începe prin a studia ce este masa ci numai mărimea ei, care apare în raporturile dintre celelalte mărimi ce intervin într-un fenomen de mișcare și lasă altor științe chiar numai sarcina de a clasifica diversele forme sub care ea apare în fenomenele fizice, tot astfel și teoria (matematică) a probabilităților lasă diverselor

ramuri ale filozofiei științei, care se ocupă de problemele cunoașterii, preocuparea caracterizării adîncite a diverselor moduri în care cercetătorul pune caracteristica „probabil" pe unul sau altul dintre evenimentele ce fac obiect de știință.

Uneori această problematică ia o formă direct matematică, așa cum a fost cazul la Thomas Bayes (1763) care a răspuns, printr-o formulă care-i poartă și azi numele, la întrebarea de a găsi — în împrejurări date — care este probabilitatea ca un anume eveniment să se producă cu o probabilitate cuprinsă într-un anume interval de valori. Problema avea în vedere evenimente și probabilități.

Chiar de la început, în afară de evenimente și probabilități au mai jucat un rol în preocuparea probabilistică și mărimile pe care azi le numim variabile aleatoare sau funcții aleatoare asociate evenimentelor și susceptibile de probabilitate. Dar au persistat de-alungul dezvoltării teoriei probabilităților și căutarea relațiilor directe dintre evenimente și probabilități. Exemplul procesului markovian care caracterizează înlănțuirea probabilităților de trecere de la un eveniment la altul într-un anume cîmp de evenimente este dintre cele mai caracteristice. De asemenea caracterizarea prin entropie a stării de organizare a unui sistem de evenimente dată de Shannon în teoria informației face să intervină numai probabilitatea semnalelor informaționale — care semnale nici nu constituie obiecte individuale de măsură, ci numai de existență. Sînt numeroase evenimentele care nu pot fi obiect de măsură individuală, cel puțin nu în mod direct și semnificativ, dar cărora li se pot atribui probabilități și pentru care s-au adăugat caracteristici pur probabilistice cum sînt energia informațională sau corelația informațională.

Dar foarte numeroase evenimente care devin obiecte ale investigației științifice sînt reprezentate prin mărimi. Pentru acestea teoria a creat noțiunile proprii de variabilă și funcție aleatoare, la care s-a mai adăugat, și în vederea unor generalizări, noțiunea de funcție sumă.

Volumul care se prezintă acum păstrează caracteristicile clasice ale celui din care a provenit și care a fost publicat în 1956. El însă aduce, datorită colaborării doctorului în matematică Gheorghe Popescu, unele îmbunătățiri în domeniul proceselor markoviene, în special, în cele în care figurează și contribuții proprii. O aducere la zi, cel puțin într-o anume măsură, s-a

realizat și prin notele pe care I. Coculescu, Gheorghe Popescu însuși, Gheorghe Oprișan și Traian Nicolae, au binevoit să le adauge acestui volum. Doctorul Radu Constantin a adus o esențială completare capitolului privind probabilitățile geometrice.

Informați cum eram de prezentarea unei lucrări complete reflectînd în întregime starea actuală a teoriei probabilităților pe care o pregătește I. Cuculescu și care ar urma să ia locul tratatelor noastre mai vechi, cel din 1956 scris împreună cu Gh. Mihoc și C. Ionescu-Tulcea, sau cel scris numai de noi în 1962 în Editura Didactică și Pedagogică, amplificat și redactat în limba italiană la Editura Veschi în 1969, am socotit util să dăm interesaților în studiul teoriei și mai ales al aplicațiilor ei, doar o nouă versiune a cărții apărute în 1956 la Editura Tehnică și care a fost, la timpul său, deosebit de bine primită.

CUPRINS

PREFAȚĂ (5)

CAPITOLUL I
CÎMP FINIT DE PROBABILITATE (13)

§ 1. Cîmp finit de evenimente. Probabilități. Energie și entropie informațională. Corelație informațională (14). § 2. Probabilități condiționate. Evenimente independente. Teoremele lui Bayes (19). § 3. Variabile aleatoare (22). § 4. Desfaceri și variabile aleatoare independente (29). § 5. Problema numerelor mari și teorema lui Bernoulli (36). § 6. Variabile aleatoare dependente. Corelație (50). § 7. Variabile aleatoare vectoriale pe un cîmp finit (52). § 8. Mișcări browniene și lanțuri de evenimente de tip Markov (55). § 9. Reversibilitate și stabilitatea proceselor Markov (69). § 10. Clasificarea stărilor unui lanț Markov pe baza grafului asociat (74). § 11. Reacții în lanț (94). § 12. Procese stochastice ramificate (105). § 13. Lanțuri multiple (112). § 14. Reversibilitatea și stabilitatea proceselor în lanț multiplu. Teorema lui Mihoc (115). § 15. Construirea unui lanț Markov cu matrice de trecere și repartiție inițială date (elaborat de I. Cuculescu) (117). § 16. Trecerile unui lanț Markov de la un eveniment la altul (120). Bibliografie (121).

CAPITOLUL II
LANȚURI CU LEGĂTURI COMPLETE (123)

§ 1. Lanțuri oarecare. Spațiul lanțurilor. Evenimente și probabilități elementare (123). § 2. Modele cu lanțuri cu legături complete (127). § 3. Lanțuri cu legături complete ale schemelor de contagiune (130). § 4. Proprietățile ergodice ale lanțurilor cu legături complete (131). § 5. Condițiile de ergodicitate ale lui C. Ionescu-Tulcea și Gh. Marinescu (138). § 6. Corespondența între un lanț

cu legături complete și un lanț Markov (141). § 7. Lanțurile cu legături complete privite ca modele matematice ale unor experimente din teoria învățării (143). § 8. Procesul mersului la întîmplare simplu cu restricții (146). Bibliografie (154).

CAPITOLUL III

CÎMP INFINIT DE PROBABILITATE (156)

§ 1. Definiții (156). § 2. Variabile aleatoare. Valori medii (157). § 3. Probabilitate condiționată și valoare medie condiționată în raport cu o σ-algebră dată (162). § 4. Funcția de repartiție (167). § 5. Funcția caracteristică (170). § 6. Relațiile între funcțiile de repartiție și funcția caracteristică (175). § 7. Tipuri de repartiții cu întrebuințare curentă (178). § 8. Repartiții discontinue simple (182). § 9. Alte repartiții (188). § 10. Repartiții cu două dimensiuni (192). § 11. Repartiția gaussiană cu n dimensiuni (202). § 12. Reprezentarea repartițiilor cu o dimensiune (208). § 13. Repartițiile lui Pearson (212). § 14. Tipuri de convergență ale șirurilor de variabile aleatoare (215). § 15. Echivalența asimptotică și stabilitatea șirurilor (226). § 16. Legea numerelor mari (230).

CAPITOLUL IV

REPARTIȚII LIMITĂ (233)

§ 1. Forma canonică a repartițiilor limită (234). § 2. Repartițiile indefinit divizibile (237).

CAPITOLUL V

LEGEA LUI LAPLACE-GAUSS (242)

§ 1. Problema clasică în forma generală (243). § 2. Teoreme de convergență (245). § 3. O teoremă limită pentru variabile vectoriale (251). § 4. Legi limită pentru frecvența unui eveniment într-un lanț Markov constant (256). § 5. Repartițiile lui Gnedenko (262). Bibliografie (265).

CAPITOLUL VI

REPARTIȚII POISSON (267)

§ 1. Evenimente rare independente (267). § 2. Repartiția frecvențelor rare a mai multor evenimente elementare (271). § 3. O generalizare a procesului Poisson (275). § 4. Evenimente rare dependente. Cazul unei singure frecvențe (276). § 5. Cazul mai multor frecvențe (282). § 6. Probabilitățile limită ale unui proces Markov cu evenimente rare. Funcțiile caracteristice ale lui Mihoc (284). Bibliografie (287).

CAPITOLUL VII

PROCESE STOCHASTICE DE PROPAGARE ÎN TIMP CONTINUU. TEORIA ANALITICĂ (288)

§ 1. Procese cu un număr finit sau numărabil de stări (288). § 2. Procese continue cu o dimensiune. Procesele lui W. Feller (295). § 3. Evoluția unei mărimi asociată unui proces Markov omogen (305). § 4. Procese aleatoare în lanț cu legături complete (311). § 5. Teorema de existență pentru procese aleatoare în lanț continuu cu legături complete (325). Bibliografie (326).

CAPITOLUL VIII

PROBABILIZAREA EVENIMENTELOR ÎN MECANICA STATISTICĂ (327)

§ 1. Legea de repartiție a energiei într-un gaz ideal (329). § 2. Legea de repartiție a lui Planck (336). § 3. Fundamentarea probabilistă a mecanicii statistice (339).

CAPITOLUL IX

CÎMPURI DE EVENIMENTE PROBABILIZANTE ÎN MECANICA CUANTICĂ (375)

§ 1. Spațiul hilbertian al funcțiilor de stare (376). § 2. Evenimente. Probabilitate. Legi de repartiție (381). Bibliografie (383).

CAPITOLUL X

FUNCȚII ALEATOARE (385)

§ 1. Generalități despre funcții aleatoare (385). § 2. Continuitate și derivabilitate stochastică (386). § 3. Procese staționare (400). § 4. Funcții aleatoare cu creșteri independente (404). Bibliografie (411).

CAPITOLUL XI

MIȘCAREA BROWNIANĂ (413)

Bibliografie (429).

CAPITOLUL XII

CÎMPURI GEOMETRICE DE PROBABILITATE ȘI APLICAȚII LA OPTICA GEOMETRICĂ ȘI CINEMATICĂ (431)

§ 1. Probabilități continue (432). § 2. Măsura invariantă pentru mulțimea de drepte ale planului (438). § 3. Sisteme de puncte (441). § 4. Aplicații (447). § 5. Extinderea la spații Minkowski (elaborat de Radu Constantin) (458). Bibliografie (460).

NOTE

1. Reprezentarea lanțurilor continue și a lanțurilor continue aleatoare (462).
2. Sisteme aleatoare cu legături complete. Teoreme limită (elaborat de Gh. Popescu) (471). Bibliografie (483).
3. Procese semi-Markov (elaborat de Gh. Oprișan) (484). Bibliografie (488).
4. Principii de teoria așteptării (elaborat de Traian Nicolae) (489). Bibliografie (502).

CAPITOLUL 1

CÎMP FINIT DE PROBABILITATE

Un cîmp de probabilități este finit dacă mulțimea evenimentelor cîmpului este finită.

Experiența nu prezintă, în general, direct astfel de cîmpuri. Ele constituie însă, în numeroase împrejurări, o bază pentru construirea cîmpului de probabilități indicat de experiență.

În experiența extragerilor repetate dintr-o urnă care are o structură dată — a bile albe (A) și b bile negre (B) —, evenimentele elementare sînt șirurile indefinite de bile albe și negre — de exemplu, $BAABA$ ... așa cum se prezintă într-o succesiune nelimitată de extracții. Cîmpul de evenimente nu este finit. El este însă generat de cîmpul finit de probabilitate în care evenimentele elementare sînt A și B cu probabilitățile $p(A) = \frac{a}{a+b}$ și $P(B) = \frac{b}{a+b}$.

De cele mai multe ori, cîmpul de bază nu este, ca în cazul precedent, dat de evidența imediată. El se construiește ipotetic, uneori chiar prin analogie cu experiența extracțiilor dintr-o urnă și numai după aceea se verifică experimental buna sa alegere. În biologie, ca și în fizică, experiențele de tipul extragerilor repetate pot fi macroscopice, cel mai adesea însă experiențele de verificare directă a structurilor unui cîmp ipotetic de bază — în general finit — sînt de ordin microscopic.

§ 1. Cîmp finit de evenimente. Probabilități. Energie și entropie informațională. Corelație informațională

1. Cîmpul finit de evenimente este constituit de mulțimea $\mathcal{K} = P(E)$ a părților mulțimii finite E de evenimente elementare $e_1, e_2, \ldots, e_m$.

Observăm că, afară de părțile (submulțimile) propriu-zise ale lui E, fac parte din $\mathcal{K}$ și următoarele evenimente

a) fiecare dintre evenimentele elementare $e_1, e_2, \ldots, e_m$, considerate ca părți ale lui E, $e_g \in \mathcal{K}$;

b) mulțimea E, care reprezintă evenimentul sigur, $E \in \mathcal{K}$;

c) mulțimea vidă, care reprezintă evenimentul imposibil $\varnothing \in \mathcal{K}$.

Ținînd seama de definiția cîmpului $\mathcal{K}$, evenimentele au următoarele proprietăți

1°. Dacă $A \in \mathcal{K}$, complementara A' a mulțimii A în $\mathcal{K}$ face de asemenea parte din $\mathcal{K}$.

A și A' sînt evenimente contrarii; putem spune încă $A' =$ = non A; sau $A =$ non A'. Proprietatea 1° se mai enunță: Odată cu A, din cîmpul de evenimente face parte și contrariul său (non A).

Observăm cu acest prilej că $\varnothing =$ non E, $E =$ non $\varnothing$, evenimentul sigur și evenimentul imposibil sînt contrarii.

2°. Dacă $A \in \mathcal{K}$, $B \in \mathcal{K}$, atunci $C = A \cup B \in \mathcal{K}$; $D = A \cap B \in \mathcal{K}$.

Evenimentele A și B pentru care $A \cap B \neq \varnothing$ se numesc compatibile; dacă însă $A \cap B = \varnothing$, evenimentele A și B sînt incompatibile.

2. Desfacerea unei mulțimi oarecare E în componente incompatibile este realizată de o familie de părți $A_i (i \in I)$, unde I este o mulțime finită de indici, cu proprietățile:

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \; j \neq i; \; \bigcup_{i \in I} A_i = E.$$

Adăugăm următoarea observație:

Fiind dată o mulțime oarecare E, orice desfacere finită $E_1, E_2, \ldots, E_m$ a lui E poate constitui spațiul evenimentelor elementare ($e_1 = E_1$, $e_2 = E_2, \ldots, e_m = E_m$) ale unui cîmp finit de evenimente.

Reciproc, fiind dat un cîmp finit de evenimente $\mathcal{K}$, putem construi un spațiu E pentru care evenimentele elementare $e_1, e_2, \ldots, e_m$ ale lui $\mathcal{K}$ să constituie o desfacere în evenimente incompatibile.

Relația între $\{E, \mathcal{K}\}$ și E prezintă un interes deosebit atunci cînd fiecare dintre ele are o semnificație experimentală sau teoretică.

3. *Probabilitatea asociată* cîmpului finit de evenimente $\{E, \mathcal{K}\}$ este o funcție $P(A)$, definită pentru fiecare eveniment A din $\mathcal{K}$ și are următoarele proprietăți

$$P(A) \geqslant 0, \; A \in \mathcal{K}, \tag{i}$$

$$P(E) = 1, \tag{ii}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \tag{iii}$$

dacă $A \in \mathcal{K}$, $B \in \mathcal{K}$, $A \cap B = \varnothing$.

Din (iii) și (ii) rezultă imediat că, $A' =$ non A fiind evenimentul contrar lui A, vom avea

$$P(A') + P(A) = P(E) = 1,$$

deci

$$P(A') = 1 - P(A). \tag{1}$$

În particular,

$$P(\varnothing) = 1 - P(E) = 0. \tag{2}$$

Probabilitatea evenimentului sigur fiind, după (ii), egală cu unu, probabilitatea evenimentului imposibil este egală cu zero.

Din (iii) și ținînd seama de asociativitatea operației de reuniune rezultă că dacă $A_1, A_2, \ldots, A_l$ sînt evenimente incompatibile din $\mathcal{K}$, vom avea

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_l) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_l). \tag{3}$$

Demonstrația se face prin recurență și este imediată.

Orice eveniment A posibil (deci $A \neq \varnothing$) este, prin definiție, reuniunea unui număr de evenimente elementare

$$A = e_{i_1} \cup e_{i_2} \cup \ldots \cup e_{i_l}. \tag{4}$$

Deoarece evenimentele elementare sînt incompatibile două cîte două, vom avea, conform (3),

$$P(A) = P(e_{i_1}) + P(e_{i_2}) + \ldots + P(e_{i_l}). \tag{5}$$

Folosind notația

$$P(e_j) = p_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

formula (5) devine

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_l}.$$

Prin urmare, probabilitățile evenimentelor unui cîmp sînt determinate odată cu probabilitățile $p_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ ale evenimentelor elementare; probabilitatea evenimentului posibil A este suma probabilităților evenimentelor elementare care-l compun.

Singurele condiții generale pe care le verifică probabilitățile p_j sînt

$$\underset{j=1,2,\ldots,m}{p_j \geqslant 0}; \qquad \underset{j=1,2,\ldots,m}{\sum p_j = 1}. \tag{j}$$

Din (4) și (5) rezultă următoarea proprietate:

Dacă $A \supset B$, atunci $P(A) \geqslant P(B)$.

4. *Cîmp finit de probabilitate.* Sistemul $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ — în care E este o mulțime finită de evenimente elementare, $\mathfrak{K}$ este mulțimea părților lui E, completată cu E, $\varnothing$ și evenimentele elementare, iar P este probabilitatea definită după regulile de la punctul 3 — se numește *cîmp finit de probabilitate.*

E fiind dat, $\mathfrak{K}$ este determinat, deci cîmpul mai depinde de alegerea a m numere pozitive $p_j (j = 1, 2, \ldots, m)$, legate prin relația $\sum p_j = 1$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Experiența sau teoria respectivă a evenimentelor specifice care compun mulțimea E trebuie să indice alegerea valorilor p_j. Teoria matematică a probabilităților poate numai ajuta teoria statistică — fizică sau biologică — în această alegere.

5. *Subcîmp de probabilitate.* Vom nota $\mathcal{G} = \{E, \mathfrak{K}, P\}$ și $\mathcal{G}' = \{E', \mathfrak{K}', P'\}$ două cîmpuri de probabilitate și vom pune

$$\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$$

dacă E' este format din elementele $E_1, E_2, \ldots, E_{m_1} (m_1 < m)$ ale unei desfaceri a lui E, apoi $\mathfrak{K}'$ este format din E' așa cum $\mathfrak{K}$ a fost format din E, și $p'_j = P(E_j)$.

Este evident că $\mathcal{G}' = \{E', \mathfrak{K}', P'\}$ constituie un cîmp de probabilitate identic cu $\mathcal{G}$ dacă $m_1 = m$, deoarece în acest caz avem, în mod necesar, $E_1 = e_1, E_2 = e_2, \ldots, E_m = e_m$ (întrucît ordinea nu interesează).

6. *Cîmp finit de probabilitate pentru care probabilitățile evenimentelor elementare sînt egale.* În acest caz, $P(e_j) = p_j = p (j = 1, 2, \ldots, m)$. Condițiile (j) ne arată că

$$p = \frac{1}{m}$$

și

$$P(A) = \frac{m(A)}{m},$$

unde $m(A)$ este numărul evenimentelor elementare cuprinse în A.

7. *Cîmp finit de probabilitate $\mathcal{G}$ pentru care probabilitățile sînt numere raționale.* Dacă probabilitățile evenimentelor elementare $p_j = P(e_j)$ sînt numere raționale, există un cel mai mic întreg M pentru care

$$p_j = \frac{m_j}{M} \; (j = 1, 2, \ldots, m; \; \sum m_j = 1).$$

Putem atunci construi un cîmp $\mathcal{G}_M$ format din M evenimente elementare egal probabile $e_j^l (l = 1, 2, \ldots, m_j; \; j = 1, 2, \ldots, m)$; $\sum m_j = M$, astfel ca să putem considera

$$e_j = e_j^1 \cup e_j^2 \cup \ldots \cup e_j^{m_j}.$$

Cîmpul $\mathcal{G}$ dat este, în acest mod, un subcîmp al lui $\mathcal{G}_M$.

Este evident că, în cazul în care probabilitățile p_j nu sînt toate raționale, nu există un cîmp finit $\mathcal{G}_M$ căruia $\mathcal{G}$ să-i fie subcîmp, deci nu există un model de urne corespunzător.

8. *Urnele ca modele teoretice pentru cîmpurile de probabilități raționale.* Unui cîmp de probabilitate în care $p_j = \frac{m_j}{M} (j = 1, 2, \ldots, m)$ îi corespunde o urnă conținînd km_j bile de culoarea $j (j = 1, 2, \ldots, m)$, deci în total $\sum km_j = kM$ bile, k fiind un întreg pozitiv. Numerele p_j pe care le considerăm drept probabilități caracterizează *structura urnei din punctul de vedere al repartiției după culoarea bilelor ei.*

Vom examina mai tîrziu de ce și în ce condiții este justificată denumirea de probabilități pe care o dăm acestor constante de structură.

Evenimentele elementare pentru urna dată sînt aparițiile diferitelor bile ale urnei.

Evenimentele caracteristice E ale urnei sînt în număr de m și se pot prezenta intuitiv ca: bila de culoarea $j (j = 1, 2, \ldots, m)$.

Celelalte evenimente sînt reuniuni de evenimente elementare. Probabilitatea evenimentului E este p_j de mai sus.

9. *Corelația și energia informațională.* Fie A și B două populații avînd n caracteristici comune $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ cu probabilitățile $p_1, p_2, \ldots, p_n$ și respectiv $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Definiția 1. *Corelația informațională între A și B referitoare la repartiția caracteristicilor $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ este dată de expresia*

$$C_{AB} = \sum_{j=1}^{n} p_j q_j. \tag{1}$$

Definiția 2. *Coeficientul de corelație informațională corespunzător corelației C_{AB} este dat de raportul*

$$R_{AB} = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j q_j}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} p_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} q_j^2\right)}}. \tag{2}$$

Definiția 3. *Energia informațională a repartiției $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ care caracterizează caracteristicile $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ ale populației A este definită de expresia*

$$\xi_A = \sum_{j=1}^{n} p_j^2.$$

10. *Cîteva proprietăți ale corelației și energiei informaționale.*

Propoziția 1.

$$\operatorname{Max}\left(\min_j p_j, \min_j q_j\right) \leqslant C_{AB} \leqslant \operatorname{Min}\left(\max_j p_j, \max_j q_j\right).$$

Propoziția 2. *Corelația informațională este zero dacă și numai dacă nu există nici o legătură între cele două populații referitor la caracteristicile $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.*

Propoziția 3.

$0 \leqslant R_{AB} \leqslant 1$ iar $R_{AB} = 1$ *dacă și numai dacă* $q_j = p_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Propoziția 4. $\frac{1}{n} \leqslant \xi_A \leqslant 1$; $\xi_A = 1$ în cazul unei nedeterminări complete $\left(p_j = \frac{1}{n}\right)$.

Propoziția 5. *Energia informațională descrește dacă nedeterminarea crește.*

Demonstrarea propozițiilor de mai sus se face printr-o verificare directă.

§ 2. Probabilități condiționate. Evenimente independente. Teoremele lui Bayes

1. *Definiția probabilității condiționate.* Formularea matematică a relațiilor de dependență sau independență între evenimente are la bază noțiunea de probabilitate condiționată.

Să presupunem că probabilitatea evenimentului A al cîmpului finit de probabilitate $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ este diferită de zero. Funcția

$$P_A(X) = \frac{P(X \cap A)}{P(A)} \tag{1}$$

se numește *probabilitatea condiționată* a evenimentului X (de evenimentul A).

Este evident că $P_A(X)$, ca funcție de evenimentul X, are proprietățile (i), (ii), (iii). Prin urmare $\{E, \mathfrak{K}, P_A\}$ este un cîmp finit de probabilitate.

Din (1) rezultă imediat

$$P(X \cap A) = P(A) P_A(X). \tag{2}$$

Observăm că, în cîmpul determinat de P_A, avem, aplicînd (1),

$$P_A(X)_B, \text{ adică } P_A(X)_B = \frac{P_A(B \cap (X))}{P_A(B)}.$$

Prin urmare folosind încă o dată (1), obținem

$$(P_A(X))_B = \frac{P(A \cap B \cap X)}{P(A)} \frac{P(A)}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B \cap X)}{P(A \cap B)},$$

de unde

$$(P_A(X))_B = P_{A \cap B}(X). \tag{3}$$

Cu ajutorul formulelor (2) și (3) se demonstrează imediat, prin inducție, formula fundamentală

$$P(X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n) =$$

$$= P(X_1)\, P_{X_1}(X_2)\, P_{X_1 \cap X_2}(X_3) \ldots P_{X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_{n-1}}(X_n). \quad (4)$$

Într-adevăr, conform (2),

$$P(X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n) = P(X_1)\, P_{X_1}(X_2 \cap X_3 \cap \ldots \cap X_n).$$

Aplicînd (3), vom avea mai departe

$$P_{X_1}(X_2 \cap X_3 \cap \ldots \cap X_n) = P_{X_1}(X_2)\, P_{X_1 \cap X_2}(X_3 \cap X_4 \cap \ldots \cap X_n).$$

Continuînd cu aplicarea formulei (3), obținem în cele din urmă formula (4).

Probabilitățile condiționate reciproc de două evenimente A și B, ale căror probabilități absolute $P(A)$, $P(B)$ sînt diferite de zero, vor fi legate prin relația evidentă

$$P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A). \quad (5)$$

2. *Independența a două evenimente.* Vom defini deocamdată independența a două evenimente. Mai departe, vom introduce noțiunea de independență a evenimentelor unui sistem de mai multe evenimente și vom verifica că definiția introdusă aici intră în definiția generală.

D e f i n i ț i e. *Evenimentul X este independent de evenimentul A [pentru care $P(A) \neq 0$], dacă probabilitatea lui X condiționată de A este egală cu probabilitatea absolută a lui X, adică*

$$\frac{P(X \cap A)}{P(A)} = P(X). \quad (6)$$

Deci, dacă X este independent de A, avem

$$P(X \cap A) = P(X)\, P(A). \quad (7)$$

Relația de independență este deci simetrică.

Dacă $P(A) = 0$, este evident că $P(X \cap A) = 0$, deci relația (5) este verificată pentru orice X.

Vom considera un eveniment A, pentru care $P(A) = 0$ ca independent de orice alt eveniment. Cu această extindere, independența evenimentelor A și X este întotdeauna caracterizată de relația (7).

Observație. Dacă A și B sînt independente, evenimentele A și $B' =$ non B, $A' =$ non A și B, A' și B' sînt, respectiv, independente.

Să arătăm, de exemplu, că

$$P(A \cap B') = P(A)P(B').$$

Aceasta rezultă din șirul de egalități

$$P(A \cap B') = P(A \cap (E - B)) = P(A - (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B) =$$

$$= P(A) - P(A)\, P(B) = P(A)\, [1 - P(B)] = P(A)\, P(B')$$

în care am ținut seama de independența dintre A și B și de (1) din § 1. Se demonstrează în același mod că

$$P(A' \cap B) = P(A')\, P(B),$$

$$P(A' \cap B') = P(A')\, P(B').$$

Exemplu. Fie $U(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $V(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ un sistem de două urne conținînd, cea dintîi, a_1 bile de culoarea α_1, a_2 bile de culoarea α_2, ..., a_m bile de culoarea α_m. Pentru cea de-a doua vom avea b_1, b_2, ..., b_m, bile de culorile respective β_1, β_2, ..., β_m. Evenimentele elementare sînt perechile de bile $\alpha_j\beta_j$, unde α_j este una oarecare dintre cele $l = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ bile ale urnei U și β_j una oarecare dintre cele $n = b_1 + b_2 + \cdots + b_m$ bile ale urnei V. Avem deci, în total, ln evenimente elementare. Fiecăruia îi atribuim probabilitatea $\frac{1}{ln}$.

Notăm prin F_j evenimentul: bila de culoare j din urna U, iar prin G_k evenimentul: bila de culoare k din urna V.

Evenimentele care prezintă un interes deosebit sînt F_jG_k, $(j, k = 1, \ldots, m)$, sau reuniuni de astfel de evenimente. Evenimentul F_jG_k are probabilitatea $\frac{a_jb_k}{ln} = p_jq_k$ dacă punem $\frac{a_j}{l} = p_j$, $\frac{l_j}{n} = q_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Vom nota cu F evenimentul total (o bilă oarecare) pentru urna U și cu G evenimentul total pentru urna V.

Evenimentele F_jG, FG_k sînt independente pentru orice j și k $(j, k = 1, 2, \ldots, m)$. Într-adevăr,

$$F_jG \cap FG_k = F_jG_k.$$

Prin urmare,

$$P(F_jG \cap FG_k) = P(F_jG_k) = p_jq_k = P(F_jG)\, P(FG_k),$$

deoarece

$$P(F_jG) = p_j;\ P(FG_k) = q_k$$

La acest fapt se referă expresia întrebuințată în mod obișnuit: urnele U și V sînt independente.

Teoremele lui Bayes și probabilitatea cauzelor. Să considerăm o desfacere a evenimentului total E în evenimente incompatibile $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$A_j \cap A_k = \varnothing, \quad (j, k = 1, 2, \ldots, m;\ j \neq k) \qquad \bigcup_{j=1,2,\ldots,n} A_j = E.$$

Avem evident pentru orice eveniment X o desfacere corespunzătoare în evenimente incompatibile

$$X = (A_1 \cap X) \cup (A_2 \cap X) \cup \ldots \cup (A_n \cap X).$$

Prin urmare,

$$P(X) = P(A_1 \cap X) + P(A_2 \cap X) + \ldots + P(A_n \cap X).$$

Aplicînd (2), această egalitate devine

$$P(X) = P(A_1)\, P_{A_1}(X) + P(A_2)\, P_{A_2}(X) + \ldots + P(A_n)\, P_{A_n}(X). \tag{8}$$

Conform (1) vom avea, ținînd seama de (8), relația

$$P_X(A_j) = \frac{P(A_j \cap X)}{P(A_1)\, P_{A_1}(X) + P(A_2)\, P_{A_2}(X) + \cdots + P(A_n)\, P_{A_n}(X)}, \tag{9}$$

cunoscută sub numele de *teorema lui Bayes* și caracterizează, în anume împrejurări probabilitatea ca X să aibă cauza A_j.

§ 3. Variabile aleatoare

1. Se numește *variabilă aleatoare* a cîmpului finit de probabilitate $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ o funcție $f(\xi)$ cu valori reale, determinată pentru fiecare eveniment elementar $\xi = e_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ din E.

Teoremă. *Fiecare variabilă aleatoare $f(\xi)$ determină o desfacere a lui E în evenimente incompatibile.*

Într-adevăr, fie $x_1, x_2, \ldots, x_l$ cele l valori distincte ale funcției $f(\xi)$. Avem, cum se vede imediat, $l \leqslant m$. Vom numi E_h mulțimea evenimentelor elementare ξ pentru care $f(\xi) = x_h$,

$$E_h = \{\xi \mid f(\xi) = x_h\}.$$

Este evident că

$$E_h \cap E_k = \varnothing, \quad h \neq k \qquad \bigcup_{h=1,2,\ldots,l} E_h = E.$$

Fiecare dintre mulțimile E_h are o probabilitate $P(E_h)$. Foarte adesea vom întrebuința, pentru prescurtare, expresia $P_h = P(E_h)$ este *probabilitatea valorii* x_h, în loc de expresia exactă este *probabilitatea valorii* pe care $x = f(\xi)$ ia valoarea x_h și vom scrie

$$P_h = P\{x = x_h\}.$$

2. *Valoarea medie* $M[x]$ sau $M[f(\xi)]$ sau încă $\bar{x}$ a variabilei aleatoare $x = f(\xi)$ este dată de egalitatea

$$\bar{x} = M[f(\xi)] = \sum_{h=1,2,\ldots,l} P_h x_h. \tag{1}$$

Proprietăți ale valorii medii

1°. Dacă $f(\xi) \equiv a$ este constantă, avem, conform definiției,

$$M[f(\xi)] = a,$$

deoarece probabilitatea valorii unice a este 1.

2°. Odată cu $f(\xi)$ și $af(\xi)$ este o variabilă aleatoare ale cărei valori $ax_1, ax_2, \ldots, ax_m$ au respectiv probabilitățile

$$P_1 = P(E_1),\ P_2 = P(E_2), \ldots, P_m = P(E_m),$$

prin urmare,

$$M[af(\xi)] = \sum_{h=1,2,\ldots,m} P_h a x_h = a \sum_{h=1,2,\ldots,m} P_h x_h = aM[f(\xi)].$$

3°. Valoarea medie a sumei a două variabile aleatoare $x = f(\xi)$, $y = g(\xi)$ este suma valorilor medii

$$M[f(\xi) + g(\xi)] = M[f(\xi)] + M[g(\xi)].$$

Pentru demonstrarea acestei egalități, să notăm cu $F_1, F_2, \ldots, F_l$; $G_1, G_2, \ldots, G_m$ desfacerile corespunzătoare variabilelor $f(\xi)$, $g(\xi)$:

$$F_h = \{\xi \mid f(\xi) = x_h\} \qquad (h = 1, 2, \ldots, l),$$

$$G_k = \{\xi \mid g(\xi) = y_k\} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Variabila aleatoare $h(\xi) = f(\xi) + g(\xi)$ determină desfacerea ale cărei evenimente incompatibile sînt

$$F_h \cap G_k = \{\xi \mid f(\xi) = x_h,\ g(\xi) = y_k\} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Valoarea medie a variabilei $f+g$ va fi

$$M[f+g]=\sum_{h,k}P[F_h\cap G_k](x_h+y_k)=$$

$$=\sum_{h,k}x_hP[F_h\cap G_k]+\sum_{h,k}y_kP(F_h\cap G_k)=$$

$$=\sum_h x_h\sum_k P(F_h\cap G_k)+\sum_k y_k\sum_h P(F_h\cap G_k)=$$

$$=\sum_h x_hP(F_h)+\sum_k y_kP(G_k)=M[f]+M[g],$$

deoarece

$$\sum_k P(F_h\cap G_k)=P(F_h\cap(\bigcup_k G_k))=P(F_h),$$

$$\sum_h P(F_h\cap G_k)=P((\bigcup_h F_h)\cap G_k)=P(G_k).$$

3. *Momente.* Odată cu $x=f(\xi)$ este o variabilă aleatoare și $g(x)$, unde g este o funcție reală oarecare de x; $g(x)$ ia valoarea $g(x_h)$ pe mulțimea E_h, deci cu probabilitatea P_h.

Valoarea medie a acestei variabile aleatoare

$$\overline{g(x)}=\sum_{h=1,2,\ldots,l}P_hg(x_h)=M_g[x], \tag{2}$$

se numește momentul g al variabilei aleatoare $x=f(\xi)$.

În particular, dacă $g(x)=x^n$, cu n întreg oarecare, avem momentul de ordinul n al variabilei x

$$M_n[x]=\sum_{h=1,2,\ldots,l}P_hx_h^n. \tag{3}$$

Dacă $g(x)=|x|^n$ avem momentul absolut de ordinul n al variabilei x

$$M_n[|x|]=\sum_{h=1,2,\ldots,l}P_h|x_h|^n. \tag{4}$$

În afară de momentul de ordinul întîi $M_1[x]=M[x]$, care este identic cu valoarea medie a aceleași variabile aleatoare, deosebit de semnificativ este momentul de ordinul al doilea

$$M_2[x]=\sum_{h=1,2,\ldots,l}P_hx_h^2. \tag{5}$$

În general, dacă $L=\sup_{h=1,2,\ldots,l}|x_h|$, vom avea

$$|M_n[x]|\leqslant L^n. \tag{6}$$

Funcția caracteristică a variabilei $x=f(\xi)$ este $\varphi(\tau)=M[e^{i\tau f(\xi)}]$

Avem, prin urmare,

$$\varphi(\tau)=\sum_j P_j\,e^{ix_j\tau}. \tag{7}$$

Proprietățile funcției caracteristice

1°. $\varphi(0)=1$;

2°. $|\varphi(\tau)|\leqslant 1$;

3°. $\varphi(\tau)$ este o funcție analitică de τ ale cărei derivate, pentru $\tau=0$, sînt legate de momentele de ordinul respectiv prin egalitățile

$$\left(\frac{d^n\varphi(\tau)}{d\tau^n}\right)_{\tau=0}=i^nM_n, \tag{8}$$

$$\varphi(\tau)=\sum_{n=0,1,\ldots,\infty}\frac{i^nM_n}{n!}\tau^n. \tag{9}$$

Ținînd seama de (6), seria din membrul al doilea este absolut convergentă pentru orice τ.

4°. $\varphi(\tau)$ este o funcție de tip pozitiv. Într-adevăr, din (7) rezultă că $a_1, a_2, \ldots, a_N$ fiind N valori complexe oarecare și $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ fiind N valori reale este realizată următoarea inegalitate caracteristică a funcțiilor de tip pozitiv

$$\sum_{h,k=1,2,\ldots,N}a_h\bar{a}_k\varphi(\tau_h-\tau_k)=\sum_{h,k,j,e}a_h\bar{a}_kP_j\,e^{ix_j\tau_h-ix_j\tau_k}=$$

$$=\sum_j P_j\Big|\sum a_h\,e^{ix_j\tau_h}\Big|^2\geqslant 0. \tag{10}$$

Exemplu. Cîmpul de probabilități este o urnă cu a bile albe și b negre. Evenimentele elementare au, toate, probabilitatea $\frac{1}{a+b}$. Evenimentul bilă albă are probabilitatea $p=\frac{a}{a+b}$; evenimentul bilă neagră are probabilitatea $q=\frac{b}{a+b}$.

O variabilă aleatoare asociată acestui cîmp și desfacerii în bile albe și negre este următoarea

$$f(\xi) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } \xi \text{ este bilă albă} \\ 0 \text{ dacă } \xi \text{ este bilă neagră.} \end{cases}$$

Avem imediat

$$M[f(\xi)] = p, \quad M_2[f(\xi)] = p;$$

$$M_2[f] - (M[f])^2 = p - p^2 = pq.$$

4. Cunoașterea momentelor de diferite ordine servește la evaluarea repartiției valorilor variabilei $x = f(\xi)$ în cîmpul dat. Aceasta se pune în evidență cu ajutorul următoarei importante inegalități:

Inegalitatea generalizată a lui Cebîșev. Fie $x = f(\xi)$ o variabilă aleatoare. Pentru orice număr real pozitiv și orice $\varepsilon > 0$, avem

$$P(|x| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{M_n[|x|]}{\varepsilon^n}. \tag{11}$$

Prin definiție,

$$M_n[|x|] = \sum_{h=1,\ldots,l} |x_h|^n P(E_h) \geqslant \sum_{|x_h| \geqslant \varepsilon} |x_h|^n P(E_h) \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon^n \sum_{|x_h| \geqslant \varepsilon} P(E_h) = \varepsilon^n P\Big(\bigcup_{|x_h| \geqslant \varepsilon} E_h\Big) = \varepsilon^n P(|x| \geqslant \varepsilon),$$

de unde rezultă imediat inegalitatea generalizată a lui Cebîșev. Din (11) se obține

$$P(|x| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{M_n(|x|)}{\varepsilon^n} \tag{12}$$

ținînd seama că

$$P(|x| < \varepsilon) + P(|x| \geqslant \varepsilon) = 1.$$

5. *Variabila abatere.* Variabila aleatoare $y = f(\xi) - M[f(\xi)]$ se numește *abatere*. Este evident că $M[y] = 0$.

Abaterea medie pătratică μ este definită de egalitatea

$$\mu^2 = M[y^2]. \tag{13}$$

Din această definiție rezultă

$$\mu^2 = M_2[f(\xi)] - (M[f(\xi)])^2.$$

Într-adevăr,

$$\mu^2 = M_2(f - M_1[f]) = M[(f - M_1[f])^2] =$$

$$= M[f^2 - 2fM_1[f]] + [M[f]]^2 = M_2[f] - (M[f])^2.$$

Dispersia variabilei $x = f(\xi)$ este, prin definiție, μ^2. Justificarea acestei denumiri se obține folosind inegalitatea lui Cebîșev aplicată variabilei abatere pentru $n = 2$. Relația (12) devine în acest caz

$$P(|x - M[x]| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{\mu^2}{\varepsilon^2}. \tag{14}$$

Dacă luăm pe μ ca abatere tip și punem $\varepsilon = k\mu$, relația (14) capătă forma

$$P(|x - M[x]| < k\mu) \geqslant 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Pentru $k = 3$, probabilitatea ca $-3\mu < x - M[x] < +3\mu$ este mai mare decît $\frac{8}{9}$; pentru $k = 5$,

$$P(|x - M(x)| < 5\mu) \geqslant 1 - \frac{1}{25}.$$

Marginea de siguranță este deci 0,04, mai mică decît 0,05, care constituie o margine de siguranță practică satisfăcătoare.

Valoarea lui μ^2 ne dă deci măsura dispersiei valorilor variabilei $x = f(\xi)$ în jurul valorii medii. Cînd μ este mic, valorile lui sînt strînse în jurul valorii medii. Cînd este mare, valorile sînt împrăștiate.

6. *Relații între momentele de diferite ordine.* Observăm mai întîi că momentul absolut de ordinul k este valoarea medie a funcției convexe $y = |x|^k$ $(k \geqslant 1)$.

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_l$ cele l valori ale variabilei aleatoare cu probabilitățile respective $p_1, p_2, \ldots, p_l$ și $y_h = |x_h|^k$ cele l valori corespunzătoare ale funcției $y = |x|^k$. Punctele de coordonate (x_h, y_h) $(h = 1, 2, \ldots, l)$ sînt situate pe curba convexă $y = |x|^k$. Dacă le atribuim mase egale cu probabilitățile respective, centrul de greutate, de coordonate

$$\xi = \sum_h p_h x_h, \qquad \eta = \sum_h p_h |x_h|^k,$$

este situat în interiorul oricărui contur convex care înconjură punctele M_h prin urmare deasupra curbei $y = |x|^k$. De unde inegalitatea Hölder-Jensen

$$f(\xi) \leqslant \eta \tag{15}$$

sau, explicit, pentru $k \geqslant 1$

$$\left(\sum_h p_h x_h\right)^k \leqslant \sum_h p_h |x_h|^k. \tag{16}$$

Fie acum $x_h = |a_h|^m$, $m \geqslant 1$. Inegalitatea precedentă, adevărată pentru orice sistem de valori x_h, devine

$$\left(\sum_h p_h |a_h|^m\right)^k \leqslant \sum_h p_h |a_h|^{km}, \tag{17}$$

pentru orice sistem de valori a_h și orice numere pozitive m și k mai mari decît 1.

Notînd cu

$$E_m = \left[\sum_h p_h |a_h|^m\right]^{\frac{1}{m}}$$

valoarea medie absolută de ordinul m, inegalitatea (17) se va scrie

$$E_m \leqslant E_{km} \qquad (k > 1). \tag{18}$$

De unde, o primă teoremă:

Valoarea medie de ordinul m, E_m, ca funcție de m, este monoton crescătoare pentru $m > 1$.

Dacă punem

$$u_j = m_j^{\frac{1}{m}} |x_j|, \quad v_j = m_j^{\frac{m-1}{m}},$$

inegalitatea (16) devine

$$\left(\sum_j u_j v_j\right) \leqslant \left(\sum_j u_j^m\right)^{\frac{1}{m}} \left(\sum_j v_j^{\frac{m}{m-1}}\right)^{\frac{m-1}{m}}.$$

Luînd

$$u_j = w_j^{\alpha}, \quad v_j = t_j^{\beta}, \quad \alpha \geqslant 1, \ \beta \geqslant 1,$$

obținem

$$\sum_j w_j^{\alpha} t_j^{\beta} \leqslant \left(\sum_j w_j^p\right)^{\frac{\alpha}{p}} \left(\sum_j t_j^q\right)^{\frac{\beta}{q}}, \tag{19}$$

unde

$$p = \alpha m, \quad q = \beta \frac{m}{m-1},$$

deci

$$p > \alpha, \quad q > \beta.$$

Vom presupune

$$\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} = 1. \tag{20}$$

În acest caz, vom pune

$$w_j^p = m_j x_j^p; \quad t_j^q = m_j y_j^q; \quad m_j \geqslant 0, \quad x_j \geqslant 0, \quad y_j \geqslant 0.$$

Relațiile (19) și (20) ne dau

$$\sum_j m_j x_j^{\alpha} y_j^{\beta} \leqslant \left(\sum_j m_j x_j^p\right)^{\frac{\alpha}{p}} \left(\sum_j m_j y_j^q\right)^{\frac{\beta}{q}}. \tag{21}$$

Această inegalitate generalizează inegalitatea lui Schwartz, care se obține luînd $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $p = 2$, $q = 2$,

$$\sum_j m_j x_j y_j \leqslant \left(\sum_j m_j x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_j m_j y_j^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

Trecerea de la (21) sau (22) la inegalitățile care se obțin înlocuind sumele prin integrale nu prezintă nici o greutate și nu vom reveni asupra demonstrațiilor.

§ 4. Desfaceri și variabile aleatoare independente

1. G e n e r a l i t ă ț i. Dependența și independența între variabilele aleatoare sînt noțiuni tipic probabiliste. Ele nu privesc înseși valorile acestor variabile, ci probabilitatea evenimentelor cărora le corespund aceste valori. Acest fapt conduce la corespondența dintre independența a două variabile aleatoare și independența desfacerilor pe care ele le determină.

2. *Independența a două sau mai multe desfaceri.* Două evenimente A și B sînt independente, dacă [v. §2, formula (7)]

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B). \tag{1}$$

Fiecare dintre aceste evenimente determină o desfacere a lui E. Avem astfel cele două desfaceri

$$A,\ A';$$
$$B,\ B'.$$

Așa cum am arătat în § 2, vom avea pe lîngă (1) și egalitățile

$$\left.\begin{aligned} P(A \cap B') &= P(A)\,P(B') \\ P(A' \cap B) &= P(A')\,P(B) \\ P(A' \cap B') &= P(A')\,P(B') \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

care sînt o consecință a relației (1).

Să considerăm în același timp cîte o variabilă $x = f(\xi)$ și $y = g(\xi)$, corespunzătoare fiecăreia dintre cele două desfaceri și definite astfel

$$x = x_1 \quad \text{dacă } \xi \in A; \quad x = x_2 \quad \text{dacă } \xi \in A',$$
$$y = y_1 \quad \text{dacă } \xi \in B; \quad y = y_2 \quad \text{dacă } \xi \in B'.$$

Probabilitatea ca $y = y_1$ dacă $x = x_1$ este, pe baza egalității (1), identică cu $P_A(B) = P(B)$. În același mod găsim că probabilitatea ca $y = y_1$, dacă $x = x_2$, este $P_{A'}(B) = P(B)$, pe baza celei de-a doua egalități din (2).

Prin urmare, valorile lui y sînt independente de valorile lui x. Cu ajutorul primei și ultimei dintre egalitățile (2) se vede că și valorile variabilei x sînt independente de valorile variabilei y. Prin urmare, în aceste condiții cele două variabile sînt independente. Vom spune, în același timp, că cele două desfaceri sînt independente.

Luînd acest caz particular ca model, vom putea defini independența a două variabile aleatoare oarecare, definite pe același cîmp finit de probabilitate $\{E, \mathcal{K}, P\}$.

D e f i n i ț i e. *Două variabile aleatoare* $x = f(\xi)$, $y = g(\xi)$, *care determină desfacerile*

$$F_1, F_2, \ldots, F_l;\ G_1, G_2, \ldots, G_m,$$

sînt independente dacă

$$P(F_j \cap G_h) = P(F_j)\,P(G_h)\ (j = 1, 2, .., l;\ h = 1, 2, \ldots, m). \qquad (3)$$

Ca o lămurire a acestei definiții vom observa că din egalitățile (3) rezultă

$$P_{x=x_j}(y = y_h) = P(y = y_h) = P(G_h).$$

De asemenea,

$$P_{y=y_h}(x = x_j) = P(x = x_j) = P(F_j),$$

pentru orice $j = 1, 2, \ldots, l$ și orice $h = 1, 2, \ldots, m$.

Egalitățile (3) caracterizează, odată cu independența variabilelor f și g, independența celor două desfaceri.

Vom introduce acum o definiție a independenței totale a n desfaceri și implicit a oricărui sistem de variabile care le corespund.

D e f i n i ț i e. *Desfacerile* $D^1, D^2, \ldots, D^n$ *ale evenimentului* E, *unde* D^j *este desfacerea*

$$E^j_1, E^j_2, \ldots, E^j_{l_j} \qquad (j = 1,2, \ldots, n),$$

sînt total independente între ele dacă

$$P(E^1_{k_1} \cap E^2_{k_2} \cap \ldots \cap E^n_{k_n}) = P(E^1_{k_1})\,P(E^2_{k_2}) \ldots P(E^n_{k_n}) \qquad (4)$$

pentru

$$k_j = 1, 2, \ldots, l_j; \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Sisteme de n variabile aleatoare independente în totalitatea lor.

D e f i n i ț i e. *Un sistem de n variabile aleatoare* $x_j = f_j(\xi)$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$, *definite pe același cîmp finit de probabilitate, este independent în totalitatea sa dacă cele n desfaceri corespunzătoare sînt independente.*

Această condiție se mai poate scrie, dacă notăm cu $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{il_j}$ cele l_j valori pe care le ia x_j,

$$P(x_1 = x_{1k_1},\ x_2 = x_{2k_2}, \ldots, x_n = x_{nk_n}) = P(x_1 = x_{1k_1}) \ldots$$
$$\ldots\ P(x_n = x_{nk_n})\ (k_j = 1, 2, \ldots, l_j;\ j = 1,2, \ldots, n). \qquad (5)$$

Din sistemul (4) se poate deduce o consecință care este echivalentă cu (4) și are un aspect mai general decît el.

Fie A^j reuniunea unui număr oarecare de elemente ale desfacerii D^j,

$$A^j = E^j_{r_1} \cup E^j_{r_2} \cup \ldots \cup E^j_{r_j},$$

pentru orice j.

Sistemul (4) ne dă atunci prin sumare

$$\sum_{\substack{k_j = l_1, l_2, \ldots, l_j \\ j = 1, 2, \ldots, n}} P(E^1_{k_1} \cap \ldots \cap E^n_{k_n}) =$$

$$= \sum_{k_1 = 1, 2, \ldots, l_1} P(E^1_{k_1}) \sum_{k_2 = 1, 2, \ldots, l_2} P(E^2_{k_2}) \ldots \sum_{k_n = 1, 2, \ldots, l_n} P(E^n_{k_n}),$$

de unde

$$P(A^1 \cap A^2 \cap \ldots \cap A^n) = P(A^1)\, P(A^2) \ldots P(A^n), \qquad (6)$$

oricare ar fi reuniunile $A^1, A^2, \ldots, A^n$, egalitate care cuprinde la rîndul ei pe (4) și poate fi luată ca definiție pentru independența desfacerilor $D^1, D^2, \ldots, D^n$ sau pentru independența variabilelor respective.

Ca exemplu, vom considera un sistem de n urne $U^1, U^2, \ldots, U^n$ avînd fiecare aceeași compoziție: a_1 bile de culoarea 1, a_2 bile de culoarea 2, ..., a_m bile de culoarea m, în total $N = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ bile. Evenimentele elementare ale cîmpului $\{E, \mathcal{K}, P\}$ format cu acest sistem de urne sînt de forma $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$, unde α este o bilă oarecare din prima urnă etc. Dacă notăm cu E^l_j evenimentul: bila de culoarea j din urna U^l, evenimentele importante ale cîmpului format de cele n urne sînt

$$E^1_{j_1}, E^2_{j_2}, \ldots, E^n_{j_n}.$$

Vom avea $P(E^1_{j_1}, E^2_{j_2}, \ldots, E^n_{j_n}) = P(E^1_{j_1}), \ldots, P(E^n_{j_n})$. Succesiunea $E^1_{j_1}, E^2_{j_2}, \ldots, E^n_{j_n}$ nu trebuie considerată ca intersecție, ci ca o alăturare. Evenimentele $E^1_{j_1}, \ldots, E^n_{j_n}$ sînt numai componente ale evenimentului $E^1_{j_1}, E^2_{j_2}, \ldots, E^n_{j_n}$. Pentru a face, de exemplu, ca $E^1_{j_1}$, care este un eveniment al urnei U^1, să figureze și ca eveniment al cîmpului $\{E, \mathcal{K}, P\}$ îl vom completa după cum urmează și vom nota

$$E^1_{j_1} = E^1_{j_1} E^2 E^3 \ldots E^n,$$

unde E^j este evenimentul total al urnei U^j.

În general, construim după același procedeu evenimentele $E^l_{j_l}$, corespunzînd urnei U^j ca evenimente ale cîmpului $\{E, \mathcal{K}, P\}$ al celor n urne. Este evident că

$$\bar{E}^1_{j_1} \cap \bar{E}^2_{j_2} \cap \ldots \cap \bar{E}^n_{j_n} = E^1_{j_1} E^2_{j_2} \ldots E^n_{j_n},$$

prin urmare

$$P(\bar{E}^1_{j_1} \cap \bar{E}^2_{j_2} \cap \ldots \cap \bar{E}^n_{j_n} = P(E^1_{j_1})\, P(E^2_{j_2}) \ldots P(E^n_{j_n})$$

pentru orice

$$j_1, j_2, \ldots, j_n = 1, 2, \ldots, m.$$

Acestei egalități îi corespunde afirmația că urnele sînt independente.

Cu ajutorul egalităților (6) se verifică imediat următoarea

P r o p o z i ț i e. *Dacă cele n variabile $x_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ sînt independente în totalitatea lor, variabilele oricărui subsistem de $l (l < n)$ variabile sînt independente în totalitatea lor.*

Pentru demonstrație, considerăm arbitrare mulțimile A^j, corespunzătoare grupului de l variabile care ne interesează, iar pentru celelalte facem $A^j = E$.

În particular, *n variabile independente în totalitatea lor sînt independente două cîte două.*

Reciproca acestei propoziții nu este valabilă. n variabile independente două cîte două nu sînt necesar independente în totalitatea lor.

Iată un exemplu care confirmă această afirmație. Fie

$$E = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\} \text{ cu } P(e_j) = \frac{1}{9}.$$

$$(j = 0, 1, 2, \ldots, 8)$$

Fie acum

$$A_1 = \{e_0, e_1, e_2\}, \quad A_2 = \{e_0, e_3, e_4\}, \quad A_3 = \{e_0, e_5, e_6\},$$

$$A_4 = \{e_0, e_7, e_8\}.$$

Avem, evident,

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{3}.$$

Evenimentele A_1, A_2, A_3, A_4 sînt independente două cîte două, deoarece

$$P(A_j \cap A_h) = P(A_j)\, P(A_h) = \frac{1}{9}.$$

$$j = 1, 2, 3, 4, \quad j \neq h$$

În același timp, însă,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(e_0) = \frac{1}{9} \neq P(A_1)\, P(A_2)\, P(A_3) = \frac{1}{27}.$$

Prin urmare, nu sînt independente cîte trei, oricum le-am lua. Luîndu-le toate patru, obținem

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(e_0) = \frac{1}{9},$$

în vreme ce

$$P(A_1)\, P(A_2)\, P(A_3)\, P(A_4) = \frac{1}{3^4}.$$

Sînt împrejurări în care nu interesează decît independența variabilelor unui sistem luate două cîte două. Drept exemplu avem propoziția care urmează.

P r o p o z i ț i e. *Dacă variabilele* $x_1 = f_1(\xi)$, $x_2 = f_2(\xi)$, ..., $x_n = f_n(\xi)$ *sînt independente două cîte două, avem egalitatea*

$$M_2[x_1 + x_2 + \ldots + x_n] = \sum_j M_2[x_j] + 2\sum_{j<i} M[x_i]\, M[x_j].$$

Într-adevăr,

$$M_2[x_1 + x_2 + \ldots + x_n] = M[(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2] = \sum_j M[x_j^2] + 2\sum_{j<i} M[x_i x_j],$$

de unde, folosind independența două cîte două, care dă $M[x_i x_j] = M[x_i]\, M[x_j]$, obținem egalitatea enunțată.

3. *Proprietăți ale sistemelor de variabile independente ale unui cîmp.*

I. Fie $x_j = f_j(\xi)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ un sistem de n variabile independente în totalitatea lor și $\varphi_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, n funcții reale oarecare; variabilele aleatoare $\varphi_j(f_j(\xi))$ $(j = 1, 2, \ldots n)$ sînt de asemenea independente.

Demonstrația este imediată, ținînd seama de relația (6), deoarece componentele desfacerilor care corespund variabilelor $\varphi_j(f_j(\xi)) = \varphi_j \cdot f_j$ sînt de forma A^1, folosită în (6).

II. Fie $[I_\alpha]_{\alpha \in J}$ o partiție a mulțimii de indici $1, 2, \ldots, n$ și $F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ o funcție reală de $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Variabilele

$$g_\alpha(\xi) = [F(y_1, y_2, \ldots, y_n)], \quad \alpha \in J,$$

$$y_j = \begin{cases} f_j(\xi), & j \in I_\alpha \\ k, & j \notin I_\alpha \end{cases},$$

k fiind o constantă oarecare, convenabil aleasă, sînt independente în totalitatea lor.

Demonstrația este imediată scriind mulțimile pe care $g_\alpha(\xi)$ își iau diferitele lor valori și folosind relația (6).

În particular, sînt independente funcțiile $g_\alpha = \prod_{j \in I_\alpha} f_j (\alpha \in J)$.

Pentru cazul acesta am avut

$$F = y_1 y_2 \ldots y_n \quad (k = 1).$$

Sînt de asemenea independente funcțiile $h_\alpha = \sum_{j \in I_\alpha} f_j (\alpha \in J)$. În acest caz am luat

$$F = y_1 + y_2 + \ldots + y_n \quad (k = 0).$$

Teoremă. *Valoarea medie a produsului a două variabile independente ale unui cîmp este egală cu produsul valorilor lor medii.*

Fie, pentru demonstrație, $x = f(\xi)$, $y = g(\xi)$ cele două variabile și valorile respective $x_1, x_2, \ldots, x_l$; $y_1, y_2, \ldots, y_m$, luate pe mulțimile corespunzătoare $F_1, F_2, \ldots, F_l$; $G_1, G_2, \ldots, G_m$.

Avem

$$M[xy] = \sum_{j,k} x_j y_h\, P(F_j \cap G_k).$$

Dacă ținem seama de independență, $P(E_j \cap G_k) = P(E_j)\, P(G_k)$, deci

$$M[xy] = \sum_{j,k} x_j y_k P(E_j)\, P(G_k) = \left(\sum x_j P(E_j)\right)\left(\sum_k y_k P(G_k)\right) = M[x]\, M[y].$$

Prin urmare, teorema este demonstrată.

Folosind această teoremă, propoziția anterioară și proprietatea II se demonstrează imediat, prin recurență,

Teorema. *Valoarea medie a unui produs de variabile aleatoare independente în totalitatea lor, ale unui cîmp, este produsul valorilor medii.*

Să presupunem, pentru aceasta, că teorema este adevărată pentru n variabile independente și să arătăm că este valabilă pentru $n + 1$ variabile independente.

Într-adevăr, dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}$ sînt $n + 1$ variabile independente în totalitatea lor, variabilele $f_0 = f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}$ sînt independente între ele, deci

$$M[f_1 f_2 \ldots f_{n+1}] = M[f_1 f_2 \ldots f_n]\, M[f_{n+1}].$$

Cum însă, prin ipoteză, teorema este adevărată pentru n variabile independente, avem

$$M[f_1 f_2 \dots f_n] = M[f_1]\, M[f_2] \dots M[f_n],$$

deci

$$M[f_1 f_2 \dots f_{n+1}] = M[f_1]\, M[f_2] \dots M[f_{n+1}].$$

Teorema fiind valabilă pentru $n = 2$, va fi valabilă pentru orice n.

§ 5. Problema numerelor mari și teorema lui Bernoulli

1. *Cîmpul de probabilitate elementar.* Să considerăm o experiență E, care poate fi și un proces elementar natural, al cărei rezultat este unul dintre evenimentele, în număr finit sau nu, ale unui cîmp de probabilitate, fiecare eveniment avînd o probabilitate determinată. Fie A unul dintre aceste evenimente și p probabilitatea lui, presupusă diferită de zero.

Vom numi cîmp de probabilitate elementar relativ la experiența E, și-l vom nota cu C_E, cîmpul constituit din evenimentele A, $A' \equiv \text{non } A$, $\Omega = A \cup A'$ și $\varnothing$, avînd probabilitățile respective p, $q = 1 - p$, 1 și 0.

Experiența repetată. Cîmpurile de probabilitate C_{E_n} *și* C_{E_∞}. Presupunem că experiența E_n, constînd din repetarea de n ori a experienței E, are sens bine determinat.

Evenimentele elementare ale experienței E_n sînt toate succesiunile de felul

$$AAA'A \dots A'$$

de evenimente A și A' în număr total n.

Precizăm independența fiecăreia dintre experiențele E, considerînd că probabilitatea unui eveniment ca cel de mai sus este produsul probabilităților evenimentelor respective

$$ppqp \dots q.$$

Să construim cîmpul de probabilitate C_{E_n} cu evenimentele elementare

$$AAA'A \dots A'\Omega\Omega, \dots \tag{1}$$

unde succesiunea primilor n termeni reprezintă evenimentele elementare ale experienței E_n pentru fiecare $n = 1, 2, \dots$.

Probabilitatea unui astfel de eveniment este aceeași cu a succesiunii primilor n termeni.

Evenimentele elementare corespunzătoare experienței E_n constituie și ele un cîmp C_{E_n}, care este un subcîmp de probabilitate al lui C_{E_∞}, constituit din evenimentele

$$AAA'A \dots .$$

Un eveniment S_ν^n al cîmpului C_{E_∞}, astfel constituit, este mulțimea de succesiuni (1), în care A se prezintă de ν ori și A' de $n - \nu$ ori. Probabilitatea acestui eveniment este, evident,

$$P(S_\nu^n) = C_n^\nu p^\nu q^{n-\nu}, \tag{2}$$

ν fiind frecvența absolută a evenimentului A în succesiunea respectivă.

După cum se verifică imediat, evenimentul S_ν^n cu probabilitate maximă (pentru n fix) este cel care corespunde frecvenței absolute ν pentru care

$$\nu + 1 \geqslant p(n+1) \geqslant \nu$$

relație echivalentă cu

$$-q \leqslant \nu - np \leqslant p.$$

Frecvența absolută cu probabilitate maximă este deci întregul cuprins în intervalul $(pn - q,\ pn + q)$.

2. **Teorema lui Bernoulli.** Considerînd frecvența ν_n ca o variabilă aleatoare pe C_{E_∞}, obținem imediat

$$\mu(\nu_n) = \sum_{\nu=0}^{n} \nu C_n^\nu p^\nu q^{n-\nu} = np. \tag{3}$$

Caracterizăm evenimentele S_ν^n și prin abaterea

$$\lambda = \nu - np,$$

scriind $S_\lambda^n = S_\nu^n$.

Introducînd această nouă variabilă, relația (2) se va scrie

$$P(S^n_{(\lambda)}) = C_n^{\lambda+np} p^{\lambda+np} q^{nq-\lambda}. \tag{4}$$

Folosind formula lui Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}\left(1 + \frac{\theta}{12n}\right) \quad (0 < \theta < 1)$$

relația (4) devine

$$P(S^n_{(\lambda)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{np}\right)^{np+\lambda+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{nq}\right)^{nq-\lambda+\frac{1}{2}}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1+\frac{\theta}{12n}}{\left(1+\frac{\theta'}{12(np+\lambda)}\right)\left(1+\frac{\theta''}{12(nq-\lambda)}\right)}. \tag{5}$$

Probabilitatea mulțimii de evenimente $S^n_{(\lambda)}$, a căror frecvență ν are o abatere λ cuprinsă într-un interval $(-L, +L)$, este suma

$$P^{(n)}_{(-L,\,+L)} = \sum_{-L \leqslant \lambda \leqslant L} P(S^n_{(\lambda)}). \tag{6}$$

Pe de altă parte, după cum se vede din (5), fiecare dintre probabilitățile $P(S^n_{(\lambda)})$ tinde către zero cînd n tinde către infinit, λ fiind fix.

Rezultă din (6) că

$$P^{(n)}_{(L,\,+L)} \to 0 \tag{7}$$

cînd $n \to \infty$. Această proprietate reprezintă prima parte a teoremei lui Bernoulli: *Probabilitatea ca un șir să dea o frecvență absolută avînd o abatere mai mică în valoare absolută decît un număr L, tinde către zero ca $\frac{1}{\sqrt{n}}$ cînd n tinde spre infinit.*

Această propoziție, care în general trece nerelevată și asupra căreia a atras atenția în special G. Castelnuovo, se mai poate enunța și astfel

Probabilitatea ca un șir să dea o frecvență absolută, a cărei abatere de la valoarea medie depășește un număr dat L — oricît de mare — tinde către zero cînd n tinde către infinit.

A doua parte a teoremei lui Bernoulli rezultă din aplicarea directă a lemei lui Cebîșev, cu ajutorul căreia obținem

$$P\left\{S^{(n)}_{(\lambda)} \;\middle|\; \left|\frac{\lambda}{n}\right| \leqslant \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{pq}{n\varepsilon}$$

sau încă

$$P\left\{S^{(n)}_{\nu} \;\middle|\; \left|\frac{\nu}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{pq}{n\varepsilon}. \tag{7'}$$

Inegalitatea (7) afirmă convergența în probabilitate a frecvenței relative $f_n = \frac{\nu}{n}$ către p.

Mai mult, după o teoremă a lui Cantelli, f_n converge tare către p. Putem deci enunța teorema lui Bernoulli sub o formă întărită.

Pentru o succesiune de n experiențe independente între ele, pentru care evenimentul A are probabilitatea constantă p, frecvența teoretică f_n converge tare către probabilitatea p cînd n tinde către infinit.

Structura cîmpului C_{E_n} se regăsește în structura cîmpului C_{E_∞} cînd n este mare: șirurile în care frecvența relativă $\frac{\nu}{n}$ are o valoare apropiată de p devin atunci predominante.

Cu alte cuvinte, tabloul complet al șirurilor de rezultate posibile, în experiența E_n, caracterizează structura cîmpului C_E, dacă n este suficient de mare, în sensul că din acest tablou putem deduce probabilitatea p a evenimentului A, luînd drept valoare aproximativă a lui p, frecvența maximă, frecvența care se găsește în cele mai multe serii.

Putem alege pe n suficient de mare pentru ca eroarea pe care o comitem astfel în evaluarea lui p să fie oricît de mică voim.

3. *Comportarea asimptotică a frecvenței reduse.* Teorema lui Bernoulli are un caracter pur teoretic ca și cea care urmează și care aprofundează încă analiza rezultatelor posibile ale șirului de experiențe repetate E_n.

Evaluarea probabilității ca frecvența redusă $\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{npq}}$ să fie cuprinsă într-un interval (x_1, x_2) este efectuată printr-un calcul direct, folosind relația (5), în volumul *Calculul probabilităților* al lui G. Castelnuovo.

Noi vom urma aici calea mai rapidă, deși indirectă, care folosește funcția caracteristică.

Frecvența ν_n are funcția caracteristică

$$\varphi_n(\tau) = (p\, e^{i\tau\nu} + q)^n.$$

Rezultă că frecvența redusă α are ca funcție caracteristică

$$\varphi_n(\tau) = (p\, e^{i\, q\tau/\sqrt{npq}} + q^{-i\, p\tau/\sqrt{npq}})^n.$$

Folosim următoarele dezvoltări

$$e^{iu} = \cos u + i \sin u = 1 - \frac{u^2}{2} \cos \theta' u + i\left(u - \frac{u^3}{3} \cos \theta'' u\right)$$

cu

$$0 < \theta' < 1, \quad 0 < \theta'' < 1.$$

Rezultă

$$\varphi_n(\tau) = \left[1 - \frac{a_n(\tau)}{n} \frac{\tau^2}{2} + i \frac{b_n(\tau)}{n\sqrt{n}} \tau^3\right]^n \tag{8}$$

cu

$$a_n = q \cos q \frac{\theta_1 \tau}{\sqrt{npq}} + p \cos p \frac{\theta_2 \tau}{\sqrt{npq}} = 1 - \frac{C_n(\tau)}{npq} \tau^2,$$

$$b_n = \frac{1}{6\sqrt{pq}}\left(p^2 \cos p \frac{\theta_3 \tau}{\sqrt{npq}} - q^2 \cos q \frac{\theta_4 \tau}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$0 < \theta_i < 1, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Avem, evident,

$$0 \leqslant a_n \leqslant 1, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1, \quad |C_n(\tau)| < 1,$$

$$|b_n(\tau)| \leqslant \frac{1}{6\sqrt{pq}}.$$

Presupunem

$$|\tau| \leqslant \sqrt{npq}, \tag{9}$$

atunci

$$\left| - \frac{a_n(\tau)}{n} \frac{\tau^2}{2} + i \frac{b_n(\tau)}{n\sqrt{n}} \tau^3 \right| < \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Putem deci efectua în condiția (9) calculele care urmează

$$L\varphi_n(\tau) = nL \sqrt{\left(1 - \frac{a_n}{2n} \tau^2\right)^2 + \frac{b_n^2}{n^3} \tau^6} + in\omega_n,$$

unde

$$\omega_n = \operatorname{arc\,tg} \frac{b_n \tau^3}{n\sqrt{n}\left(1 - \frac{a_n}{n} \frac{\tau^2}{2}\right)} = b_n' \frac{\tau^3}{n\sqrt{n}} \tag{11}$$

cu

$$|b_n'| < \frac{1}{6\sqrt{pq}}, \quad \frac{b_n'}{b_n} \to 1 \text{ cu } n \to \infty.$$

În același timp, printr-o evaluare analoagă — dezvoltare în serie cu restul la termenul de primul ordin ($f(\tau) = f(0) + \tau f'(\theta\tau)$, obținem

$$L\sqrt{\left(1 - \frac{a_n}{n} \frac{\tau^2}{2}\right)^2 + \frac{b_n^2}{n^3} \tau^6} = - \frac{a_n'}{n} \frac{\tau^2}{2} \tag{12}$$

cu

$$a_n' = a_n \frac{1 - \frac{a_n}{4n} \tau^2 - \frac{b_n}{a_n n^2} \tau^4}{1 + \theta\left(- \frac{a_n}{n} \tau^2 + \frac{a_n^2}{4n^2} \tau^4 + \frac{b_n}{n^3} \tau^6\right)}, \tag{13}$$

deci

$$\lim a_n' = \lim a_n = 1 \quad \text{cînd} \quad n \to \infty. \tag{14}$$

Prin urmare,

$$\varphi_n(\tau) = e^{-\frac{a_n' \tau^2}{2} + i \frac{b_n'}{\sqrt{n}} \tau^3}. \tag{15}$$

Rezultă, astfel, pentru orice τ finit,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\tau) = e^{-\frac{\tau^2}{2}}.$$

De unde, folosind o teoremă bine cunoscută, obținem următoarea teoremă

Abaterea redusă $\alpha_n = \dfrac{\nu_n - np}{\sqrt{npq}}$ *este, asimptotic, o variabilă gaussiană.*

Nu pentru acest caz particular al teoremei centrale a calculului probabilităților am făcut dezvoltările de mai sus, ci pentru evaluările care urmează și care sînt specifice acestui caz particular.

Densitatea de repartiție gaussiană corespunzătoare funcției caracteristice (15) este

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\tau^2} e^{-i\tau x}\, d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{16}$$

Dacă punem

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{+T} e^{-\frac{1}{2}\tau^2} e^{i\tau x}\, d\tau + \varepsilon(x) \tag{17}$$

vom avea, de îndată ce $T > 1$,

$$|\varepsilon(x)| < \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}T^2}. \tag{18}$$

În același timp, dacă

$$\eta_n(\tau) = e^{-\frac{1}{2}\tau^2} - \varphi_n(\tau),$$

rezultă, ținînd seama de toate evaluările anterioare,

$$|\eta_n(\tau)| = \frac{d_n(\tau)}{\sqrt{n}}\tau^3 e^{-\frac{1}{2}\tau^2}, \quad |d_n(\tau)| \leqslant 1. \tag{19}$$

Prin urmare,

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{+T}\varphi_n(\tau)\, e^{-i\tau x}\, d\tau + \frac{1}{2\pi\sqrt{n}}\int_{-T}^{+T} d_n(\tau)\,\tau^3 e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau + \varepsilon(x)$$

sau

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{+T}\varphi_n(\tau)\, e^{-i\tau x}\, d\tau + \frac{e(T)}{\pi\sqrt{n}} + \varepsilon(x), \quad [e(T) \leqslant 1]. \tag{20}$$

Fie acum $F_n(x)$ funcția de repartiție a frecvenței reduse $\alpha_n = \frac{\nu_n - np}{\sqrt{npq}}$ și două valori reale $x_i (i = 1,2)$ astfel că $x_i \neq \alpha_n$ ($i = 1, 2$; $n > N$ oarecare).

Vom putea atunci aplica formula care dă funcția de repartiție $F_n(x)$ cînd i se cunoaște funcția caracteristică.

Pentru aceasta, integrăm în ambii membri din (20) între x_1 și x_2, ceea ce dă

$$\frac{1}{2\pi}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{+T}\varphi_n(\tau)\,\frac{e^{-i\tau x_2} - e^{-i\tau x_1}}{-i\tau} d\tau + \frac{(x_2 - x_1)\, e(\tau)}{\pi\sqrt{n}} + \int_{x_1}^{x_2}\varepsilon(x)\, dx.$$

Cînd T tinde către infinit, prima integrală din membrul al doilea tinde către $F_n(x_2) - F_n(x_1)$, iar din (18) rezultă

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}\varepsilon(x)\, dx\right| < \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}T^2}(x_2 - x_1) \to 0.$$

Folosind notația $\Phi(x)$ pentru funcția de repartiție gaussiană, vom putea deci scrie

$$|(\Phi(x_2) - \Phi(x_1)) - (F_n(x_2) - F_n(x_1))| \leqslant \frac{x_2 - x_1}{\pi\sqrt{n}}$$

și implicit

$$|(\Phi(x) - \Phi(x_1)) - (F_n(x) - F_n(x_1))| \leqslant \frac{x - x_1}{\pi\sqrt{n}} \tag{21}$$

dacă $x_1 < x < x_2$.

Putem deci enunța următoarea teoremă, care include, cum se verifică imediat, și cele două părți ale teoremei lui Bernoulli:

Teoremă. *În orice interval finit, funcția de repartiție $F_n(\alpha)$ a frecvenței reduse converge uniform către funcția de repartiție gaussiană, diferența între cele două repartiții respectînd inegalitatea* (21).

Observație importantă. Rezultatul acesta, mult mai complet decît cel dat de teorema lui Bernoulli, care indică numai „convergența în probabilitate" a frecvenței f_n către p, nu trebuie să ne surprindă, deoarece f_n converge tare — deci aproape peste tot — către p.

4. *Compararea rezultatelor empirice ale unei experiențe repetate cu cele teoretice.* a) *Un postulat empiric.* Experiența E nu pune în evidență, în mod direct, nici o mărime care să aibă semnificația structurală a probabilității. O probă ne dă un eveniment: A sau A'. Șirul de probe al experienței repetate de n ori ne dă o frecvență absolută ν (evenimentul s-a produs în cele n probe de ν a ori).

Producerea evenimentului A în experiența efectivă E fiind aleatoare, o altă serie de n probe ne dă în genere o altă frecvență. Dacă facem N serii de cîte n probe, obținem mulțimea de N frecvențe:

$$l_1, l_2, \ldots, l_N, \tag{1}$$

$$0 \leqslant l_j \leqslant n \quad (j = 1, 2, \ldots, N)$$

fiecare dintre frecvențe corespunzînd unei serii de probe.

Caracterele proprii ale experienței E se relevă în constatarea care poate fi formulată astfel

Distribuția valorilor șirului empiric (1) *este aceeași ca a valorilor frecvențelor teoretice.*

Pentru a preciza enunțul acestui principiu, care pune de acord teoria cu experiența și, prin numeroasele sale verificări, poate fi considerat ca universal valabil, nu ne vom opri nici la frecvențele absolute l_j, nici la cele relative $\frac{l_j}{n}$, ci la frecvențele reduse

$$c_j = \frac{l_j - np}{\sqrt{npq}} \tag{2}$$

a căror repartiție asimptotică este deosebit de caracteristică.

Ținînd seama de teorema finală a paragrafului precedent, care afirmă că frecvențele reduse teoretice au, în orice interval finit, o repartiție asimptotic gaussiană, propoziția de mai sus capătă următoarea expresie

P o s t u l a t. *Dacă n și N sînt suficient de mari, repartiția frecvențelor reduse $l_j (j = 1, 2, \ldots, N)$ este gaussiană, — cu valoarea medie nulă și dispersia egală cu* 1.

Acest postulat este deci echivalent cu următoarea propoziție

Frecvența empirică a experienței E repetate urmează legea erorilor de observație.

Întrucît putem scrie

$$c_j = \frac{\frac{l_j}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \tag{3}$$

faptul că aceste valori au o distribuție asimptotică gaussiană cu valoarea medie nulă și dispersia egală cu unitatea ne arată că

Frecvențele $\frac{l_j}{n}$ pot fi considerate ca valorile observate ale mărimii structurale p.

Postulatul formulat mai sus este o lege naturală de tip stochastic. Ea leagă într-o relație stochastică cele două mărimi: probabilitatea și frecvența. Cea dintîi ne dă o caracteristică structurală relativă la experiența elementară, iar ultima caracterizează rezultatele diferitelor sisteme de experiențe repetate.

Examenul statistic al abaterilor pe care datele experimentale le pot prezenta față de distribuția gaussiană teoretică, problema convergenței, cînd n variază, către această distribuție, în orice interval finit, sînt probleme tipice ale statisticii și, în speță, ale teoriei erorilor de observație.

b) *Despre valoarea lui p.* Din considerațiile precedente reținem pentru p două proprietăți:

i) p este valoarea medie a frecvenței teoretice relative,

$$p = M(f_n);$$

ii) valoarea lui p este aproximată — oricît de bine dorim — de frecvența relativă care are frecvență maximă.

În baza postulatului vom avea, în același timp, cu aproximațiile îngăduite de teoria erorilor de observație, următoarele proprietăți cu caracter empiric

1) p este valoarea medie a frecvenței empirice $\frac{l_j}{n}$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$

2) frecvența $\frac{l_j}{n}$, care are cea mai mare frecvență în șirul $\frac{l_1}{n}, \frac{l_2}{n}, \ldots, \frac{l_N}{n}$, este cea mai apropiată de p.

Ultima propoziție trebuie înțeleasă, în lumina teoremei fundamentale, astfel:

Să considerăm intervalul (0, 1) și să-l dividem în h segmente egale, afară doar de segmentele extreme care pot fi mai mici, h fiind astfel ales încît o evaluare a lui p cu mai puțin de $\frac{1}{h}$ să fie considerată drept bună. Ne aranjăm astfel ca p să fie centrul unuia dintre segmente.

Toate frecvențele $\frac{l_j}{n}$ care cad într-unul dintre segmente se vor reprezenta prin centrul segmentului. Punctul p va avea în această repartiție frecvența maximă.

Abaterile de la aceste rezultate nu trebuie să depășească limitele îngăduite de statistica matematică.

Observație finală. Dacă distribuția empirică nu este gaussiană, în condiții pe care statistica le precizează ca fiind caracteristice, experiența nu îndeplinește condițiile de stabilitate pe care le-am presupus la baza considerațiilor de mai sus.

Obiectivul nostru nu a fost de a intra în cercetarea statistică aprofundată a teoriei erorilor de observație sau, mai general, în teoria estimației statistice.

De aceea ne-am mărginit la formularea propoziției P și la interpretarea consecințelor sale imediate, caracteristice pentru tipul de proces aleator la care ne-am referit: experiența repetată.

5. *Experiențe tipice cu caracter stochastic.* a) *Aruncarea «la întîmplare» cu banul sau cu zarul ca fapt experimental.* Aruncarea cu „banul" sau cu „zarul" sînt fapte de experiență comună. Ele aparțin experienței noastre curente și deci intuiției noastre experimentale în așa măsură, încît aproape orice om este în stare să distingă aruncările „la întîmplare" de cele care sînt făcute cu o regulă care poate duce la prevederi, în fiecare caz în parte.

Nu este dar un procedeu neștiințific cînd se vorbește în aplicațiile teoriei probabilităților la «aruncarea la întîmplare cu banul sau cu zarul», fără a se preciza nimic altceva asupra acestor experiențe tip.

Asemenea experiențe ne dau modele pentru succesiuni de evenimente datorite întîmplării.

Diversele încercări de a da reguli pentru a reproduce după norme determinate șiruri cu succesiune întîmplătoare sînt sortite eșecului. Au constatat-o toți cei care au căutat să formuleze „o regulă de joc" la ruletă, ca și teoreticienii care au adîncit, în ultima vreme, problema selecției unui subșir aleator dintr-un șir infinit dat.

O regulă care ni se pare justificată este apelul la una dintre experiențele întîmplătoare tipice, în modul următor:

Fie

$$A, A', A', A, A, ..., A, A', ... \qquad (1)$$

succesiunea indefinită de evenimente alternative A sau A', reprezentînd fețele apărute într-un șir indefinit de «aruncări la întîmplare» ale unui ban.

Vom selecta un subșir al șirului (1), fie dînd o regulă determinată prin recurență sau nu, de pildă o regulă de tipul lui A. Wald, fie folosind o succesiune de experiențe întîmplătoare.

Să folosim, de exemplu, o succesiune de aruncări la întîmplare cu banul; dacă la a n-a aruncare obținem fața A, păstrăm evenimentul al n-lea din șirul (1); dacă obținem fața A', lăsăm la o parte evenimentul de rangul n. Aceasta pentru fiecare n.

Regula de selecție în acest caz este întîmplătoare.

Aruncarea la întîmplare cu „zarul" ne dă de asemenea o regulă de selecție.

Dacă la aruncarea a n-a iese fața 1, păstrăm evenimentul de rangul n din șirul (1), iar dacă iese o altă față, trecem peste acest eveniment.

Astfel de reguli de selecție pot fi și succesiuni de evenimente dependente, constituind un lanț aleator oarecare.

Se pune problema de a ști dacă subșirul obținut printr-o atare regulă de selecție are aceeași structură aleatoare ca șirul dat (1) sau dacă în structura lui se resimte în mod predominant structura procesului de selecție.

Nu vom da aici un răspuns direct și general acestei probleme. Un răspuns parțial este însă obținut în cele ce urmează.

b) *O caracterizare matematică a aruncării la întîmplare. Invarianța față de un grup de permutări.* De îndată ce căutăm o precizare științifică a caracterelor experienței, numită aruncare la întîmplare cu banul sau cu zarul, apar numeroase greutăți. Unele privesc condițiile de simetrie ale banului sau ale zarului. O dată împlinite aceste condiții simple, apar greutățile mari legate de complexitatea operației mecanice de aruncare.

La un mecanism ca ruleta, operația mecanică este relativ simplă, după cum vom lămuri mai tîrziu. Mecanismul aruncării în aer a unui obiect ca moneda sau zarul este complicat, și problemele noastre nu ar putea aștepta rezultatele, cu mult prea complicate, ale studiului ecuațiilor respective.

Dar nu avem nevoie de întreaga complexitate a mișcării, ci de cele două caracteristici esențiale ale ei:

1°. Fiecare mișcare poate fi considerată ca o permutare a celor două fețe. Șirul de evenimente în succesiunea (1) de aruncări cu banul este deci un șir de permutări ale celor două fețe A și A'.

2°. Mișcarea banului este independentă de caracterul special al celor două fețe.

În particular, deci, frecvența evenimentului A trebuie să rămînă asimptotic invariantă, dacă în șirul (1) facem o permutare între A și A', ceea ce revine la a fi permutate, la un moment dat, culorile celor două fețe.

Aruncările la întîmplare ale banului au deci această caracteristică comună:

Frecvența celor două evenimente A și A' este asimptotic aceeași în orice șir (1), rezultat al unei succesiuni de aruncări. Limita acestor frecvențe este, deci, în sens probabilistic, $\frac{1}{2}$.

În același timp, vom numi probabilitate a feței A o valoare $f(A)$ cu proprietățile

$$f(A) + f(A') = 1,$$

$$f(A) = f(A'),$$

($f(A)$ este independentă de culoarea feței).

Deci $f(A) = \frac{1}{2}$ este în același timp limita frecvenței și valoarea probabilității feței A.

În cazul aruncării zarului, succesiunea evenimentelor este o succesiune de numere din sistemul 1, 2, 3, 4, 5, 6, de pildă

$$3, 1, 1, 6, 5, 6, 3, \ldots$$

În acest șir 1 prezintă o frecvență $\frac{l_n}{n}$ pînă la rangul n, variind cu n.

Presupunînd că, în decursul operațiilor de aruncare, eventual chiar la început, am efectuat o permutare a fețelor (a numerelor 1, 2, 3, 4, 5, 6), cerința este ca frecvența $\frac{l_n}{n}$, pentru n suficient de mare, să nu se resimtă de permutarea efectuată. Se cere deci, implicit, ca cele șase fețe să aibă frecvențe asimptotic egale. De aici, valoarea $\frac{1}{6}$ a acestei frecvențe și, ca și mai sus, egalitatea acestei frecvențe cu probabilitatea.

În amîndouă aceste cazuri, atît probabilitatea, ca valoare structurală, cît și frecvența, ca mărime caracteristică a șirurilor rezultate din aruncarea la întîmplare, sînt invariante pentru un grup de permutări. Aceasta asigură și egalitatea lor.

Constatînd aceasta, să adăugăm însă că nu am definit, în cele de mai sus, aruncarea la întîmplare a unui zar, ci doar am constatat caracteristica acestei operații, suficientă pentru proprietățile frecvenței.

Evident că există și aruncări care nu sînt la întîmplare și care ne dau șiruri avînd aceeași invarianță, după cum există mișcări ergodice continue care nu verifică ecuații diferențiale dinamice.

Extracțiile la întîmplare dintr-o urnă conținînd bile care nu se diferențiază decît prin culoare constituie categoria de experiențe de foarte largă generalitate, care includ și aruncarea zarului și a banului.

Dacă numărul bilelor de diferite culori este același, grupul care intervine este acela al permutării de atîtea obiecte cîte culori diferite există în urnă.

În cazul cel mai general, să presupunem că urna conține k_1 bile de culoare 1, k_2 bile de culoare 2, ..., k_l bile de culoarea l.

Numerotăm în acest caz toate bilele de la 1 la $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_l$.

Un șir de extracții la întîmplare este un șir constituit din numere de la 1 la k.

Frecvența unuia dintre aceste numere, a numărului l de exemplu, este asimptotic invariantă pentru orice permutare a celor k numere, în particular pentru permutările 1, h (h fiind una dintre valorile 2, 3, ..., n), celelalte rămînînd neschimbate. Aceasta arată că frecvența fiecăruia dintre cele k numere este asimptotic aceeași, deci egală cu $\frac{1}{k}$.

De aici deducem imediat că frecvența culorii 1 este $\frac{k_1}{k}$.

Aceeași analiză ca în cazul banului ne arată că valoarea structurală, invariantă pentru același grup de permutări, asociată extracției la întîmplare a unei bile, este $p_1 = \frac{1}{k}$.

De aici rezultă, pentru bilele de culoarea 1, probabilitatea $\frac{1}{k}$, iar pentru frecvența acestor bile valoarea asimptotică $\frac{k_1}{k_1}$, ținînd seama că frecvența culorii 1 este suma frecvențelor bilelor respective.

§ 6. Variabile aleatoare dependente. Corelație

Corelația a două variabile. Definiție. Se numește corelație a două variabile f, g definite pe cîmpul de probabilitate $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ valoarea medie

$$\gamma = M[(f - M[f])\,(g - M[g])]. \tag{1}$$

Vom avea atunci

$$\gamma = M[fg] - M[f]\,M[g]. \tag{2}$$

Expresia (2) prezintă corelația ca diferență între valoarea medie a produsului și produsul valorilor medii ale celor două variabile.

Rezultă imediat următoarele două propoziții:

Propoziția 1. *Corelația a două variabile independente este nulă.*

Propoziția 2. *Condiția necesară și suficientă ca două variabile să fie necorelate* ($\gamma = 0$) *este ca*

$$M[fg] = M[f]\,M[g].$$

Următorul exemplu ne va arăta că există variabile necorelate care nu sînt independente.

Exemplu. Sistemul de evenimente E este format din patru puncte ale unui plan, reprezentate prin coordonatele lor carteziene, cu probabilitățile respective p_1, p_2, p_3, p_4 legate prin relațiile

$$p_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4); \quad p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1.$$

Variabilele aleatoare sînt coordonatele x și y; x are valorile 0,4 cu probabilitățile respective $p_1 + p_2 + p_3$, p_4 iar y are valorile 1, 2, k cu probabilitățile respective $p_1 + p_4$, p_2, p_3,

$$M[x] = 4p_4, \; M[y] = p_1 + p_4 + 2p_2 + kp_3.$$

În același timp,

$$P(x = 4, \; y = 1) = p_4; \quad P(x = 4, \; y = 2) = 0,$$
$$P(x = 4, \; y = 4) = 0.$$

Prin urmare, $M[xy] = 4p_4$. Urmează

$$\gamma = 4p_4 - 4p_4[p_1 + p_4 + 2p_2 + kp_3].$$

Este suficient ca $p_2 + (k - 1)\,p_3 = 0$, deci $k = 1 - \frac{p_2}{p_3}$, pentru a avea $\gamma = 0$, adică variabilele să fie necorelate.

În același timp, variabilele x și y nu sînt independente. În adevăr,

$$P(x = 0, \; y = 1) = p_1,$$

$$P(x = 0) = p_1 + p_2 + p_3, \; P(y = 1) = p_1 = p_4$$

și, în general,

$$p_1 \neq (p_1 + p_2 + p_3)\,(p_1 + p_4).$$

Definiție. *Coeficientul de corelație a variabilelor f, g este raportul*

$$r = \frac{M[(f - M[f])\,(g - M[g])]}{\sqrt{M_2[f - M[f]]}\,\sqrt{M_2[g - M[g]]}} = \frac{\gamma}{\mu_f \mu_g}. \tag{3}$$

Teoremă. *Pentru orice sistem de două variabile avem* $r^2 \leqslant 1$. Observăm că forma

$$M[\alpha(f - M[f]) + \beta(g - M[g])]^2 = \mu_f^2\alpha^2 + 2\gamma\alpha\beta + \mu_g^2\beta^2$$

este pozitivă; prin urmare,

$$r^2 < \mu_f^2 \mu_g^2,$$

deci

$$r^2 \leqslant 1.$$

Cînd $r = 0$, corelația este nulă.

Dacă $r^2 = 1$, luînd $\alpha = -r\mu_g$, $\beta = \mu_f$, rezultă

$$M[-r\mu_g(f - M[f]) + \mu_f(g - M[g])]^2 = 0,$$

de unde

$$-r\mu_g(f - M[f]) + \mu_f(g - M[g]) = 0.$$

Deci, cele două variabile sînt legate între ele printr-o relație liniară.

§ 7. Variabile aleatoare vectoriale pe un cîmp finit

1. Variabilele aleatoare care corespund mărimilor fizice pot fi nu numai scalare, ci și vectoriale.

Este deci necesar să definim și să studiem împreună cu variabilele scalare și pe cele vectoriale.

Fie S un spațiu vectorial și $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ un cîmp de probabilitate finit, pe care $e_1, e_2, \ldots, e_m$ sînt evenimentele elementare, cu probabilitățile respective $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Fie $V(\xi)$ o funcție cu valori în S, determinată pentru fiecare eveniment elementar $\xi = e_j (j = 1, 2, \ldots, m)$. Presupunem că $V_1, V_2, \ldots, V_r$ sînt cele $r (r \leqslant m)$ valori distincte ale vectorului V; $E_1, E_2, \ldots, E_r$ mulțimile pe care V ia valorile respective și $P_j = P(E_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ probabilitățile acestor evenimente. $E_1, E_2, \ldots, E_r$ este desfacerea corespunzătoare vectorului $V(\xi)$. Este evident că oricare ar fi numărul real sau complex a, vectorul aleator $aV(\xi)$ determină aceeași desfacere a lui E ca și $V(\xi)$.

Valoarea medie a vectorului aleator $V(\xi)$ este un vector

$$V = M[V] = \sum_{h=1,2,\ldots,r} P_h V_h. \qquad (1)$$

2. *Sume de vectori aleatori ai unui cîmp.* Fie $U(\xi)$ și $V(\xi)$ doi vectori aleatori, $U_1, U_2, \ldots, U_{r_1}$; $V_1, V_2, \ldots, V_{r_2}$ valorile pe care le iau în cîmp și $F_1, F_2, \ldots, F_{r_1}$; $E_1, E_2, \ldots, E_{r_2}$ desfacerile respective.

Prin definiție vectorul sumă

$$W(\xi) = U(\xi) + V(\xi)$$

este vectorul aleator care ia valoarea $U_j + V_k$ pentru evenimentul $F_j \cap E_k$. Rezultă imediat că

$$W = U + V.$$

Este evident că putem defini în același mod suma unui număr oarecare de vectori aleatori.

3. *Sume de vectori aleatori definiți pe cîmpuri independente.* Fie V^1 un vector aleator al cîmpului $\{E^1, \mathfrak{K}^1, P^1\}$ și V^2 un vector aleator al cîmpului $\{E^2, \mathfrak{K}^2, P^2\}$, $E_1^1, E_2^1, \ldots, E_{r_1}^1$; $E_1^2, E_2^2, \ldots, E_{r_2}^2$ respectivele desfaceri.

Construim cîmpul unic pe care sînt definiți cei doi vectori, și anume $\{E, \mathfrak{K}, P\}$, unde E este mulțimea evenimentelor elementare $e_j^1 e_k^2 (j = 1, 2, \ldots, r_1; k = 1, 2, \ldots, r_2)$; $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(E)$ mulțimea părților mulțimii E, iar $P(e_j^1 e_k^2) = P^1(e_j^1) P^2(e_k^2) = P_j^1 P_k^2$. Pe acest cîmp vectorul V^1, ale cărui valori sînt $V_1^1, V_2^1, \ldots, V_{r_1}^1$, determină desfacerea $E_1^1 E^2, E_2^1 E^2, \ldots, E_{r_1}^1 E^2$ cu probabilitățile respective $P(E_j^1 E^2) = P^1(E_j^1) P^2(E^2) = P_j^1 (j = 1, 2, \ldots, r_1)$, iar vectorul V^2, ale cărui valori sînt $V_1^2, V_2^2, \ldots, V_{r_2}^2$, determină desfacerea $E^1 E_k^2 (k = 1, 2, \ldots, r_2)$, cu probabilitățile respective $P(E^1 E_k^2) = P^1(E^1) P^2(E_k^2) = P_k^2$.

Am redus problema dată la aceea tratată mai sus, a sumei a doi vectori definiți pe același cîmp.

4. *Vectori aleatori independenți.* D e f i n i ț i e . Vectorii aleatori $V^j(\xi)$ sînt independenți în totalitatea lor dacă desfacerile corespunzătoare sînt independente $E_1^j, E_2^j, \ldots, E_{r_j}^j$.

5. *Momente.* Noțiunea de moment, începînd de la momentul de ordinul al doilea al unui vector are un sens restrîns.

D e f i n i ț i e . *Momentul de ordinul k al vectorului V al cîmpului* $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ *este egal cu momentul de ordinul k al variabilei aleatoare* $\| V \|$.

6. *Corelația între doi vectori* nu are sens pentru vectorii unui spațiu vectorial oarecare. Ea are sens numai dacă pe acest spațiu

este definit un produs scalar al celor doi vectori. Un spațiu vectorial pe care este definit un atare produs este spațiul Hilbert real, pentru care produsul scalar UV este un număr real, funcție liniară de U și de V și este simetric în raport cu U și V, iar

$$UU = < U,\ U > = \| U \|^2.$$

Produsul scalar UV este o variabilă aleatoare, ale cărei valori sînt $U_j V_k (j = 1, 2, \ldots, s;\ k = 1, 2, \ldots, s)$.

Momentul mixt al celor doi vectori este

$$M[UV] = \sum_{j,k} P(F_j \cap E_k)\ U_j V_k. \tag{2}$$

Corelația între cei doi vectori este

$$\gamma_{U,V} = M[(U - M[U])\ (V - M[V])]. \tag{3}$$

7. *Funcția caracteristică* a unui vector aleator V aparținînd unui spațiu Hilbert este definită ca media funcției $e^{i\theta V}$, unde θ este un vector generic al spațiului

$$\varphi(\theta) = M(e^{i\theta V}) = \sum_{h=1,2,\ldots,r} p_h\, e^{i\theta V_h}. \tag{4}$$

Prin definiție chiar

$$\varphi(\theta) = \sum_n \frac{i^n}{n!} \Sigma\, p_h (\theta V_h)^n. \tag{5}$$

8. *Poziția și viteza unei particule în mișcare browniană* sînt vectori aleatori în spațiul euclidian cu trei dimensiuni. Un spațiu euclidian, considerat ca spațiu vectorial, este un spațiu Hilbert. Norma unui vector V al acestui spațiu este lungimea lui, iar produsul scalar între doi vectori UV este produsul scalar obișnuit.

În spațiul euclidian cu trei dimensiuni, un vector aleator $V(\xi)$ este un sistem de trei variabile aleatoare $x(\xi)$, $y(\xi)$, $z(\xi)$ determinat pe cîmpul de probabilitate finit $\{E, \mathfrak{K}, P\}$.

Funcția caracteristică a vectorului $V(\xi)$ este

$$\varphi(\theta) = \varphi(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = \sum_h P_h\, e^{i(\alpha x_h + \beta y_h + \gamma z_h)}$$

cînd α, β, γ sînt componentele vectorului θ. Dezvoltînd în serie, avem

$$\varphi(\theta) = \sum_{n \in N} \frac{i^n}{n!} \sum_h P_h (\alpha x_h + \beta y_h + \gamma z_h)^n.$$

Se pun deci în evidență trei momente de ordinul întîi

$$M[x],\ M[y],\ M[z]$$

și șase momente de ordinul al doilea

$$M[x^2],\ M[y^2],\ M[z^2]$$

și

$$M[xy],\ M[yz],\ M[zx],$$

ultimele trei fiind momente mixte. Momentele de ordinul al doilea sînt deci coeficienții formei pătratice $\sum_h P_h(\alpha x_h + \beta y_h + \gamma z_h)^2$ definită pozitiv, al cărei determinant

$$\begin{vmatrix} M[x^2] & M[xy] & M[xz] \\ M[yx] & M[y^2] & M[yz] \\ M[zx] & M[zy] & M[z^2] \end{vmatrix}$$

este pozitiv — cu excepția unei împrejurări, pe care o lăsăm în atenția cititorului, în care determinantul poate fi nul.

Dacă presupunem $M(V) = 0$, momentele $M[xy]$, $M[yz]$, $M[zx]$ sînt corelații între componentele lui V. Ele se mai numesc corelații interne.

§ 8. Mișcări browniene și lanțuri de evenimente de tip Markov

1. *Exemplul lui Rayleigh.* Se consideră n poziții echidistante pe un cerc: $M_1, M_2, \ldots, M_n$ în ordinea naturală; după M_n urmează M_1.

Notăm cu p_j probabilitatea de a trece din M_j în M_{j+1} și cu q_j probabilitatea de a trece din M_j în M_{j-1} și presupunem că

$$p_j + q_j = 1.$$

Evenimentele cîmpului sînt trecerile unei particule mobile prin diferitele poziții $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

Presupunînd că avem un mare număr de particule a căror deplasare se face după regulile precedente, semnificația celor două probabilități p_j și q_j este următoarea:

Din cele $N_{j,n}$ particule care la momentul n se găsesc în poziția M_j, un număr de $p_j N_{j,n}$ trec în momentul următor în M_{j+1}, iar $q_j N_{j,n}$ trec în M_{j-1}.

Problema cea mai importantă care se pune imediat este aceea a *existenței unei distribuții limită staționară.*

Acest tip de mișcare, numit în genere mișcare browniană după modelul fizic clasic al acestei mișcări, poate fi indefinit variat. El își găsește o realizare probabilistă, în cazul unui sistem finit de evenimente, în lanțul de evenimente de tip Markov, pe care-l studiem sub cîteva aspecte în acest paragraf.

2. Fie $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ un cîmp finit de evenimente și x^n un șir de variabile aleatoare numerice sau vectoriale, definite pe acest cîmp pentru orice n, cînd $n=1, 2, 3, \ldots$. Notăm cu $E_1^n, E_2^n, \ldots, E_{r_n}^n$ desfacerea corespunzătoare variabilei x^n, cu $x_1^n, x_2^n, \ldots, x_{r_n}^n$ valorile distincte pe care le ia x^n pentru evenimentele respective.

Să notăm, pentru prescurtare,

$$E_{j_1 j_2 \ldots j_n} = E_{j_1}^1 \cap E_{j_2}^2 \cap \ldots \cap E_{j_n}^n.$$

Definiții. Probabilitatea condiționată $P_{E_{j_1}, \ldots, E_{j_n}^n}(E_{j_n})$ depinde de succesiunea de evenimente $E_{j_1}^1, E_{j_2}^2, \ldots, E_{j_n}^n$. Celei mai generale dependențe astfel definită îi corespunde un lanț de evenimente sau de variabile aleatoare $x^1, x^2, \ldots, x^n \ldots$ în toată generalitatea sa.

Dacă $P_{E_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}}}(E_{j_n}^n) = P(E_{j_n}^n)$ pentru orice n și orice șir $E_{j_1}^1, E_{j_2}^2, \ldots, E_{j_n}^n$ atunci șirul este o simplă succesiune de variabile independente. Șirul constituie un lanț Markov simplu dacă

$$P_{E_{j_1 j_2 \ldots j_{n-1}}}(E_{j_n}^n) = P_{E_{j_{n-1}}^{n-1}}(E_{j_n}^n) \tag{1}$$

pentru orice n și orice succesiune $E_{j_1}^1, E_{j_2}^2, \ldots, E_{j_n}^n$. Șirul constituie un lanț Markov multiplu de ordinul al doilea dacă

$$P_{E_{j_1 j_2 \ldots j_{n-1}}}(E_{j_n}^n) = P_{E_{j_{n-2}}^{n-2} \cap E_{j_{n-1}}^{n-1}}(E_{j_n}^n). \tag{2}$$

Lanțurile Markov multiple de ordinul p se definesc prin dependența probabilității unui eveniment la momentul n de cele p evenimente anterioare.

3. Relația caracteristică a lanțului Markov simplu este reprezentată de egalitățile

$$P_{E_{j_l}^l}(E_{j_n}^n) = \sum_{j_m} P_{E_{j_l}^l}(E_{j_m}^m)\, P_{E_{j_m}^m}(E_{j_n}^n) \tag{3}$$

pentru orice $l < m < n$.

Vom stabili această egalitate funcțională, demonstrînd mai întîi următoarea egalitate constructivă

$$P_{E_{j_l}^l}(E_{j_{l+r}}^{l+r}) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}} P_{E_{j_l}^l}(E_{i_1}^{l+1})\, P_{E_{i_1}^{l+1}}(E_{i_2}^{l+2}) \ldots P_{E_{i_{r-1}}^{l+r-1}}(E_{j_{l+r}}^{l+r}). \tag{4}$$

În adevăr,

$$P_{E_{j_l}^l}(E_{j_{l+r}}^{l+r}) = \frac{P(E_{j_l}^l \cap E_{j_{l+r}}^{l+r})}{P(E_{j_l}^l)}. \tag{5}$$

Dar

$$P(E_{j_l}^l \cap E_{j_{l+r}}^{l+r}) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}} P(E_{j_l}^l \cap E_{i_1}^{l+1} \cap \ldots \cap E_{i_{r-1}}^{l+r-1} \cap E_{j_{l+r}}^{l+r}).$$

Aplicînd formula (4), § 2 și ținînd seama că lanțul este simplu rezultă

$$P(E_{j_l}^l \cap E_{j_{l+r}}^{l+2}) =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}} P(E_{j_l}^l)\, P_{E_{j_l}^l}(E_{i_1}^{l+1})\, P_{E_{i_1}^{l+1}}(E_{i_2}^{l+2}) \ldots P_{E_{i_{r-1}}^{l+r-1}}(E_{j_{l+r}}^{l+r}).$$

Înlocuind această expresie în (5), obținem egalitatea (4) căutată.

Din (4), care se mai poate scrie

$$P_{E_{j_l}^l}(E_{j_{l+r}}^{l+r}) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}}^{1, 2, \ldots, m} P_{E_{j_l}^l}(E_{i_1}^{l+1})\, P_{E_{i_1}^{l+1}}(E_{i_2}^{l+2}) \ldots$$

$$\ldots P_{E_{i_{s-1}}^{l+s-1}}(E_{i_s}^{l+s}) \sum_{i_s, \ldots, i_{r-1}}^{1, 2, \ldots, m} P_{E_{i_s}^{l+s}}(E_{i_{s+1}}^{l+s+1}) \ldots P_{E_{i_{r-1}}^{l+r-1}}(E_{j_{l+r}}^{l+r}),$$

găsim

$$P_{E_{j_l}^l}(E_{j_{l+r}}^{l+r}) = \sum_{i_s} P_{E_{j_l}^l}(E_{i_s}^{l+s})\, P_{E_{i_s}^{l+s}}(E_{j_{l+r}}^{l+r}),$$

oricare ar fi s cuprins între 0 și r. Aceasta este chiar relația (3).

Lanțul Markov este propriu-zis dacă desfacerile sînt identice pentru fiecare n, $E_j^n = E_j$.

În acest caz, vom putea simplifica notațiile, scriind

$$P_{E_j^l}(E_k^n) = P_{jk}(l, n),$$

iar relațiile fundamentale (3) iau forma relației lui Chapman

$$P_{jk}(l, n) = \sum_{\substack{h=1,2,\ldots,r \\ (j,k=1,2,\ldots,r)}} P_{jh}(l, m)\, P_{hk}(m, n), \qquad (5')$$

unde r este numărul evenimentelor din fiecare desfacere sau numărul valorilor fiecăreia dintre variabilele aleatoare ale lanțului.

Probabilitatea condiționată $P_{E_j^l}(E_k^n) = P_{jk}(l, n)$ poartă încă numele de probabilitate de trecere de la evenimentul E_j în momentul l, la evenimentul E_k în momentul $n (n > l)$.

Deoarece

$$P_{jk}(l, l) = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k, \end{cases}$$

relațiile (5) sînt compatibile cu aceste valori și dacă $m = l$, sau $n = l$, sau încă $l = m = n$. Prin urmare, ele sînt valabile și pentru aceste cazuri.

Probabilitățile de trecere $P_{jk}(l, n)$ $(j, k = 1, 2, \ldots, r)$ sînt elementele unei matrici

$$P(l, n) = \| P_{jk}(l, n) \|, \qquad (6)$$

iar relațiile (5) se pot scrie

$$P(l, n) = P(l, m)\, P(m, n) \quad (l \leqslant m \leqslant n). \qquad (7)$$

Pentru determinarea matricii $P(l, n)$, oricare ar fi l și n, este necesar și suficient să fie date matricile

$$p(l) = P(l, l + 1) \quad (l = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (8)$$

Într-adevăr,

$$P(l, l + k) = p(l)\, p(l + 1) \ldots p(l + k - 1) \qquad (9)$$

deoarece din (7) rezultă că

$$P(l, l+k) = P(l, l+1)\, P(l+1, l+2), \ldots, P(l+k-1, l+k).$$

4. *Lanț Markov omogen sau permanent.* Un lanț Markov este omogen dacă probabilitățile de trecere depind numai de intervalul de timp $(n - l)$. Rezultă deci

$$P_{jk}(l, n) = P_{jk}(n - l).$$

Relațiile lui Chapman se scriu în acest caz

$$P_{jk}(n + m) = \sum_h P_{jh}(n)\, P_{hk}(m) \quad (j, k = 1, 2, \ldots, r), \qquad (10)$$

unde n și m sînt întregi, iar relația (7) devine

$$P(n + m) = P(n)\, P(m). \qquad (11)$$

În acest caz, lanțul este determinat de o singură matrice

$$p = P(l, l + 1) = P(1) \qquad (12)$$

și ne dă

$$P(n) = p^n (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (13)$$

5. *Proprietățile matricii fundamentale* p. Matricea p are ca elemente probabilitățile de trecere $p_{jk} = P_{jk}(1)$, cu proprietățile generale

$$p_{jk} \geqslant 0, \quad \sum_{k=1,2,\ldots,r} p_{jk} = 1. \qquad (14)$$

Ecuația caracteristică a matricii p

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} & \ldots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda & \ldots & p_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{r1} & p_{r2} & & p_{rr} - \lambda \end{vmatrix} \qquad (15)$$

are următoarele proprietăți

1°. $D(1) = 0$.

2°. $|\lambda| \leqslant 1$ pentru fiecare rădăcină λ a ecuației.

Prima proprietate este evidentă. Dacă în determinantul $D(\lambda)$ înlocuim pe λ cu 1, adunăm termenii tuturor coloanelor la cei ai coloanei întîi și ținem seama de (14), obținem zero pentru prima coloană.

Pentru a demonstra cea de-a doua proprietate observăm că, dacă $D(\lambda_j) = 0$, sistemul

$$p_{l1}x^1 + p_{l2}x^2 + \ldots + p_{lr}x^r = \lambda_j x^l (l = 1, 2, \ldots, r) \qquad (16)$$

este compatibil. Fie $x^1, x^2, \ldots, x^r$ o soluție a acestui sistem și x^k aceea dintre valorile $x^1, x^2, \ldots, x^r$, care are modulul maxim. Vom avea deci

$$\left| \frac{x^h}{x^k} \right| = \rho_k^h \text{ cu } |\rho_k^h| \leqslant 1 \quad (h = 1, 2, \ldots, r).$$

Dar atunci, folosind și (14),

$$|\lambda_j| \leqslant \sum_h p_{kh} \rho_k^h \leqslant \sum \rho_k^h = 1. \qquad (17)$$

Vom mai demonstra următoarea teoremă, privind rădăcinile al căror modul este egal cu unitatea.

Teoremă. *Rădăcinile ecuației $D(\lambda) = 0$ care au modulul egal cu 1 sînt rădăcinile unei ecuații binome $\lambda^s - 1 = 0$.*

Observăm că, presupunînd $|\lambda_j| = 1$, relația (17) se transformă în egalitatea

$$1 = \sum_h p_{hk} \rho_k^h,$$

de unde $\rho_k^h = 1$ pentu toți h pentru care $p_{kh} \neq 0$. Avem deci

$$|x_{h_1}| = |x_{h_2}| = \ldots = |x_{h_s}| = \rho.$$

Vom pune atunci

$$\lambda_j = e^{i\omega_j}, \; x_h = \rho\, e^{i\theta_h}, \; (h = h_1, h_2, \ldots, h_s).$$

Cu acestea, ecuațiile (16) devin

$$\sum_h p_{kh}\, e^{i\theta_h} = e^{i(\omega_j + \theta_k)}.$$

De aici rezultă

$$\sum_h p_{kh} \cos\theta_h = \cos(\omega_j + \theta_k),$$

$$\sum_h p_{kh} \sin\theta_h = \sin(\omega_j + \theta_k),$$

de unde deducem imediat

$$\sum_h p_{kh} \cos(\theta_h - \theta_k - \omega_j) = 1,$$

pentru fiecare h pentru care $p_{kh} \neq 0$.

Fie acum un ciclu posibil de evenimente $E_k, E_{h_1}, E_{h_2}, \ldots, E_{h_{s-1}}, E_k$ presupunînd că $h_1, h_2, \ldots, h_{s-1}$ sînt distincte între ele și distincte de k. Ciclul este posibil dacă $p_{kh_1} \neq 0$, $p_{h_1h_2} \neq 0$, $p_{h_2h_3} \neq 0, \ldots, p_{h_sk} \neq 0$. În acest caz sînt aplicabile ecuațiile

$$\theta_{h_1} = \theta_k - \omega_j = 2N_{kh}\pi; \quad \theta_{h_2}\theta_{h_1} - \omega_j = 2N_{h_1h_2}\pi, \ldots \qquad (18)$$
$$\ldots, \theta_k - \theta_{h_{s-1}} - \omega_j = 2N_{h_{s-1}k}\pi.$$

Adunînd membru cu membru aceste egalități, obținem

$$s\omega_j = 2N\pi.$$

Teorema este astfel demonstrată.

6. *Analiza sistemului de evenimente.* Ținînd seama de probabilitățile fundamentale p_{jk} vom putea despărți, în anume cazuri, sistemul $E_1, E_2, \ldots, E_r$ în subsisteme fără legătură unele cu altele, sau cu un anumit fel de legătură care urmează să fie precizată.

Sistem și matrici indecompozabile. Dacă, date fiind două evenimente oarecare ale sistemului E_j și E_k, există un șir de evenimente distincte de precedentele și distincte între ele, $E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_{l-1}}$, astfel că

$$p_{j_1j_1} p_{j_1j_2} \ldots p_{j_{l-1}k} \neq 0,$$

sistemul și matricea sînt indecompozabile.

Este evident că, în acest caz, există un ciclu pentru orice eveniment E_j, adică există o succesiune $E_j, E_{h_1}, E_{h_2}, \ldots, E_sE_j$ pentru care $p_{jh}p_{h_1h_2} \ldots p_{h_sj} \neq 0$, astfel că $E_{h_1}, E_{h_2}, \ldots, E_{h_s}, E_j$ sînt toate distincte între ele.

Într-adevăr, fie E_k un eveniment oarecare distinct de E_j. Fie $L_{jk}(E_j, E_{l_1}, \ldots, E_{l_k}E_k)$ unul dintre drumurile simple care duc de la E_j la E_k. Există, de asemenea, cel puțin un drum simplu L_{kj}, care duce de la E_k la E_j, eventual chiar drumul E_kE_j. Dacă L_{kj} și L_{jk} nu au nici un punct comun, succesiunea lor (L_{jk}, L_{kj}) constituie un ciclu pentru E_j. Dacă ele au evenimente comune în afară, bineînțeles, de E_j și E_k, fie E_{h_i} ultimul eveniment comun cu L_{jk} în drumul L_{kj}. În acest caz, succesiu-

nea drumurilor L_{jli}, L_{lij} este un ciclu. Este evident că acest ciclu se poate reduce la $E_jE_kE_j$.

Există cicluri în care se parcurg toate evenimentele cîmpului, însă în general, asemenea cicluri sînt simple.

Exemplu de sistem indecompozabil. Presupunem

$$p = \begin{Vmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & 0 & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & 0 \end{Vmatrix},$$

unde p_{12}, p_{13}, p_{21}, p_{23}, p_{31}, $p_{32} \neq 0$. În acest caz,

$$D(\lambda) \equiv -\lambda^3 + (p_{12}p_{21} + p_{23}p_{32} + p_{31}p_{13})\lambda + p_{13}p_{21}p_{32} + p_{12}p_{23}p_{31}.$$

Cele trei rădăcini sînt

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a}$$

cu

$$a = 1 - p_{13} - p_{21} - p_{32} + p_{21}p_{32} + p_{13}p_{32} + p_{13}p_{21}.$$

Ţinînd seama că $p_{12} + p_{13} = 1$, $p_{21} + p_{23} = 1$, $p_{31} + p_{32} = 1$, rezultă că $|\lambda_2| < 1$, $|\lambda_3| < 1$.

Sistem decompozabil. Sistem separat. Sistem final. Sistem de trecere. Dacă condiţiile precedente nu sînt îndeplinite, sistemul este decompozabil. Iată un exemplu: avem şapte evenimente E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7. Probabilităţile de trecere formează matricea

$$p = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{54} & p_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{64} & p_{65} & p_{66} & p_{67} \\ 0 & 0 & 0 & p_{74} & p_{75} & p_{76} & p_{77} \end{Vmatrix},$$

unde probabilităţile care figurează ca atare sînt toate diferite de zero.

Sistemul este decompozabil.

În general, dacă p este decompozabilă, putem da evenimentelor o ordine convenabilă, astfel ca matricea p să prezinte următoarea formă canonică

$$\begin{Vmatrix} p_1 & 0 & 0 \dots 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \dots 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \quad 0 & p_{l-1} & 0 \\ q_1 & q_2 & \dots \quad q_{l-2} & q_{l-1} & p_l \end{Vmatrix},$$

unde p_1, p_2, ..., p_{l-1}, p_l sînt matrici indecompozabile, iar q_1, q_2, ..., q_{l-1} sînt matrici care nu sînt toate nule.

Evenimentele care corespund uneia dintre matricile p_j, ($j = 1, 2, \dots, l-1$) constituie un sistem separat sau un sistem final, după cum matricea q_j corespunzătoare este nulă sau nu.

Evenimentele care corespund matricii p_l, dacă există sisteme finale, constituie un sistem de trecere. În exemplul precedent, evenimentele E_1, E_2, E_3 constituie un sistem izolat: probabilitatea de trecere de la unul dintre aceste evenimente la altul, sau reciproc, este nulă. Sistemul E_4, E_5, fără să fie izolat, este final. Probabilitatea de a ieşi din acest sistem este nulă, dar există probabilităţi de intrare diferite de zero ca, de exemplu, p_{64}, p_{65}, p_{74}, p_{75}.

Sistemul E_6, E_7 este numai un sistem de trecere. Există şi probabilităţi de intrare şi probabilităţi de ieşire din sistem.

Se poate demonstra că probabilitatea de a rămîne indefinit într-un sistem final este diferită de zero, iar probabilitatea de a rămîne într-un sistem de trecere este nulă.

Decompozabilităţii matricii p îi corespunde o descompunere a lui $D(\lambda)$. De exemplu, în cazul matricii precedente, avem

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} - \lambda \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} p_{44} - \lambda & p_{45} \\ p_{54} & p_{55} - \lambda \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p_{66} - \lambda & p_{67} \\ p_{76} & p_{77} - \lambda \end{vmatrix} = D_1(\lambda)\, D_2(\lambda)\, D_3(\lambda).$$

Ecuațiile $D_1(\lambda) = 0$, $D_2(\lambda) = 0$, care corespund sistemelor izolate sau finale, au proprietățile corespunzătoare unei matrici indecompozabile.

Ecuația $D_3(\lambda) = 0$, corespunzătoare sistemului de trecere, nu are rădăcini cu modul egal cu unitatea.

Observație. Alte criterii de clasificare se pot găsi în volumul *Lanțuri Markov finite cu aplicații* (Editura Tehnică, 1977) de Marius Iosifescu.

7. *Problema ergodică pentru sistemele indecompozabile.* Problema comportării probabilităților $P_{jk}(n)$ pentru $n \to \infty$ este numită și problema ergodică. Cel mai simplu dintre modurile de comportare a probabilităților $P_{jk}(n)$ pentru $n \to \infty$ este convergența către o limită.

$$\lim_{n\to\infty} P_{jk}(n) = P_{jk} \quad (j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ r). \tag{19}$$

Același lucru se scrie mai simplu

$$\lim_{n\to\infty} p^n = P, \tag{20}$$

P fiind matricea ai cărei termeni sînt P_{jk}. Este evident că

$$P = \lim p^{n+1} = \lim p\ p^n = p \lim p^n = pP \tag{21}$$

și tot astfel

$$P = Pp.$$

Prin urmare, dacă există, limita P verifică ambele relații

$$P = Pp, \quad P = pP. \tag{22}$$

Prima dintre cele două relații ne dă ecuațiile

$$P_{jk} = \sum_h p_{jh} P_{hk} \quad (j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ r), \tag{23}$$

iar cea de a doua ne dă

$$P_{jk} = \sum_h P_{jk} p_{hk}. \tag{24}$$

Al doilea sistem de ecuații se scrie explicit

$$\left.\begin{aligned} (p_{11} - 1)\ P_{j1} + p_{21} P_{j2} + \ldots + p_{r1} P_{jr} &= 0 \\ p_{12} P_{j1} + (p_{22} - 1)\ P_{j2} + \ldots + p_{r2} P_{jr} &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ p_{1r} P_{j1} + p_{2r} P_{j2} + \ldots + (p_{rr} - 1)\ P_{jr} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Determinantul sistemului (24) este $[D(\lambda)]_{\lambda=1} = 0$, deci sistemul este compatibil.

Să observăm că $\lambda = 1$ este o rădăcină simplă a ecuației $D(\lambda) = 0$, deci $\left(\frac{dD}{d\lambda}\right)_{\lambda=1} \neq 0$. Deoarece

$$\left(\frac{dD(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=1} = \sum_j \pi_j,$$

unde π_j este minorul elementului $p_{jj} - 1$ în determinantul $D(1)$, urmează că cel puțin unul dintre minorii π_j este diferit de 0. Fie, de exemplu, $\pi_r \neq 0$. Rezultă atunci că primele $r - 1$ ecuații (25) ne dau

$$P_{jk} = \lambda_k P_{jr} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ r - 1) \tag{26}$$

unde $\lambda_k = \frac{Q_k}{\pi_r}$ iar Q_k sînt diferiții determinanți ai coeficienților din primele $r - 1$ ecuații ale sistemului (25); $\lambda_k (k = 1,\ 2,\ \ldots\ \ldots,\ r - 1)$ nu depind de j, deci P_{jk} nu depind de j.

Completăm sistemul (26) prin condiția $\sum_1^r{}_k P_{jk} = 1$ și obținem

$$\left(\sum_1^{r-1}{}_k \lambda_k + 1\right) P_{jr} = 1.$$

Sîntem în ipoteza (19), deci P_{jr} există, prin urmare,

$$1 + \sum_1^{r-1}{}_k \lambda_k \neq 0,$$

$$P_{jr} = \frac{1}{1 + \sum \lambda_k}. \tag{27}$$

Membrul al doilea nu depinde de j, deci P_{jr} nu depinde de j, deci ținînd seama de (26)

$$\lim P_{jk}(n) = P_{jk} = P_k. \tag{28}$$

Dacă limita probabilităților $P_{jk}(n)$ există, această limită *este independentă de starea inițială* j.

Lanțul este în acest caz ergodic. $P_{jk}(n)$ are pentru fiecare k o limită care nu depinde de evenimentul inițial. Aceste relații ale sistemului (25) verifică automat ecuațiile (23).

8. *Metodă operațională pentru examinarea existenței limitei.* Matricea p poate fi considerată ca un *operator* în transformarea liniară

$$x' = px,$$

unde x și x' sînt vectori. Rădăcinile ecuației caracteristice $D(\lambda) = 0$ sînt valorile proprii ale operatorului, deci valorile pentru care

$$px = \lambda x.$$

Am arătat că aceste valori au modulul mai mic sau egal cu unitatea. Conform unei cunoscute teoreme de algebră, vom avea

$$P_{jk}(n) = \sum_h \frac{1}{(\nu_h - 1)!} \frac{d^{\nu_h - 1}}{\partial \lambda^{\nu_h - 1}} \left[\frac{\lambda^n D_{jk}(\lambda)}{\psi_h(\lambda)} \right]_{\lambda = \lambda_h}, \tag{29}$$

unde $D_{ik}(\lambda)$ este minorul elementului din linia k și coloana j în $D(\lambda)$ și

$$\psi_h(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{(\lambda - \lambda_h)^{\nu_h}},$$

ν_j fiind ordinul de multiplicitate al rădăcinii λ_j,

$$D(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{\nu_1} (\lambda_2 - \lambda)^{\nu_2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{\nu_s}.$$

Rădăcinile al căror modul este 1 sînt simple, deci vom putea separa în formula (29) aceste rădăcini de cele al căror modul este mai mic decît 1,

$$P_{jk}(n) = \frac{D_{jk}(1)}{D'(1)} + \lambda_2^n \frac{D_{jk}(\lambda_2)}{D'(\lambda_2)} + \dots + \lambda_k^n \frac{D_{jk}(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)} + H_{jk}(n), \tag{30}$$

unde $|H_{jk}(n)| \to 0$ cînd $n \to \infty$.

Formula (30) ne dă următorul rezultat asupra comportării asimptotice a probabilităților $P_{jk}(n)$:

dacă $\lambda_1 = 1$ este singura rădăcină cu modulul egal cu 1, avem

$$\lim_{n \to \infty} P_{jk}(n) = \frac{D_{jk}(1)}{D'(1)};$$

dacă există și alte rădăcini cu modulul egal cu 1, $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k$, atunci $P_{jk}(n)$ este, asimptotic, o sumă de termeni periodici de n.

9. *Teorema lui M. Fréchet.* Din (30) rezultă imediat teorema lui M. Fréchet de convergență în medie a probabilităților $P_{jk}(n)$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_1^n P_{jk}(n) = P_k$$

sau încă

$$\lim_{n \to \infty} \sum_1^n p^l = P,$$

care este o teoremă ergodică pentru operatorul p.

10. *Mișcarea lui Rayleigh.* Matricea p în exemplul lui Rayleigh este

$$p = \begin{Vmatrix} 0 & p_1 & 0 & \dots & 0 & q_1 \\ q_2 & 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q_3 & 0 & p_3 & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & q_{n-1} & 0 & p_{n-1} \\ p_n & 0 & \dots & & 0 & q_n & 0 \end{Vmatrix}.$$

Sistemul de evenimente este indecompozabil dacă $p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_n q_n \neq 0$.

Tocmai din această condiție rezultă că evenimentele sistemului pot constitui un ciclu unic. Prin urmare, dacă există rădăcini al căror modul este 1, ele sînt și rădăcini ale ecuației $\lambda^n - 1 = 0$, deci sînt rădăcinile comune între ecuațiile $\lambda^n - 1 = 0$, $D(\lambda) = 0$.

Dacă, în particular, $n-1$ este un număr prim, deci $\frac{\lambda^n-1}{\lambda-1}$ este un polinom indecompozabil și el nu poate avea o rădăcină comună cu $\frac{D(\lambda)}{\lambda-1}$ fără a fi identic cu acest polinom. Prin urmare, $D(\lambda)\equiv(-1)^n(\lambda^n-1)$. Ar rezulta atunci că

$$D(0)=(-1)^{n+1},$$

ceea ce este imposibil. Deci p^N are o limită determinată cînd $N\to\infty$.

11. *Lanț constant. Lanț periodic.*

D e f i n i ț i e. *Un lanț Markov este constant dacă matricea sa, considerată ca operator, este idempotentă,*

$$p^r=p.$$

Lanțul este periodic dacă există un întreg $m>2$ pentru care

$$p^m=p.$$

Un exemplu de lanț constant este dat de matricea p cu m linii egale

$$p_{ik}=p_k.$$

Un exemplu de lanț periodic este dat de matricea formată din 0 și 1,

$$p=\begin{Vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{Vmatrix},$$

pentru care avem $p^q=p$.

În primul caz, presupunem

$$p=\begin{Vmatrix}p_1&p_2&p_3\\p_1&p_2&p_3\\p_1&p_2&p_3\end{Vmatrix};\quad p_1>0,\ p_2>0,\ p_3>0;\ p_1+p_2+p_3=1.$$

Avem

$$D(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1).$$

Potrivit formulei lui Perron, ținînd seama că $\lambda=0$ este o rădăcină dublă, avem

$$P_{jk}(n)=\frac{D_{jk}(1)}{D'(1)}+\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[\frac{\lambda^n D_{jk}(\lambda)}{\lambda-1}\right]\right\}_{\lambda=0}.$$

Se obține, efectuînd calculele, $P_{jk}(n)=p_k(k=1,\ 2,\ 3)$. Pentru lanțul periodic, $D(\lambda)=1-\lambda^3$. Cele trei rădăcini sînt simple și toate cu modulul egal cu 1: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $\lambda_3=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

În acest caz, probabilitățile $P_{jk}(n)$ sînt periodice,

$$P_{jk}(n)=\frac{D_{jk}(1)}{D'(1)}+e^{\frac{2n\pi}{3}i}\frac{D_{jk}(\lambda_2)}{D'(\lambda_2)}+e^{-\frac{2n\pi}{3}i}\frac{D_{jk}(\lambda_3)}{D'(\lambda_3)}.$$

Obținem, de exemplu, valorile

$$P_{jj}(n)=\frac{1}{3}\left[1+2\cos\frac{2n\pi}{3}\right].$$

§ 9. Reversibilitatea și stabilitatea proceselor Markov

1. *Reversibilitatea proceselor dinamice nu este o caracteristică proprie acestor procese.* Procesele în lanț sînt de asemenea reversibile. Dar forma specific aleatoare în care această reversibilitate funcționează este diferită de forma ei dinamică, rigidă. În dinamică, traiectoriile mișcării sînt aceleași, sensul lor de parcurs diferă. Într-un proces înlănțuit, lanțul însuși se schimbă. Ceea ce rămîne este numai caracterul de lanț simplu care indică legătura de la eveniment la eveniment.

Probabilitatea cauzelor urmează același fel de lege stochastică ca și probabilitatea efectelor. Nu aceeași lege, dar același tip de lege. Dacă trecerea la efecte se face cu probabilitățile unui lanț Markov simplu, trecerea de la efecte la cauze se face de asemenea cu probabilitățile unui lanț Markov simplu, diferite în general de primele.

Fără a avea rigiditatea reversibilității dinamice, procesul în lanț îngăduie cercetarea statistică a cauzelor, deci explicarea fenomenelor corespunzătoare.

Problema reversibilității unui proces stochastic a fost rezolvată pozitiv, aproape în aceeași vreme, de A. N. Kolmogorov pentru lanțurile continue și de Gh. Mihoc, împreună cu autorul acestei cărți, pentru lanțurile cu timpi discontinui. Studii aprofundate, îndeosebi pentru lanțurile continue, au fost efectuate de Potoček și în special de A. M. Iaglom.

Ne mărginim aici să prezentăm teorema reversibilității în cazul timpului discontinuu, precum și legătura între reversibilitatea și stabilitatea unui atare proces în cazul lanțului Markov simplu, rezervînd un alt paragraf pentru lanțurile multiple.

2. *Lanțul invers unui lanț dat.* Fie $E^n_{l_n}(n = 1, 2, \ldots; l_n = 1, 2, \ldots, m)$ o succesiune de evenimente ale unui lanț Markov simplu.

Vom avea, aplicînd formula (4), § 2, și ținînd seama că evenimentele formează un lanț Markov simplu,

$$P(E^n_{l_n} \cap E^{n+1}_{l_{n+1}} \cap E^{n+1}_{l_{n+2}}) = P(E^n_{l_n})\, P_{E^n_{l_n}}(E^{n+1}_{l_{n+1}})\, P_{E^{n+1}_{l_{n+1}}}(E^{n+2}_{l_{n+2}}).$$

De asemenea, prin aplicarea aceleiași formule,

$$P(E^n_{l_n} \cap E^{n+1}_{l_{n+1}} \cap E^{n+2}_{l_{n+2}}) = P(E^{n+2}_{l_{n+2}})\, P_{E^{n+2}_{l_{n+2}}}(E^{n+1}_{l_{n+1}})\, P_{E^{n+1}_{l_{n+1}} \cap E^{n+2}_{l_{n+2}}}(E^n_{l_n}).$$

Deci,

$$P(E^{n+2}_{l_{n+2}})\, P_{E^{n+2}_{l_{n+2}}}(E^{n+1}_{l_{n+1}})\, P_{E^{n+1}_{l_{n+1}} \cap E^{n+2}_{l_{n+2}}}(E^n_{l_n}) =$$

$$= P(E^n_{l_n})\, P_{E^n_{l_n}}(E^{n+1}_{l_{n+1}})\, P_{E^{n+1}_{l_{n+1}}}(E^{n+2}_{l_{n+2}}). \tag{1}$$

În același mod, printr-o dublă aplicare a formulei (4), § 2, probabilității $P(E^{n+1}_{l_{n+1}} \cap E^{n+2}_{l_{n+2}})$, obținem egalitatea

$$P(E^{n+2}_{l_{n+2}})\, P_{E^{n+2}_{l_{n+2}}}(E^{n+1}_{l_{n+1}}) = P(E^{n+1}_{l_{n+1}})\, P_{E^{n+1}_{l_{n+1}}}(E^{n+2}_{l_{n+2}}). \tag{2}$$

Divizînd membru cu membru în (1) și (2), găsim

$$P_{E^{n+1}_{l_{n+1}} \cap E^{n+2}_{l_{n+2}}}(E^n_{l_n}) = \frac{P(E^n_{l_n})\, P_{E^n_{l_n}}(E^{n+1}_{l_{n+1}})}{P(E^{n+1}_{l_{n+1}})}. \tag{3}$$

Este deci evident că membrul al doilea nu depinde de $E^{n+2}_{l_{n+2}}$, de unde

$$P_{E^{n+1}_{l_{n+1}} \cap E^{n+2}_{l_{n+2}}}(E^n_{l_n}) = P_{E^{n+1}_{l_{n+1}}}(E^n_{l_n}). \tag{4}$$

Deci, procesul invers este de asemenea un proces Markov simplu. Rămîne să arătăm că nu este degenerat, deci că membrul al doilea din (3) depinde efectiv de $E^{n+1}_{l_{n+1}}$. Presupunem că nu ar fi așa. Atunci raportul

$$\frac{P_{E^n_{l_n}}(E^{n+1}_{l_{n+1}})}{P(E^{n+1}_{l_{n+1}})} = \lambda \tag{5}$$

nu depinde de $E^{n+1}_{l_{n+1}}$. Deci, dacă în egalitatea

$$P_{E^n_{l_n}}(E^{n+1}_{l_{n+1}}) = \lambda P(E^{n+1}_{l_{n+1}})$$

însumăm în ambii membri în raport cu l_{n+1}, obținem

$$\sum_{l_{n+1}=1,2,\ldots,m} P_{E^n_{l_n}}(E^{n+1}_{l_{n+1}}) = \lambda \sum_{l_{n+1}=1,2,\ldots,m} P(E^{n+1}_{l_{n+1}}),$$

de unde

$$1 = \lambda;$$

aceasta ar însemna, însă, ținînd seama de (5) că

$$P_{E^n_{l_n}}(E^{n+1}_{l_{n+1}}) = P(E^{n+1}_{l_{n+1}}),$$

deci însuși lanțul originar ar fi degenerat.

Deci, pentru probabilitățile lanțului invers, ținînd seama de (3) și notînd

$$P_{E^{n+1}_{l_{n+1}}}(E^n_{l_n}) = P^*_{h,k}(n+1,\ n)\ (h = l_{n+1},\ k = l_n) \tag{6}$$

vom avea relația

$$P^*_{h,k}(n+1,\ n) = \frac{P(E_k)}{P(E_h)} P_{k,n}(n,\ n+1), \tag{7}$$

presupunînd, bineînțeles, că $P(E_h) \neq 0$ pentru $h = 1, 2, \ldots, m$.

3. *Stabilitatea procesului. Familia de lanțuri ale unui proces.* Considerăm un proces Markov simplu ca fiind determinat de matricele probabilităților de trecere $p_{h,k}\ (n, n+1)$. Probabilitățile absolute ale diferitelor evenimente $P(E^n_h) = P^{(n)}_h$ sînt determinate de probabilitățile inițiale $P^{(0)}_h (h = 1, 2, \ldots, m)$ prin legea de recurență:

$$P^{(n+1)}_h = \sum_{j=1,2,\ldots,m} P^{(n)}_j p_{jh}(n,\ n+1)\ (h = 1, 2, \ldots, m). \tag{8}$$

Valorile $P_h^{(0)}$ sînt arbitrare, în afară de condițiile generale

$$P_h^{(0)} \geqslant 0, \sum_{h=1,2,\ldots,m} P_h^{(0)} = 1.$$

Pentru fiecare sistem $P_h^{(0)} (h = 1, 2, \ldots, m)$ avem un lanț determinat. Se pune problema de a determina, în familia de lanțuri astfel caracterizată, lanțurile stabile care se pot împărți în două categorii

a) Lanțurile invariante, pentru care

$$P_h^{(n)} = P_h^{(0)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m;\ n = 1, 2, \ldots)$$

b) Lanțurile periodice, pentru care există un N astfel că

$$P_h^l = P_h^n (h = 1, 2, \ldots, m), \quad \text{dacă} \quad l - n = RN.$$

Această problemă a fost studiată sub un aspect diferit în cazul procesului omogen. cînd, deci,

$$p_{jk}(n,\ n+1) = p_{jk}(0,\ 1) = p_{jk} \quad (j,\ k = 1, 2, \ldots, m)$$

sînt independente de n.

Relația (8) devine în acest caz

$$P_h^{(n+1)} = \Sigma\ P_j^{(n)} p_{jh} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

de unde rezultă că

$$P_h^{(n)} = \sum_j P_j^{(0)} p_{jh}^{(n)}, \tag{9}$$

$p_{jh}^{(n)}$ fiind elementele matricii $p^{(n)} = \| p_{jh} \|^n$.

Pentru a da unele rezultate precise, vom presupune că sistemul de evenimente care participă la proces este final și vom considera două cazuri

a) Singura rădăcină de modul egal cu 1 a ecuației caracteristice $D(\lambda) = 0$ este $\lambda = 1$.

În acest caz,

$$\lim_{n\to\infty} p_{jh}^{(n)} = \Pi_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Relația (9) ne dă atunci

$$\lim_{n\to\infty} P_h^{(n)} = \Pi_h \sum_j p_j^{(0)} = \Pi_h.$$

Deoarece

$$\Pi_h = \sum_j \Pi_j p_{jh},$$

lanțul pentru care $p_j^{(0)} = \Pi_j\ (j = 1, 2, \ldots, m)$ este invariant, deci stabil, și în același timp este lanțul către care tind asimptotic toate celelalte.

b) Există o singură rădăcină simplă egală în modul cu 1, în afară de 1; fie această rădăcină $\lambda = e^{i\theta}$ cu $\theta = \frac{2\pi}{k}$. Potrivit formulei (30) folosită de mai multe ori, relația (9) devine

$$P_h^{(n)} = \sum_j P_j^{(0)} \left[\frac{1}{D'(1)} D_{hj}(1) + e^{in\theta} \frac{1}{D(e^{i\theta})} D_{hj}(e^{i\theta}) + H_{jh}(n) \right],$$

unde $H_{jh}(n) \to 0$ cînd $n \to \infty$.

Oricare dintre lanțuri este deci asimptotic unui lanț periodic corespunzător

$$\Pi_h^{(n)} = \sum_j P_j^{(0)} \left[\frac{1}{D(1)} D_{hj}(1) + e^{in\theta} \frac{1}{D'(e^{i\theta})} D_{hj}\ (e^{i\theta}) \right],$$

care de asemenea aparține familiei, după cum se verifică imediat. Dacă $P_j^{(0)}$ verifică sistemul evident compatibil,

$$\sum_j P_j^{(0)} D_{hj}(e^{i\theta}) = 0,$$

lanțul este asimptotic lanțului constant ale cărui probabilități absolute sînt egale cu

$$\frac{1}{D'(1)} \sum_j P_j^{(0)} D_{hj}(1).$$

În general, probabilitățile elementare p_{jk}^n ale unui lanț variabil nu sînt distribuite fără nici o regulă. Variația cu n a acestor probabilități urmează anumite legi și, în genere, are o anumită uniformitate. Cazul cel mai important și cu relații mai strînse cu aplicațiile este acela în care există o periodicitate

$$p_{jk}^n = p^{hT+n}$$

unde T este perioada

$$0 \leqslant n \leqslant T.$$

În foarte multe împrejurări se presupune doar o anumită uniformitate asimptotică.

Semnalăm aici numai cazul în care există un număr pozitiv α, pentru care

$$p_{jk}^{n} \geq \alpha > 0 \tag{10}$$

pentru orice m, oricare ar fi j și k.

Teoremă. *Dacă condiția* (10) *este îndeplinită, lanțul este ergodic în sensul că*

$$\lim_{n\to\infty} |P_{jk}(n) - P_{hk}(n)| = 0, \tag{11}$$

cu j, h, k *oarecare.*

§ 10. Clasificarea stărilor unui lanț Markov pe baza grafului asociat

1. *Relația de echivalență și de ordine.* Fie X o mulțime arbitrară. Printr-o relație $\mathcal{R}$ pe mulțimea X se înțelege o parte a produsului cartezian $X \times X$. Faptul că x este în relația $\mathcal{R}$ cu y va fi scris $x\mathcal{R}y$.

Relația $\mathcal{R}$ se numește reflexivă dacă $x\mathcal{R}x$ pentru orice $x \in X$.

Relația $\mathcal{R}$ se numește simetrică dacă $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

Relația $\mathcal{R}$ se numește antisimetrică dacă $x\mathcal{R}y$ și $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$.

Relația $\mathcal{R}$ se numește tranzitivă dacă $x\mathcal{R}y$ și $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Definiția 1. *O relație $\mathcal{R}$ pe mulțimea X se numește de echivalență dacă este reflexivă, tranzitivă și simetrică.*

Relația de echivalență $\mathcal{R}$ împarte spațiul X în clase de echivalență; clasa de echivalență a elementului x fiind

$$\hat{x} = \{y : y \in X,\ x\mathcal{R}y\}.$$

Mulțimea claselor de echivalență va fi notată cu $\hat{X}$ sau cu $X/\mathcal{R}$.

Relația de egalitate și relația de congruență în mulțimea numerelor întregi sînt relații de echivalență.

Definiția 2. *O relație $\mathcal{T}$ reflexivă și tranzitivă se numește de ordine slabă.*

Definiția 3. *O relație $\mathcal{T}$ se zice consistentă în raport cu o relație de echivalență $\mathcal{R}$ dacă, pentru orice $x\mathcal{R}y$, avem*

$$x\mathcal{T}z \Rightarrow y\mathcal{T}z \quad \text{și} \quad z\mathcal{T}x \Rightarrow z\mathcal{T}y.$$

Propoziția 1. *Fiind dată o relație de ordine slabă $\mathcal{T}$, relația $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$ definită prin*

$$x\mathcal{R}_{\mathcal{T}}y \Leftrightarrow \begin{cases} x\mathcal{T}y \\ y\mathcal{T}x \end{cases}$$

este o relație de echivalență în raport cu care $\mathcal{T}$ este consistentă.

Această relație de echivalență împarte spațiul în clase de echivalență.

În mulțimea claselor de echivalență putem introduce următoarea relație nouă $\mathcal{T}^*$

$\hat{x}\mathcal{T}^*\hat{y}$ dacă există $x \in \hat{x}$ și $y \in \hat{y}$ astfel ca $x\mathcal{T}y$.

Se vede că relația $\mathcal{T}^*$ este tranzitivă, reflexivă și antisimetrică. Să punem în evidență de exemplu antisimetria:

Să presupunem că există $x_1\mathcal{T}y_1$ și $y_2\mathcal{T}x_2$ cu $x_1, x_2 \in \hat{x}$ iar $x_1\mathcal{R}_{\mathcal{T}}x_2$ și $y_1\mathcal{R}_{\mathcal{T}}y_2$. Deoarece $\mathcal{T}$ este consistentă în raport cu $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$ avem $x_1\mathcal{T}y_1$ și $y_1\mathcal{T}x_1$, adică x_1, y_1 aparțin aceleiași clase de echivalență.

Definiția 4. *a este un element minimal în raport cu $\mathcal{T}$ dacă $a\mathcal{T}x \Rightarrow a = x$.*

Evident într-o mulțime finită înzestrată cu o relație de ordine parțială există cel puțin un element minimal.

Pentru cele ce urmează avem nevoie de următoarea propoziție.

Propoziția 2. *O mulțime A de numere întregi și pozitive închisă față de adunare conține aproape toți multiplii celui mai mare divizor comun al elementelor mulțimii.*

Demonstrație. Fie d cel mai mare divizor comun. Putem presupune $d = 1$; altfel împărțim toate elementele cu d. Evident, există un număr finit de elemente care au ca cel mai mare divizor comun pe 1. Atunci există $x_1, x_2, \ldots, x_h \in Z$ astfel ca

$$x_1a_1 + \ldots + x_ka_k = 1$$

sau

$$(x_{i_1}a_{i_1} + \ldots + x_{i_p}a_{i_p}) - (-x_{i_{p+1}}a_{i_{p+1}} - \ldots - x_{i_k}a_{i_k}) = 1,$$

unde

$$x_{i_1}, \ldots, x_{i_p} > 0 \quad \text{iar} \quad x_{i_{p+1}}, \ldots, x_{i_k} < 0.$$

Notînd prima paranteză cu m iar a doua cu n, avem

$$m - n = 1 \text{ cu } m, n \in A.$$

Fie $q \geqslant n(n-1)$, $q = an + b$ cu $a \geqslant n - 1$, $0 \leqslant b \leqslant n - 1$,

$$q = (a - b)\, n + bm,$$

care este suma de două elemente din A.

Prin urmare, există un $k \in N$ astfel că pentru orice $k' \geqslant K$ să avem $k'd \in A$.

Grafuri. Definiția 5. *Se numește graf o pereche* (X, Γ) *unde* X *este o mulțime oarecare iar* Γ *o aplicație*

$$\Gamma : X \to \mathfrak{P}(X),$$

unde prin $\mathfrak{P}(X)$ *notăm mulțimea părților lui* X.

Definiția 6. *Se numește arc al unui graf orice pereche ordonată* (x, y) *cu* $y \in \Gamma(x)$; x *se numește originea arcului iar* y *extremitatea lui. Orice arc în care originea coincide cu extremitatea se numește buclă.*

Este clar că mulțimea arcelor determină complet graful.

Definiția 7. *Se numește drum o succesiune de arce* (x_1, x_2), $(x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$ *cu proprietatea ca originea fiecărui arc începînd cu al doilea coincide cu extremitatea anteriorului.*

Un astfel de drum se notează $\mu = [x_1, \ldots, x_n]$ sau, mai pe scurt, $\mu[x_1; x_n]$.

Se numește lungime a unui drum $l(\mu)$ numărul finit sau nu de arce care îl constituie.

Definiția 8. *Se numește circuit al unui graf un drum finit în care originea coincide cu extremitatea.*

Relația de ordine într-un graf. Să definim acum o relație de ordine slabă într-un graf. Spunem că $x \mathcal{T} y$ dacă există un drum finit de la x la y sau dacă $x = y$. Prin urmare putem defini și o relație de echivalență $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$ care împarte pe X în clase de echivalență iar în mulțimea claselor de echivalență avem o relație parțială de ordine $\mathcal{T}^*$.

Graf redus. Putem defini o aplicație $\hat{\Gamma}$ de la $\hat{X} = X/\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$ în $\mathfrak{P}(\hat{X})$ în felul următor: pentru orice $\hat{x} \in \hat{X}$, avem $\hat{y} \in \hat{\Gamma}(\hat{x})$ dacă există $x \in \hat{x}$ și $y \in \hat{y}$ astfel ca $y \in \Gamma(x)$.

Graful $(\hat{X}, \hat{\Gamma})$ se numește *graful redus* al grafului (X, Γ).

Clasă finală. Definiția 9. *Se numește clasă finală a unui graf orice element minimal în raport cu relația* $\mathcal{T}^*$, *sau, ceea ce este echivalent, orice clasă* $\hat{x}$ *pentru care* $\hat{\Gamma}(\hat{x}) = \Phi$.

Vom nota de acum înainte elementele lui X prin litere minuscule italice i, j, m, k etc.

Notăm prin D_{ij} mulțimea tuturor drumurilor de la i la j.

Notăm prin $N_{ij} = \{l(\mu[i; j] \mid \mu[i; j] \in D_{ij}\}$.

Se observă că dacă D_{ii} nu este vidă, atunci N_{ii} este o mulțime de numere întregi pozitivă închisă față de adunare.

Notăm cu d_i cel mai mare divizor comun al elementelor lui N_{ii} dacă D_{ii} nu este vidă.

Propoziția 3. *Dacă* i *și* j *sînt în aceeași clasă de echivalență, atunci* $d_i = d_j = d$ *iar elementele lui* N_{ij} *sînt congruente între ele modulo* d.

Demonstrație. Deoarece i și j sînt în aceeași clasă de echivalență înseamnă că N_{ij} și N_{ji} nu sînt vide de unde rezultă că N_{ii} și N_{jj} nu sînt vide.

Fie $n_1, n_2 \in N_{ij}$, $m \in N_{ji}$, iar k cel din propoziția 2 aplicată mulțimii N_{jj}, atunci

$$1^\circ \quad n_1 + kd_j + m \text{ și } n_1 + (k+1)\, d_j + m$$

reprezintă lungimile unor drumuri de la i la i, prin urmare

$$n_1 + kd_j + m = Md_i,$$

$$n_1 + (k+1)\, d_j + m = Md_i,$$

de unde prin scădere $d_j = Md_i$.

Analog, $d_i = Md_j$ și $d_i = d_j = d$.

2° Din aceleași motive, avem

$$n_1 + m = Md_i,$$

$$n_2 + m = Md_i.$$

Deci,

$$n_1 - n_2 = Md_i = Md \Leftrightarrow n_1 \equiv n_2 \pmod{d}.$$

Subclase. Prin urmare, dacă i și j sînt în aceeași clasă, există t_{ij} cu $0 \leqslant t_{ij} < d$, astfel că toate elementele lui N_{ij} sînt congruente cu t_{ij} modulo d.

Deoarece N_{jj} conține aproape toate numerele de forma kd va rezulta, evident, că și N_{ij} conține aproape toate numerele de forma $t_{ij} + kd$.

Dacă i, j, k sînt în aceeași clasă avem, evident, următoarele relații

$$t_{ii} = 0, \quad t_{ij} + t_{ji} \equiv 0 \pmod{d}, \quad t_{ij} + t_{jm} \equiv t_{im} \pmod{d}.$$

Prin urmare, $t_{ij} = 0$ definește o relație de echivalență între elementele unei clase. Această relație de echivalență împarte clasa într-o nouă mulțime de subclase pe care le vom numi *subclase ciclice*.

$$\text{Din } t_{ij} + t_{ji} = t_{im} \text{ vedem că } t_{jm} = 0.$$

Prin urmare sînt în aceeași subclasă ciclică toate elementele k care în raport cu un i fixat au același t_{ik}. Cum acești t_{ik} iau valori cuprinse între 0 și $d - 1$ înseamnă că avem d subclase ciclice. Așadar, pentru un i fixat, subclasele ciclice pot fi ordonate astfel

$$C_i(0), \ C_i(1), \ \ldots, \ C_i(d-1),$$

$$C = \bigcup_{k=0}^{d-1} C_i(k) \text{ cu } C_i(k) \cap C_i(j) = \varnothing \text{ pentru } k \neq j.$$

De aici observăm că dacă există arce (drumuri de lungime 1) care să aibă originea în $C_i(0)$ iar extremitatea în C, atunci această extremitate este obligatoriu în $C_i(1)$, cele cu originea în $C_i(1)$ au extremitatea în $C_i(2)$ și așa mai departe.

Dacă C este o clasă finală sîntem siguri că orice arc cu originea în C are și extremitatea în C, iar dacă C nu este clasă finală există cel puțin un drum ce are originea în C și extremitatea în C', dar, evident, nici un drum de la C' la C.

Exemplu de graf. Să considerăm mulțimea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ și aplicația $\Gamma : X \to \mathfrak{P}(X)$ dată în modul următor:

$$\Gamma(1) = \{2, 4\}, \ \Gamma(2) = \{3\}, \ \Gamma(3) = \{1\}, \ \Gamma(4) = \{3\},$$

$$\Gamma(5) = \varnothing, \ \Gamma(6) = \{6, 7\}, \ \Gamma(7) = \{6\}, \ \Gamma(8) = \{3, 9\},$$

$$\Gamma(9) = \{5, 8\}, \ \Gamma(10) = \{7\}.$$

Reprezentarea grafică este dată în figura de mai jos:
Se vede ușor că există trei clase finale

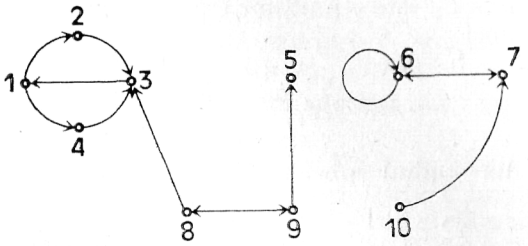


Fig. 1

$I = \{1, 2, 3, 4\}$ cu trei subclase ciclice $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{2, 4\}$, $I_3 = \{3\}$,

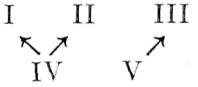
$II = \{5\}$ care nu are subclase ciclice,

$III = \{6, 7\}$ în care cel mai mare divizor comun d este 1.

Mai există încă două clase care nu sînt finale

$IV = \{8, 9\}$ și $V = \{10\}$.

Graful redus poate fi reprezentat astfel



Graful asociat unui lanț Markov. Să considerăm acum un lanț Markov omogen cu mulțimea stărilor X. În această mulțime vom defini un graf în felul următor:

$$i \to \Gamma(i) = \{j \in X \mid p_{ij} > 0\}.$$

Din relația Chapman, avem

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}) \in X^{m-1}} p_{ii_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{m-1} j}.$$

Deci, în graful asociat unui lanț Markov există un drum de lungime m de la i la j, dacă și numai dacă $p_{ij}^{(m)} > 0$. Acest graf împarte mulțimea stărilor în clase de echivalență. Clasele finale din acest graf se numesc *mulțimi ergodice de stări*, iar celelalte *mulțimi de trecere*.

Aspectul probabilist al împărțirii în clase și subclase. După cum am văzut, un arc care are originea într-un element al unei clase finale C_0 are și extremitatea tot în C_0. Aceasta înseamnă că dacă C_0 este o mulțime ergodică într-un lanț Markov și $i \in C_0$, atunci

$$\sum_{j \in C_0} p_{ij} = 1.$$

Mai mult, din studiul subclaselor ciclice, avem

$$\sum_{j \in C_0(r+1)} p_{ij} = 1 \text{ pentru orice } i \in C_0(r)$$

și

$$\sum_{j \in C_0(r+n)} p_{ij}^{(n)} = 1 \text{ pentru orice } i \in C_0(r).$$

Evident, dacă clasa finală este constituită dintr-un singur element i, atunci $p_{ii} = 1$.

O astfel de stare se numește *absorbantă*. Folosind această împărțire a mulțimii stărilor în clase de echivalență putem aduce matricea P a probabilităților de trecere la o formă canonică. Această reducere la forma canonică este bine marcată de graful redus $(\hat{X}, \hat{\Gamma})$ corespunzător grafului inițial. Elementele unei aceleiași clase vor primi indici consecutivi, clasele ergodice vor fi puse primele, apoi clasele cu un nivel mai sus etc.

Astfel vom fi siguri că putem merge de la o stare dată la o stare din aceeași clasă sau la o stare de indice mai mic.

Deci matricea P capătă forma

$$P = \begin{array}{c} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \end{array} \left(\begin{array}{c|c|c} P_1 & & \\ \hline R_2 & P_2 & \\ \hline R_3 & & P_3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \quad \text{O}.$$

Evident, R_i este O dacă $\hat{u}_i$ este ergodică și conține obligatoriu elemente nenule dacă $\hat{u}_i$ este de trecere. Din această formă se

vede că și puterile P^n au pe celulele de pe diagonala principală tocmai puterile respectivelor P_i. Aceasta arată că orice clasă de echivalență poate fi tratată separat prin studiul matricei P.

Dacă clasa de echivalență conține o singură subclasă ciclică se numește *regulată* dacă nu, *ciclică*.

Clasificarea lanțurilor. Din cele de mai sus rezultă și o clasificare a lanțurilor Markov:

a) *Lanțuri fără clase de trecere.* Dacă un astfel de lanț are mai mult decît o clasă ergodică, aceste clase necomunicînd între ele, avem de-a face cu mai multe lanțuri Markov care pot fi studiate separat. Deci nu se pierde din generalitate dacă se presupune că un lanț fără clase de trecere are o singură clasă ergodică. Un astfel de lanț se numește *ergodic*. Lanțul Markov ergodic se va numi *regulat* dacă clasa ergodică este regulată și se va numi *ciclic* dacă clasa ergodică este ciclică.

b) *Lanțuri cu clase de trecere.* Dacă toate clasele ergodice sînt formate din cîte un singur element, lanțul se numește *absorbant*.

Există lanțuri în care toate clasele ergodice sînt regulate dar nu toate formate dintr-un singur element.

Dacă i și j sînt în aceeași clasă de echivalență există un k_{ij} astfel că pentru orice $k \geqslant k_{ij}$ să existe un drum de lungime $t_{ij} + kd$. Pentru lanțul Markov acesta este echivalent cu $p_{ij}^{(t_{ij}+kd)} > 0$. Dacă avem de-a face cu o clasă regulată $d = 1$ și deci $p_{ij}^{(k)} > 0$.

Fie $k_0 = \max k_{ij}$. Vom avea pentru orice $k \geqslant k_0$, $p_{ij}^{(k)} > 0$ Deci, de la un k suficient de mare toate puterile matricii P_i sînt pozitive.

Dacă avem de-a face cu o clasă ciclică $d > 1$ mersul ciclic în interiorul unei clase ne conduce la concluzia că nici o putere a matricii P_i nu poate fi pozitivă. Într-adevăr, dacă P_i^k ar fi pozitivă, adică $p_{ij}^{(k)} > 0$ pentru orice i, j, atunci $k \equiv p \pmod{d} \Rightarrow$ $\Rightarrow p_{ij}^{(k)} > 0$ numai pentru $j \in C_i(p)$ și $p_{ij}^{(k)} = 0$ pentru orice $j \notin C_i(p)$. Am ajuns deci la o contradicție. Din același raționament se vede că nici o coloană a lui P nu poate fi complet pozitivă, ci sînt pozitive numai acele elemente $p_{ij_0}^{(k)}$ pentru care $i \in C_{j_0}(d - p)$.

Exemple de lanțuri Markov. a) Să considerăm lanțul Markov corespunzător matricii de trecere

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| \end{array}.$$

Graful asociat este următorul

Fig. 1.2

Prin urmare spațiul stărilor constă din două clase finale

$I = \{1, 2\}$ care este regulată

$II = \{3, 4, 5\}$ care are trei subclase ciclice $II_1 = \{3\}$, $II_2 = \{4\}$, $II_3 = \{5\}$.

Deci lanțul respectiv este un lanț fără clase de trecere.

b) Să considerăm acum lanțul Markov corespunzător matricii de trecere

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right\| \end{array}.$$

Graful asociat este următorul

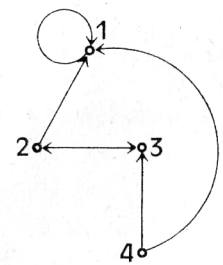


Fig. 1.3

Deci spațiul stărilor constă dintr-o clasă finală. $I = \{1\}$ (starea 1 este deci absorbantă) și două clase de trecere: $II = \{2, 3\}$ și $III = \{4\}$.

Prin urmare lanțul respectiv este un lanț cu clase de trecere și o singură clasă finală formată dintr-o singură stare. Un astfel de lanț se numește *absorbant*.

Proprietăți ale lanțurilor Markov finite. Proprietăți de absorbție. Fie $I = T \cup E$, unde I este mulțimea stărilor lanțului Markov considerat, T mulțimea stărilor de trecere, E mulțimea stărilor ergodice.

Am văzut că dacă procesul ajunge într-o stare ergodică el nu va mai părăsi niciodată clasa căreia această stare aparține.

Următoarea teoremă arată că un lanț Markov cu o mulțime finită de stări părăsește cu probabilitatea 1 în timp finit mulțimea stărilor de trecere.

Teorema 1. *Pentru orice lanț Markov cu o mulțime finită de stări de trecere avem* $\lim_{n\to\infty} P(f_{k+n} \in T \mid f_k = i) = 0$ *pentru orice* $i \in T$, *această convergență având caracter exponențial.*

Demonstrație. În primul rînd,

$$P(f_{k+n} \in T \mid f_k = i) = P(f_{k+\nu} \in T,\ 1 \leqslant \nu \leqslant n \mid f_k = i) \geqslant$$

$$\geqslant P(f_{k+\nu} \in T,\quad 1 \leqslant \nu \leqslant n+1 \mid f_k = i) = P(f_{k+n+1} \in T \mid f_k = i).$$

Într-adevăr, aceasta rezultă din faptul că pentru $1 \leqslant \nu < n$, avem

$$P(f_{k+n} \in T,\ f_{k+\nu} \in E \mid f_k = i) = \sum_{j \in E} P(f_{k+n} \in T,\ f_{k+\nu} = j \mid f_k = i) =$$

$$= \sum_{j \in E} P(f_{k+\nu} = j \mid f_k = i)\ P(f_{k+n} \in T \mid f_{k+\nu} = j) = 0.$$

Din finititudinea mulțimii stărilor, deci a claselor, rezultă că oricare ar fi $i \in T$ există un drum finit cu originea în i și extremitatea într-o stare dintr-o clasă ergodică. Aceasta înseamnă că oricare ar fi $i \in T$ există $n_i \in N$ și $k_i \in T$ astfel ca

$$P(f_{m+n_i} = k_i \mid f_m = i) > 0.$$

Fie $n_0 = \max_{i \in T} n_i$

$$p = P(f_{m+n_0} \in E \mid f_m = i) \geqslant P(f_{m+n_0} \in E, \quad f_{m+n_i} = k_i \mid f_m = i) =$$

$$= P(f_{m+n_i} = k_i \mid f_m = i)\, P(f_{m+n_0} = E \mid f_{m+n_i} = k_i f_m = i) > 0.$$

Prin urmare,

$$P(f_{m+n_0} \in T \mid f_m = i) = 1 - P(f_{m+n_0} \in E \mid f_m = i) = 1 - p.$$

$$P(f_{m+2n_0} \in T \mid f_m = i) = P(f_{m+2n_0} \in T, \quad f_{m+n_0} \in T \mid f_m = i) =$$

$$= \sum_{k \in T} P(f_{m+2n_0} \in T, f_{m+n_0} = k \mid f_m = i) = \sum_{k \in T} P(f_{m+n_0} =$$

$$= k \mid f_m = i)\, P(f_{m+2n_0} \in T \mid f_{m+n_0} = i) = (1 - p) \sum_{k=T} P(f_{m+n_0} =$$

$$= k \mid f_m = i) = (1 - p)\, P(f_{m+n_0} \in T \mid f_m = i) = (1 - p)^2.$$

Prin urmare, prin recurență,

$$P(f_{m+kn_0} \in T \mid f_m = i) = (1 - p)^k \to 0.$$

Deoarece șirul $P(f_{m+n} \in T \mid f_m = i)$ este descrescător și conține un subșir $P(f_{m+kn_0} \in T \mid f_m = i)$ care tinde la 0, rezultă că șirul inițial tinde la 0.

Tot de aici avem, evident, $P(f_{m+n} \in E \mid f_m = i) \to 1$ cînd $n \to \infty$ pentru orice $i \in T$.

Dar

$$P(f_{m+n} \in T \mid f_m = i) = \sum_{j \in T} p_{ij}^{(n)}.$$

Deci

$$\sum_{j \in T} p_{ij}^{(n)} \to 0 \text{ cînd } n \to \infty \text{ și } i \in T$$

și este descrescător. De aici rezultă că

$$\sum_{j \in T} p_{ij}^{(n)} \leqslant \delta < 1 \text{ pentru } n \geqslant n_0 \text{ oricare ar fi } i \in T.$$

Dar

$$\sum_{j \in T} p_{ij}^{[(s+1)\, n_0]} = \sum_{j \in T} \sum_{k \in T} p_{ik}^{(sn_0)} p_{kj}^{(n_0)} = \sum_{k \in T} p_{ik}^{(sn_0)} \sum_{j \in T} p_{kj}^{(n_0)} \leqslant$$

$$\leqslant \delta \sum_{j \in T} p_{ij}^{(sn_0)} \leqslant \delta^2 \sum_{j \in T} p_{ij}^{((s-1)\, n_0)} < \delta^{s+1},$$

deci

$$\sum_{j \in T} p_{ij}^{(sn_0)} \leqslant \delta^s.$$

Pe de altă parte,

$$\sum_{j \in T} p_{ij}^{(n)} = \sum_{j \in T} p_{ij}^{\left(\frac{n}{n_0} n_0\right)} < \sum_{j \in T} p_{ij}^{\left(\left[\frac{n}{n_0}\right] n_0\right)} < \delta^{\left[\frac{n}{n_0}\right]} < \delta^{\frac{n}{n_0} - 1} < (\delta^{\frac{1}{n_0}})^n\, \delta^{-1}.$$

Evident, deci, există două constante $b > 0$ și $0 < c < 1$ astfel că $p_{ij}^{(n)} < bc^n$ pentru orice $ij \in T$.

Proprietăți statistice. Matricea fundamentală, valoarea medie și dispersia numărului de trecere printr-o stare. Dacă considerăm acum matricea de trecere

$$P = \left(\begin{array}{c|c} S & O \\ \hline R & Q^u \end{array}\right),$$

unde S se referă la situația cînd procesul a ajuns într-o stare ergodică, R se referă la trecerea de la stările de trecere la cele ergodice. În sfîrșit, Q se referă la proces atîta timp cît el este în mulțimea T.

Din forma matricei P se observă că

$$P^n = \left(\begin{array}{c|c} S^n & O \\ \hline R_n & Q^n \end{array}\right).$$

Am văzut însă că pentru $i, j \in T$, $P_{ij}^{(n)} \to 0$ cînd $n \to \infty$,

Deci matricea $Q^n \to 0$. Prin urmare matricea $I - Q$ este inversabilă și

$$(I - Q)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k.$$

Definiția 1. *Matricea* $N = (I - Q)^{-1}$ *se numește matrice fundamentală.*

Definim următoarele variabile aleatoare

$$u_j^k : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P(f_k = s_j) & 1 - P(f_k = s_j) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} k = 0, 1, 2, \ldots \\ s_j \in T \end{matrix}$$

și

$$n_j = \sum_{k=0}^{\infty} u_j^k.$$

n_j ne dă numărul total de cîte ori procesul a trecut prin starea s_j. Se vede din definiția sa că n_j e o funcție măsurabilă în raport cu $\mathcal{A}(f_0, f_1, f_2, \ldots) = \sigma$ — algebra generată de variabilele $f_0, f_1, f_2, \ldots$ ale lanțului Markov; deci $n_j = F_j(f_0, f_1 \ldots)$.

Vom nota în cele ce urmează $M_i(F) = M_{\{f_0 = s_i\}}(F)$.

Teorema 2. *Matricea valorilor medii este dată de relația* $\{M_i(n_j)\} = N$, unde $s_i, s_j \in T$.

Demonstrație.

$$\{M_i(n_j)\} = \{M_i[\sum_{k=0}^{\infty} u_j^k]\} = \{\sum_{k=0}^{\infty} M_i(u_j^k)\} =$$

$$= \{\sum_{k=0}^{\infty} [1 \cdot p_{ij}^{(k)} + 0 \cdot (1 - p_{ij}^{(k)})]\} = \{\sum_{k=0}^{\infty} p_{ij}^{(k)}\} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k = N.$$

Altă demonstrație. Vom demonstra mai întîi următoarea

Lemă. *Fie* $f_0, f_1, \ldots, f_n$ *un proces Markov omogen și* $F(f_0, f_1, f_2, \ldots)$ *o funcție măsurabilă în raport cu* $\mathcal{A}(f_0, f_1, f_2, \ldots)$. *Dacă funcția* $F(f_0, f_1, f_2, \ldots)$ *se bucură de proprietatea că* $F(f_0 = s_i, \ f_1 = s_k, \ f_2 = s_l \ \ldots) = \alpha + F(f_0 = s_k, \ f_1 = s_l \ \ldots)$, *atunci*

$$M_i(F) = \alpha + \sum_{k \in I} p_{ik} M_k(F).$$

Demonstrație.

$$M_i(F) = \frac{M[F \cdot \chi_{f_0 = s_i}]}{P(f_0 = s_i)} =$$

$$= \frac{\sum_{s_1, s_2, \ldots \in I} F(f_0 = s_i, \ f_1 = s_1, \ f_2 = s_2, \ldots) \ P(f_0 = s_i, \ f_1 = s_1, \ f_2 = s_2, \ldots)}{P(f_0 = s_i)} =$$

$$= \sum_{s_1, s_2, \ldots \in I} F(f_0 = s_i, f_1 = s_1, f_2 = s_2, \ldots) \, p_{i_1} P(f_2 = s_2, \ldots \mid f_0 = s_i,$$

$$f_1 = s_1) = \sum_{s_1 \in I} p_{i_1} \Big(\sum_{s_2, s_3, \ldots \in I} F(f_0 = s_i, f_1 = s_1, \ldots) \, P(f_2 =$$

$$= s_2, \ldots \mid f_1 = s_1) \Big) = \sum_{s_1 \in I} p_{i_1} \Big(\sum_{s_2, s_3, \ldots \in I} [\alpha + F(f_0 =$$

$$= s_1, f_2 = s_2, \ldots)] \, P(f_1 = s_2, f_2 = s_3, \ldots \mid f_0 = s_1) =$$

$$= \sum_{s_1 \in I} p_{i_1} [\alpha + M_1(F)] = \alpha \sum_{s_1 \in I} p_{i_1} + \sum_{s_1 \in I} p_{i_1} M_1(F) =$$

$$= \alpha + \sum_{k \in I} p_{ik} M_k(F).$$

În cazul nostru să presupunem că procesul pleacă din $s_i \in T$. Atunci

$$n_j = F_j(f_0 = s_i, f_1 = s_1, \ldots),$$

dar

$$F_j(f_0 = s_1, f_1 = s_k, \ldots) = \delta_{ij} + F_j(f_0 = s_k, f_1 = s_2, \ldots), \text{ deci}$$

$$M_i(n_j) = \delta_{ij} + \sum_{k \in I} p_{ik} M_k(n_j).$$

Dar, dacă $s_k \in E \Rightarrow M_k(n_j) = 0$, deci

$$M_i(n_j) = \delta_{ij} + \sum_{k \in T} p_{ik} M_k(n_j)$$

sau

$$\{M_i(n_j)\} = I + Q \cdot \{M_k(n_j)\},$$

deci

$$\{M_i(n_j)\} = (I - Q)^{-1} = N.$$

Matrici auxiliare și notații. În continuare vom introduce cîteva notații:

η — vector coloană cu toate componentele 1,

ξ — vector linie cu toate componentele 1.

$A\,\xi$ este deci un vector coloană a cărui i-componentă este egală cu suma elementelor din linia i a matricii A. Analog ηA

este un vector linie avînd ca elemente suma coloanelor matricii A. Vom mai nota

$E = \{1\}_{i,j}$, $A_p = \{a_{ij}^2\}$, $A_d = \{a_{ij} \cdot \delta_{ij}\}$,

$N_2 = N(2N_d - I) - N_p \cdot N_2$ are s linii și s coloane,

$B = NR \cdot B$ are s linii și $r - s$ coloane.

$\tau = N\xi$; τ are s linii și o coloană,

$\tau_2 = (2N - I)\tau - \tau_p$; τ_2 are s linii și o coloană.

Avem, evident, $NQ = QN = N - I$.

Teorema 3. *$M_i(n_j^2)$ este finit pentru orice s_i, $s_j \in T$.*

Demonstrație.

$$M_i(n_j^2) = M_i[(\sum_{k=0}^{\infty} u_j^k)^2] = M_i[\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} u_j^k u_j^l] = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} M_i[u_j^k u_j^l],$$

dar

$$M_i[u_j^k u_j^l] = p_{ij}^{[\min(k,l)]} \cdot p_{jj}^{[\max(k,l)-\min(k,l)]} \leqslant$$
$$\leqslant (b \cdot c^{\min(k,l)})\,(b \cdot c^{[\max(k,l)-\min(k,l)]}) = b^2 c^{\max(k,l)},$$

deci

$$M_i(n_j^2) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} M_i[u_j^k u_j^l] \leqslant b^2 \sum_{k=0}^{\infty}[c^k + \ldots + c^k + \sum_{l=k}^{\infty} c^l] =$$

$$= b^2 \sum_{k=0}^{\infty} kc^k + b^2 \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=k}^{\infty} c^l = \frac{b^2 c}{(1-c)^2} + \frac{b^2}{(1-c)^2} = \frac{b^2(1+c)}{(1-c)^2}.$$

Teorema 4. *Matricea dispersiilor este dată de relația*

$$\{D_i^2(n_j)\} = N_2, \text{ unde } s_i,\ s_j \in T.$$

Demonstrație.

$$D_i^2(n_j) = M_i(n_j^2) - M_i^2(n_j),$$

dar

$$\{M_i^2(n_j)\} = N_p.$$

Să calculăm $M_i(n_j^2)$. Deoarece procesul începe din $f_0 = s_i$,

$$n_j = F_j(f_0 = s_i, f_1 = s_k, \ldots) = \delta_{ij} + F_j(f_0 = s_k, \ldots),$$

$$M_i(n_j^2) = \sum_{k \in I} p_{ik} M_k[\delta_{ij} + F_j(f_0 = s_k, \ldots)]^2 =$$

$$= \delta_{ij}^2 + 2\delta_{ij} \sum_{k \in I} p_{ik} M_k(n_j) + \sum_{k \in I} p_{ik} M_k(n_j^2) = \delta_{ij} +$$

$$+ 2\delta_{ij} \sum_{k \in T} p_{ik} M_k(n_j) + \sum_{k \in T} p_{ik} M_k(n_j^2).\ \{M_i(n_j^2)\} =$$

$$= I + 2(QN)_d + Q\{M_i(n_j^2)\},$$

deci

$$\{M_i(n_j^2)\} = (I - Q)^{-1}[I + 2(QN)_d] =$$

$$= N[2(N - I)_d + I] = N(2N_d - I),$$

deci

$$\{D_i^2(n_j)\} = N[2N_d - I] - N_p = N_2.$$

Valoarea medie și dispersia timpului total petrecut în stările de trecere. Fie $t = \sum_{s_j \in T} n_j$ numărul total de pași pe care procesul îl face atîta timp cît stă în stările de trecere, socotind și poziția inițială în numărătoare.

Teorema 5.

$$\{M_i(t)\} = N\xi = \tau,$$
$$\{D_i(t)\} = \tau_2.$$

Demonstrație.

$\{M_i(t)\} = \{M_i(\sum_{s_j \in T} n_j)\} = \{\sum_{s_j \in T} M_i(n_j)\} = N\xi$, deci $\{M_i^2(t)\} = \tau_p$.

Să presupunem că $f_0 = s_i$, atunci

$$t = F(f_0 = s_i, f_1 = s_k, \ldots) = 1 + F(f_0 = s_k, \ldots),$$

deci

$$\{M_i(t^2)\} = \{\sum_{k \in I} p_{ik}[1 + F(f_0 = s_k, \ldots)]^2\} =$$

$$= \{1 + 2\sum_{k \in T} p_{ik} M_k(t) + \sum_{k \in T} p_{ik} M_k(t^2)\} = \xi + 2Q\tau + Q\{M_i(t^2)\}.$$

Deci

$$\{M_i(t^2)\} = (I - Q)^{-1}(2Q\tau + \xi) = 2NQ\tau + N\xi =$$

$$= 2(N - I)\tau + \tau = (2N - I)\tau.$$

Deci

$$D_i^2(t) = (2N - I)\tau - \tau_p = \tau_2.$$

Plecarea cu o repartiție inițială oarecare. Am calculat toate acestea în ipoteza că $P(f_0 = s_i) = 1$, adică în cazul unei repartiții inițiale $\pi_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Pentru a calcula toate acestea cantități pentru o repartizare inițială oarecare π ne folosim de formula $M_\pi(f) = \sum_{i=1}^{r} P(f_0 = s_i) M_i(f) = \pi\{M_i(f)\}$.

Notînd cu π' vectorul componentelor lui π, corespunzătoare stărilor de trecere, vom avea

$$\{M_\pi(n_i)\} = \pi' N \quad \text{pentru orice} \quad j \in T,$$

$$\{D_\pi^2(n_i)\} = \pi' N(2N_d - I) - (\pi' N)_p,$$

$$M_\pi(t) = \pi'\tau,$$

$$D_\pi^2(t) = \pi'(2N - I)\tau - (\pi'\tau)_p.$$

Problema probabilităților de absorbție. Să presupunem că avem acum un lanț Markov absorbant. În continuare ne vom ocupa de problema: care este probabilitatea de a ajunge în diverse stări absorbante, plecînd dintr-o stare de trecere.

Teorema 6. Fie b_{ij} probabilitatea ca plecînd din starea $s_i \in T$ procesul să ajungă în starea $s_j \in E$. Avem $\{b_{ij}\} = B = NR$

Demonstrație.

$$b_{ij} = P\{\bigcup_{l=1}^{\infty} (f_l = s_j,\ f_{l-\nu} \in T,\ 1 \leqslant \nu \leqslant l - 1 \mid f_0 = s_i\} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} P\{f_l = s_j,\ f_{l-\nu} \in T,\ 1 \leqslant \nu \leqslant l - 1 \mid f_0 = s_i\} =$$

$$= p_{ij} + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{s_k \in T} P\{f_l = s_j,\ f_{l-\nu} \in T,\ 1 \leqslant \nu \leqslant l - 2,\ f_1 = s_k \mid f_0 = s_i\} =$$

$$= p_{ij} + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{s_k \in T} p_{ik} \cdot P\{f_l = s_j,\ f_{l-\nu} \in T,\ 1 \leqslant \nu \leqslant l - 2 \mid f_1 =$$

$$= s_k,\ f_0 = s_i\} = p_{ij} + \sum_{s_k \in T} p_{ik} \sum_{l=2}^{\infty} P\{f_{l-1} =$$

$$= s_j,\ f_{l-\nu-1} \in T,\ 1 \leqslant \nu \leqslant l - 2 \mid f_0 = s_k\} = p_{ij} + \sum_{s_k \in T} p_{ik} b_{kj},$$

deci

$$\{b_{ij}\} = \{p_{ij}\} + Q\{b_{ij}\}$$

sau

$$B = R + QB, \quad B = (I - Q)^{-1} R = NR.$$

Din faptul că $1 = P\{\bigcup_{s_l \in E} \bigcup_{l=1}^{\infty} [f_l = s_j,\ f_{l-\nu} \in T,\ 1 \leqslant \nu \leqslant l -$

$$- 1 \mid f_0 = s_i]\} = \sum_{s_l \in E} P\{\bigcup_{l=1}^{\infty} [f_l = s_j,\ f_{l-\nu} \in T,\ 1 \leqslant \nu \leqslant l - 1 \mid f_0 =$$

$$= s_i]\} = \sum_{s_l \in E} b_{il}, \text{ adică } (NR)\xi = \xi, \text{ deducem}$$

Corolar 1. Dacă ρ_k este coloana k din R, atunci $N\rho_k$ dă probabilitatea de absorbție a procesului de către starea s_k, plecînd din diferite stări de trecere inițiale.

Problema atingerii unei anumite stări. Fie m variabila aleatoare care reprezintă numărul total de stări de trecere atinse.

Fie h_{ij} probabilitatea să treacă vreodată prin $s_j \in T$ știind că el a plecat din $s_i \in T$. Vom nota de asemenea $H = \{h_{ij}\}$. Pentru a fi mai exacți

$$h_{ij} = P\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} f_l = s_j,\ f_{l-\nu} \in T - \{s_j\},\ 1 \leqslant \nu \leqslant l - 1 \mid f_0 = s_i\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} P(f_l = s_j,\ f_{l-\nu} \in T - \{s_j\},\ 1 \leqslant \nu \leqslant l - 1 \mid f_0 = s_i) = \sum_{n=1}^{\infty} h_{ij}^{(n)},$$

unde $h_{ij}^{(n)}$ este probabilitatea ca procesul să treacă pentru prima oară prin s_j la momentul n, știind că a plecat din s_i.

Teorema 7. $H = \{h_{ij}\} = (N - I)\, N_d^{-1}$.

Demonstrație. $n_j = F(f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots)$,

$$M_{\{f_0=s_0\}}(n_j) = M_{\{f_0=s_0\}} F(f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots) = \frac{M(F(f_0, f_1, \ldots)\chi_{f_0=s_0})}{P(f_0 = s_0)} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{s_1, s_2, \ldots \in I} F(f_0 = s_0,\ f_1 = s_1,\ f_2 = s_2,\ \ldots)\, P(f_0 = s_0, f_1 = s_1, \ldots)}{P(f_0 = s_0)} =$$

$$= \sum_{s_1, s_2, \ldots \in I} F(f_0 = s_0, f_1 = s_1, f_2 = s_2, \ldots)\, P(f_1 = s_1, f_2 =$$

$$= s_2, \ldots \mid f_0 = s_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{s_1 \in I - \{s_j\} \ldots s_{n-1} \in I - \{s_j\},\ s_n = s_j,\ s_{n-1}, \ldots} P(f_0 =$$

$$= s_0, f_1 = s_1, \ldots, f_{n-1} = s_{k-1}, f_n = s_n, \ldots)\, P(f_1 = s_1, \ldots \mid f_0 = s_0) +$$

$$+ \sum_{s_1, s_2, \ldots \in I - \{s_j\}} F(f_0 = s_0, f_1 = s_1, \ldots)\, P(f_1 = s_1, \ldots \mid f_0 = s_0).$$

Dar

$$\sum_{s_1 \in I - \{s_j\}, \ldots, s_{n-1} \in I - \{s_j\},\ s_n = s_j,\ s_{n+1}, \ldots \in I} F(f_0 = s_0, f_1 = s_1, \ldots, f_{n-1} =$$

$$= s_{n-1},\ f_n = s_j,\ f_{n_n} = s_{n_n},\ \ldots)\, P(f_1 = s_1,\ \ldots \mid f_0 = s_0) =$$

$$= \sum_{s_1 \in I - \{s_j\}, \ldots, s_n = s_j, s_{nn}, \ldots} [\delta_{0j} + F(f_0 = s_j, f_1 = s_{n+1},\ f_2 = s_{n+2})]\, P(f_1 =$$

$$= s_1, \ldots, f_n = s_j,\ \ldots \mid f_0 = s_0) = \delta_{0j} \sum_{s_1 \in I - \{s_j\}, \ldots} P(f_1 = s_1,\ f_2 =$$

$$= s_2, \ldots, f_n = s_j, \ldots \mid f_0 = s_0) + \sum_{s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots \in I} F(f_0 = s_j, f_1 =$$

$$= s_{n+1}, \ldots \mid \sum_{s_1 \in I - \{s_j\}} P(f_1 = s_1, \ldots, f_n = s_j \mid f_0 = s_0) =$$

$$= \delta_{0j} P(f_1 \in I - \{s_j\},\ f_2 \in I - \{s_j\},\ \ldots,\ f_{n-1} \in I - \{s_j\},\ f_n = s_j,$$

$$f_{nn} \in I, \ldots, \mid f_0 = s_0) + P(f_1 \in I - \{s_j\}, \ldots, f_n = s_j) \sum_{s_{n+1}, \ldots \in I} F(f_0 =$$

$$= s_j, f_1 = s_{n+1}, \ldots)\, P(f_1 = s_{n_n}, \ldots \mid f_0 = s_j) = \delta_{0j} h_{0j}^{(n)} + h_{0j}^{(n)} M_j(n_j).$$

Iar

$$\sum_{s_1, s_2, \ldots \in I - \{s_j\}} F(f_0 = s_0, f_1 = s_1, \ldots)\, P(f_1 = s_1, f_2 = s_2, \ldots \mid f_0 = s_0) =$$

$$= \delta_{0j} P(f_1 \in I - \{s_j\}, f_2 \in I - \{s_j\}, \ldots \mid f_0 = s_0),$$

deci

$$M_0(n_j) = M_j(n_j) \sum_{n=1}^{\infty} h_{0j}^{(n)} + \delta_{0j} \sum_{n=1}^{\infty} h_{0j}^{(n)} + \delta_{0j} P(f_1 \in I -$$

$$- \{s_j\}, f_2 \in I\{s_j\}, \ldots, \mid f_0 = s_0) = M_j(n_j)\, h_{0j} + \delta_{0j}.$$

Deci

$$\{M_i(n_j)\} = \{\delta_{ij}\} + \{h_{ij} \cdot M_j(n_j)\}.$$

Sau

$$N = I + HNd, \quad \text{adică} \quad H = (N - I)\, N_d^{-1}.$$

Teorema 8.

$$\{P_i(n_j - \delta_{ij} = k)\} = \begin{cases} E - H, \text{ dacă } k = 0, \\ HH_d^{k-1}(I - H_d) = (N - I)\, N_d^{-2}(I - N_d^{-1})^{k-1}, \\ \text{dacă } k > 0, \end{cases}$$

unde $E = \{l_{ij}\}$, $l_{ij} = 1$ *pentru orice* i *și* j.

Demonstrație.

$$P_i(n_j - \delta_{ij} = 0) = P(f_1 \in I - \{s_j\}, \ldots, f_n \in I - \{s_j\}, \ldots \mid f_0 = s_i) =$$

$$= s - h_{ij},$$

deci

$$P_i(n_j - \delta_{ij} = 0) = \{1\} - \{h_{ij}\} = E - H,$$

$$P_i(n_j - \delta_{ij} = 1) = P\{\bigcup_{l=1}^{\infty} f_1 \in I - \{s_j\}, \ldots, f_{l-1} \in I - \{s_j\},$$

$$f_l = s_j, f_{l+\nu} \in I - \{s_j\},\ \nu = 1, 2, \ldots \mid f_0 = s_0\} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} P(f_1 \in I - \{s_j\}, \ldots, f_{l-1} \in I - \{s_j\}, f_l = s_j \mid f_0 = s_i) \times$$

$$\times P(f_1 \in I - \{s_j\}, \ldots f_n \in I - \{s_j\}, \ldots \mid f_0 = s_j) = (1 - h_{jj})\, h_{ij}.$$

§ 11. Reacții în lanț

1. *Generalități.* Numeroase reacții chimice în lanț ca și unele procese fizice sau biologice privind un sistem de particule elementare sînt susceptibile de interpretare prin lanțuri Markov, care poartă numele de lanțuri sau procese stochastice ramificate.

Cel dintîi exemplu este dat de reacția fotochimică în lanț, care duce la formarea acidului clorhidric din moleculele izolate de hidrogen și clor.

Această reacție în lanț, sub influența unei cuante de lumină, are forma următoare

$$\left.\begin{aligned} Cl_2 + h\nu &= Cl + Cl \\ Cl + H_2 &= H + HCl \\ H + Cl_2 &= Cl + HCl \\ Cl + H_2 &= H + HCl \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Sub influența unei cuante de lumină, molecula de Cl se desface în doi atomi de Cl; fiecare dintre acești atomi, în prezența moleculei de H, o desface, eliberează un atom de H și formează o moleculă de HCl; atomul de hidrogen eliberat, în prezența unei molecule de Cl, o desface, eliberează un atom de Cl și formează o moleculă de HCl și așa mai departe. Procesul poate fi considerat teoretic infinit. El se întrerupe numai cînd atomul de Cl sau de H întîlnește impurități sau lovește pereții vasului, unde condițiile sînt alterate.

Evenimentele al căror lanț îl avem în considerare aici sînt apariția atomilor de Cl și H și a moleculei de HCl. Le vom nota e_1, e_2, e_3. Celelalte elemente ale reacțiilor constituie numai ocazii sau circumstanțe ale procesului chimic.

Succesiunea de evenimente descrisă la (1) se mai poate scrie în aceste notații

$$\left.\begin{aligned} e_1 &\to e_1 + e_2 \\ e_2 &\to e_1 + e_3 \\ e_1 &\to e_2 + e_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Vom presupune că reacțiile elementare au loc într-un interval de timp care nu variază de-a lungul procesului și vom lua acest interval drept unitate de măsură a timpului.

Observăm că numeroase reacții chimice în lanț trebuie considerate ca lanțuri omogene: durata reacției este independentă de momentul în care începe.

Să considerăm o reacție de lanț, privind un număr r de tipuri de elemente.

Evenimentele care reprezintă obiecte ale cercetării sînt:

1°. Evenimentele pe care le vom nota vectorial $(a) = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ și ne arată că avem în prezență a_1 particule de speța întîi, a_2 particule de speța a doua, ..., a_r particule de speța r.

2°. Reacțiile, sau sistemele de reacții, care se vor nota cu $E^{(l)}_{(a),(b)}(l)$ și care arată procesul sau mulțimea de procese care în intervalul 1 duce de la sistemul (a) la sistemul (b).

Reacțiile elementare ale procesului sînt în număr finit și, în general, de tipul (2): de la o particulă se trece la un sistem. De aceea, procesele respective se numesc ramificate.

Întreg procesul este o suprapunere de reacții elementare $E_{j,(b)}(1)$, concomitente sau succesive.

Caracterul propriu al acestor reacții în lanț este dat de independența reacțiilor elementare între ele, fie că sînt concomitente, fie că sînt succesive.

Dacă $E_{j,(\omega)_j}(1)$ sînt reacțiile elementare ireductibile și dacă notăm

$$P[E_{j,(\omega)_j}(1)] = P_{j,(\omega)_j}(1), \tag{3}$$

vom avea $P_{j,(b)}(1) = 0$ pentru $(b) \neq \omega_j$ și $j = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ [1 ocupă locul de rang j].

În același timp,

$$P[E_{j,(\omega)_j}(1) \cap E_{k,(\omega)_k}(1)] = P_{j,(\omega)_j}(1)\ P_{k,(\omega)_k}(1) \tag{4}$$

pentru orice j, $k = 1, 2, \ldots, r$.

De exemplu, în reacția (2)

$$P_{1,(0,1,1)}(1) \neq 0,\ P_{2,(1,0,1)}(1) \neq 0,\ P_{1,(1,0,0)}(1) \neq 0,$$
$$P_{2,(0,1,0)}(1) \neq 0,\ P_{3,(0,0,1)}(1) \neq 0.$$

Toate celelalte probabilități $P_{1,(a)}(1)$, $P_{2,(b)}(1)$, $P_{3,(0)}(1)$, unde $a \neq \begin{cases}(0, 1, 1)\\(1, 0, 0)\end{cases}$, $b \neq \begin{cases}(1, 0, 0)\\(0, 1, 0)\end{cases}$ sînt nule.

2. *Cazul general.* Sistemul este format din r tipuri de particule $e_1, e_2, \ldots, e_r$. Ipoteza fundamentală asupra procesului este următoarea:

Din cele $N_\rho(n)$ particule de tipul $\rho_\rho(\rho = 1, 2, \ldots, r)$ care se găsesc libere la momentul n, un număr de $p_j(n)\, N_j(n)$ se transformă fiecare într-un sistem $\alpha_j = (\alpha_j^1, \alpha_j^2, \ldots, \alpha_j^r)$ de α_j^1 particule de tipul 1; α_j^2 particule de tipul 2; ...; α_j^r particule de tipul r. Restul de particule rămîn libere, pentru a intra în reacție la momentul următor, împreună cu cele noi formate.

Reacția de bază a lanțului

$$e_j \to \alpha_j^1 e_1 + \alpha_j^2 e_2 + \cdots + \alpha_j^r e_r = (\alpha)_j \quad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

este deci bine caracterizată și unică și se produce cu probabilitatea $p_j(n)$.

Pentru a ne putea apropia de condițiile reale ale acestui tip de procese va trebui să admitem însă și o altă reacție: moartea particulelor. În cazul unui proces chimic, aceasta se produce printr-o absorbție de către perete sau printr-o reacție străină, cu impurități.

Această reacție se poate numi transformare în particule de tip ω.

Dacă notăm cu $q_j(n)\, N_j(n)$ numărul particulelor libere de tip j care la momentul n rămîn neschimbate, vom nota prin $r_j(n)\, N_j(n)$ numărul acelora care se transformă în particule ω, sau, mai intuitiv, particulele care mor.

Vom avea

$$p_j(n) + q_j(n) + r_j(n) = 1.$$

În ipoteza că toate particulele trăiesc,

$$p_j(n) + q_j(n) = 1.$$

Evenimentul $E_{(a),\,(b)}(1)$ este constituit dintr-o reuniune de reacții concomitente

$$E_{(a),\,(b)}(1) = \sum_j \sum_{k_j} \bigcup_{(b)_{jh_j} = (b)} \Big[\bigcap_j^{1,\ldots,r} \Big(\bigcap_j^{1,\ldots,a_j} E_{j,\,(b)_{jk_j}} \Big) \Big]. \tag{5}$$

Folosind notația (3), independența (4) și reuniunea (5), obținem

$$P_{(a),\,(b)}(1) = \sum_j \sum_{h_j} \sum_{(b)_{jh_j} = b} \prod_j^{1,\ldots,r} \Big(\prod_k^{1,\ldots,a_j} P_{j,\,(b)_{jk}}(1) \Big). \tag{6}$$

Cu acest component, $P_{(a),\,(b)}(l)$ verifică relațiile lui Chapman-Kolmogorov,

$$P_{(a),\,(c)}(l + m) = \sum_{(b)} P_{(a),\,(b)}(l)\, P_{(b),\,(c)}(m). \tag{7}$$

Această relație îngăduie construirea probabilităților $P_{(a),\,(c)}(q)$ din $P_{(a),\,(b)}(1)$ și $P_{(b),\,(c)}(1)$ și, din aproape în aproape, pentru orice întreg pozitiv.

3. *Aplicație la reacția în lanț* (2). Așa cum se vede din (6) și din (7), probabilitățile $P_{(a),\,(b)}(n)$ se vor constitui cu ajutorul probabilităților fundamentale $P_{j,\,(a)}(1)$, definite la (1).

Formula (6) ne dă în acest caz

$$P_{(a_1,\,a_2,\,a_3),\,(b_1,\,b_2,\,b_3)}(1) =$$

$$= \sum_{(b)_h + l} \prod_{h_1}^{1,\ldots,a_1} P_{1,\,(b)_1,\,h_1}(1) \prod_{h_2}^{1,\ldots,a_2} P_{2,\,(b)_2,\,h_2}(1) \prod_{h_3}^{1,\ldots,a_3} P_{3,\,(b)_3,\,h_3}(1).$$

Din valorile date mai sus rezultă

$$\prod_{h_1}^{1,\ldots,a_1} P_{1,\,(b)_1,\,h_1}(1) = p_1^{k_1} q_1^{a_1 - k_1} \qquad (0 \leqslant k_1 \leqslant a_1)$$

$$\prod_{h_2}^{1,\ldots,a_2} P_{2,\,(b)_2,\,h_2}(1) = p_2^{k_2} q_2^{a_2 - k_2} \qquad (0 \leqslant k_2 \leqslant a_2)$$

$$\prod_{h_3}^{1,\ldots,a_3} P_{3,\,(b)_3,\,h_3}(1) = \begin{cases} 1 & (b)_{3,\,h_3} = (0, 0, 1) \text{ pentru } h_3 = 1, 2, \ldots, a_3. \\ 0 & \end{cases}$$

Produsul acestora corespunde la $(b) = (a_1 - k_1, k_1, k_1) + (k_2, a_2 - k_2, k_2) + (0, 0, a_3)$, adică $(b) = (a_1 - k_1 + k_2, a_2 - k_2 + k_1, a_1 - k_1 + k_2 + a_3)$.

Va trebui deci să avem

$$a_1 - a_1 + k_2 = b_1;\ a_2 - k_2 + k_1 = b_2;\ k_1 + k_2 + a_3 = b_3,$$

care ne dă

$$k_2 - k_1 = b_1 - a_1 = a_2 - b_2,$$
$$k_2 + k_1 = b_3 - a_3.$$

Deci,

$$P_{(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)}(1) =$$

$$= \begin{cases} p_1^{k_1} q_1^{a_1 - k_1} p_2^{k_2} q_2^{a_2 - k_2} & \text{dacă} \begin{cases} b_1 - a_1 = a_2 - b_2,\ b_3 \geqslant a_3, \\ 0 \leqslant \dfrac{b_1 + b_3 - (a_1 + a_3)}{2} \leqslant a_2, \\ 0 \leqslant \dfrac{b_3 - b_1 - (a_3 - a_1)}{2} \leqslant a_1. \end{cases} \\ 0 & \text{dacă condițiile de sus nu sînt realizate.} \end{cases}$$

Prin urmare, aplicînd (6), găsim

$$P_{1, (c_1, c_2, c_3)}(2) = \sum_{(b)} P_{1, (b_1, b_2, b_3)}(1)\, P_{(b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)}(1) =$$

$$= P_{1, (3, 0, 0)}(1)\, P_{(1, 0, 0), (c_1, c_2, c_3)}(1) + P_{1, (0, 1, 1)}(1)\, P_{(0, 1, 1), (c_1, c_2, c_3)}(1).$$

Din formula precedentă rezultă

$$P_{(1, 0, 0), (c_1, c_2, c_3)}(1) = \begin{cases} p_1, & c_1 = 0,\ c_2 = 1,\ c_3 = 1, \\ q_1, & c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0; \end{cases}$$

$$P_{(0, 1, 1), (c_1, c_2, c_3)}(1) = \begin{cases} q_2, & c_1 = 0,\ c_2 = 1,\ c_3 = 1, \\ p_2, & c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ c_3 = 2. \end{cases}$$

Restul probabilităților $P_{(0, 1, 1)(c_1, c_2, c_3)}(1)$ sînt egale cu zero. Prin urmare,

$$P_{1, (c_1, c_2, c_3)}(2) \begin{cases} p_1 q_2 + q_1 p_1, & c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 1, \\ q_1^2, & c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \\ p_1 p_2, & c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 2. \end{cases}$$

Celelalte probabilități $P_{1(c_1, c_2, c_3)}(2)$ sînt nule.

Procedeul de construcție indicat aici ca un exemplu de calcul nu este, evident, practic. Teoremele care urmează vor indica un mod de calcul al probabilităților și de evaluare a valorii lor asimptotice, care poate fi folosit și pentru exemple concrete.

4. *Funcția generatoare a procesului omogen. Cazul general.* Funcțiile

$$\Phi_j(l, x) = \sum_{(n)} P_{j, (n)}(l) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r} \qquad (j = 1, 2, \dots, r),$$

unde $(n) = (n_1, \dots, n_r)$, iar $n_1, \dots, n_r$ iau toate valorile de la 0 la ∞ se numesc *funcții generatoare vectoriale ale procesului.*

Următoarele proprietăți ale componentelor Φ_k sînt evidente

1°. $\Phi_k(l, x)$ este funcție analitică de $x_1, x_2, \dots, x_r$, pentru $|x_h| < 1$.

2°. $|\Phi_k(l, x)| \leqslant 1$ pentru $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_r| \leqslant 1$.

3°. $\Phi_k(l, 1, 1, 1, \dots, 1) = 1$.

Proprietatea fundamentală a funcției vectoriale de componente $F_1, F_2, \dots, F_r$ este următoarea relație funcțională

$$\Phi(l + m; x) = \Phi(m; F(l, x)), \tag{8}$$

cu condiția la limită

$$F(0, x) = x. \tag{9}$$

Pentru demonstrarea acestei afirmații, să observăm că (7) implică și relațiile

$$P_{j, (b)}(l + m) = \sum_{(a)} P_{j, (a)}(l)\, P_{(a), (b)}(m). \tag{10}$$

Prin urmare, folosind (6),

$$P_{j, (b)}(l + m) = \sum_{(a)} P_{j, (a)}(l) \sum \prod_{h}^{1, \dots, r} \prod_{k}^{1, \dots, h_j} P_{h_j, (b)_{hk}}(m). \tag{11}$$

Conform definiției, rezultă

$$\Phi_j(l + m, x) = \sum_{(b)} P_{j, (b)}(l + m)\, x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_r^{b_r} =$$

$$= \sum_{(a)} P_{j, (a)}(l) \sum_{(b)} \sum_{h} \sum_{k} \sum_{(b)_{hk} = (b)} \prod_{h} \prod_{k} P_{h, (b)_{hk}}\, x_1^{b_{1, hk}}\, x_2^{b_{2, hk}} \dots x_r^{b_{r, hk}}$$

însă

$$\sum_{(b)} \sum_{h} \sum_{k} \sum_{(b)_{hk} = (b)} = \sum_{h = 1, 2, \dots, r} \sum_{k=1}^{a_h} \sum_{(b)_{kk}},$$

deci

$$\Phi_j(l + m, x) =$$

$$= \sum_{(a)} P_{j, (a)}(l) \prod_{h = 1, \dots, r} \prod_{k = 1, \dots, a_j} \sum_{(b)_{hk}} \Phi_{h, (b)_{hk}}(m)\, x_1^{b_{1, hk}}\, x_2^{b_{2, hk}} \dots x_r^{b_{r, hk}}$$

sau

$$\Phi_j(l+m,\ x) = \sum_{(a)} P_{j,(a)}(l)\ \Phi_{1,m}^{a_1}(m, x)\ \Phi_2^{a_2}(m,\ x) \ldots \Phi_r^{a_r}(m, x),$$

de unde

$$\Phi_j(l+m,\ x) = \Phi_j(l,\ \Phi(m,\ x)) \quad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

relații echivalente cu relația vectorială unică (8).

Deoarece

$$P_{j,(a)}(0) = \begin{cases} 1 & (a) \equiv j, \\ 0 & (a) \not\equiv j, \end{cases}$$

rezultă, din definiția funcției generatoare, egalitatea (9).

Vom nota

$$\Phi_j(1,\ x) = \sum_{(a)} P_{j,(a)}(1)\ x_1^{a_1}\ x_2^{a_2} \ldots x_r^{a_r} = \Psi_j(x).$$

Relația (8) ne dă atunci

$$\Phi(l+1,\ x) = \Psi[\Phi(l,\ x)].$$

Deci, notînd cu $\psi^{(l)}(x)$ iterata de ordinul (l) a funcției $\psi(x)$, rezultă

$$\Phi(l,\ x) = \psi^{(l)}(x).$$

Exemplul 1:

$$\psi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad - bc > 0.$$

Iterata de rang l este

$$\Psi^{(l)}(x) = \frac{a_l x + b_l}{c_l x + d_l},$$

unde

$$\left\| \begin{matrix} a_l & b_l \\ c_l & d_l \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|^l.$$

Conform proprietății 3° rădăcinile ecuației

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

sînt reale, iar dacă discriminantul ecuației a cărui valoare este $(b+c)^2$ este diferit de zero, cele două rădăcini sînt distincte.

Teorema lui Perron ne dă

$$a_n = \frac{c}{b+c}\lambda_1^n + \frac{b}{b+c}\lambda_2^n;\quad b_n = \frac{b}{b+c}\lambda_1^n - \frac{b}{b+c}\lambda_2^n.$$

$$c_n = \frac{c}{b+c}\lambda_1^n - \frac{c}{b+c}\lambda_2^n;\quad d_n = \frac{b}{b+c}\lambda_1^n + \frac{c}{b+c}\lambda_2^n.$$

Dezvoltînd în serie în raport cu x funcția $\Phi(n,\ x) = \frac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}$, găsim

$$P_0(n) = \frac{c\lambda_1^n - b\lambda_2^n}{b\lambda_1^n - c\lambda_2^n},\quad P_j(n) = \frac{(-c_n)^{j-1}\,\delta_n}{d_n^{j+1}} = (-c)^{j-1}\,\frac{\delta_n}{d_n^2}\,\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{b\lambda_1^n + c\lambda_2^n}.$$

Rezultă, fără greutate, că pentru $n \to \infty$

$$P_2(n) \to 1,\ P_j(n) \to 0,\quad j \geqslant 1.$$

Dacă $b + c = 0$, avem $\lambda_1 = \lambda_2$ și valoarea comună pe care o vom numi λ este $a + b = a - c$.

În acest caz,

$$a_n = (n+1)\,\lambda^n - n\,\mathrm{d}\lambda^{n-1};\quad b_n = nb\lambda^{n-1};$$

$$c_n = nc\lambda^{n-1};\qquad d_n = (n+1)\,\lambda^n - na\lambda^{n-1}.$$

Dacă presupunem $ad - bc = 1$, rezultă $\lambda_1 - \lambda_2 = 1$. Deci,

$$a_n = n + 1 - nd;\quad b_n = nb;\quad c_n = nc;\quad d_n = n + 1 - na;\qquad P_0(n) = \frac{nb}{(1-a)\,n+1}.$$

Cînd $n \to \infty$, $P_0(n) \to \frac{b}{1-a} = 1$.

Exemplul 2. Construim funcția vectorială generatoare corespunzătoare procesului (2). Este evident că

$$\Phi_1(1;\ x^1,\ x^2,\ x^3) = q_1 x^1 + p_1 x^2 x^3,$$
$$\Phi_2(1;\ x^1,\ x^2,\ x^3) = q_2 x^2 + p_2 x^1 x^3,$$
$$\Phi_3(1;\ x^1,\ x^2,\ x^3) = x^3.$$

Deoarece $\Phi_3(1;\ x^1,\ x^2,\ x^3) = x^3$ vom avea, evident,

$$\Phi_3(n;\ x^1,\ x^2,\ x^3) = x^3.$$

Prin urmare, ne vom mărgini să studiem vectorul cu două dimensiuni $\psi(n; x^1, x^2)$, cu componentele $\psi_1(n; x^1, x^2) = \Phi_1(n; x^1, x^2, x^3)$ și $\psi_2(n; x^1, x^2) = \Phi_2(n; x^1, x^2, x^3)$ tratînd pe x^3, ca un parametru.

Vom pune

$$r_1 = p_1 x^3, \quad r_2 = p_2 x^3$$

și vom avea

$$\psi_1(1; x^1, x^2) = q_1 x^1 + r_1 x^2,$$
$$\psi_2(1; x^1, x^2) = r_2 x^1 + q_2 x^2.$$

Dacă punem

$$\psi_1(n; x^1, x^2) = a_n x^1 + b_n x^2,$$
$$\psi_2(n; x^1, x^2) = c_n x^1 + d_n x^2.$$

Deoarece acest vector este a n-a iterată a vectorului precedent, vom avea egalitatea între matrice

$$\begin{Vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} q_1 & r_1 \\ r_2 & q_2 \end{Vmatrix}^n.$$

În acest caz, $D(\lambda) = \lambda^2 - (q_1 + q_2)\lambda + q_1 q_2 - r_1 r_2$. Discriminantul este $(q_1 - q_2)^2 + 4 r_1 r_2 = (q_1 - q_2)^2 + 4 p_1 p_2 (x^3)^2$, deci întotdeauna pozitiv. $D(\lambda)$ are două rădăcini reale distincte λ_1, λ_2, care, pentru x^3 mai mic în modul decît 1, sînt mai mici în modul decît 1.

Prin urmare, după formula mai sus amintită

$$a_n = \frac{q_2 - \lambda_1}{D'(\lambda_1)}\lambda_1^n + \frac{q_2 - \lambda_2}{D'(\lambda_2)}\lambda_2^n, \quad b_n = \frac{r_1}{D'(\lambda_1)}\lambda_1^n + \frac{r_1}{D'(\lambda_2)}\lambda_2^n$$
$$c_n = \frac{r_2}{D'(\lambda_1)}\lambda_1^n + \frac{r_2}{D'(\lambda_2)}\lambda_2^n, \quad d_n = \frac{q_1 - \lambda_1}{D'(\lambda_1)} + \frac{q_2 - \lambda_2}{D'(\lambda_2)}\lambda_2^n.$$

Deci, avem

$$\Phi_1(n; x^1, x^2, x^3) = a_n x^1 + b_n x^2.$$
$$\Phi_2(n; x^1, x^2, x^3) = c_n x^1 + d_n x^2;$$

iar $P_{1,(i,j,k)}(n)$ este coeficientul termenului $(x^1)^i (x^2)^j (x^3)^k$.

Deoarece putem scrie

$$a_n = \sum_s \lambda_{n,s}(x^3)^s, \quad b_n = \sum_s \mu_{n,s}(x^3)^s,$$
$$c_n = \sum_s \lambda'_{n,s}(x^3)^s, \quad d_n = \sum_s \mu'_{n,s}(x^3)^s,$$

rezultă

$$P_{1,(1,0,s)}(n) = \lambda_{n,s}, \quad P_{1,(0,1,s)}(n) = \mu_{n,s},$$
$$P_{2,(1,0,s)}(n) = \lambda'_{n,s}, \quad P_{2,(0,1,s)}(n) = \mu'_{n,s}.$$

Dacă, de exemplu, $n = 2m$,

$$a_n = -\frac{q_2 - q_1}{2}[C_{2m}^1 a^{2m-1} + C_{2m}^3 a^{2m-3} A + \cdots + C_{2m}^1 A^{m-1}] + [a^{2m} + C_{2m}^2 a^{2m-2} A + \cdots + A^m],$$

unde

$$a = \frac{q_1 + q_2}{2}, \quad A = \frac{q_1 - q_2}{2} + p_1 p_2 (x^3)^2.$$

Am dat aceste calcule ca un model pentru altele similare. Aprofundarea procesului (2) este utilă numai după ce se completează procesul, introducînd și eventualitatea absorbției unora dintre particulele active Cl sau H.

5. *Reacția în lanț cu absorbție.* Procesul (2) se completează, în acest caz, introducînd și tipul de particule ω corespunzînd dispariției particulelor prin absorbție:

$e_1 \to e_2 + e_3$ cu probabilitatea p_1,
$e_1 \to e_1$ cu probabilitatea q_1,
$e_1 \to \omega$ cu probabilitatea r_1,
$e_2 \to e_1 + e_3$ cu probabilitatea p_2,
$e_2 \to e_2$ cu probabilitatea q_2,
$e_2 \to \omega$ cu probabilitatea r_2,
$e_3 \to e_3$ cu probabilitatea 1,
$e_\omega \to e_\omega$ cu probabilitatea 1.

Funcția vectorială generatoare este, prin urmare,

$$\Phi_1(1, x) = p_1 x_2 x_3 + q_1 x_1 + r_1 x_4,$$
$$\Phi_2(1, x) = p_2 x_1 x_3 + q_2 x_3 + r_2 x_4,$$
$$\Phi_3(1, x) = x_3,$$
$$\Phi_4(1, x) = x_4.$$

Dacă punem

$$p_1x_1 = s_1, \quad p_2x_2 = s_2$$

și observăm că

$$\Phi_3(n, x) = x_3,$$

iterata a n-a a vectorului Φ este iterată a n-a a transformării

$$\begin{aligned} x_1^1 &= q_1x_1 + s_1x_2 + r_1x_4, \\ x_2^1 &= s_2x_1 + q_2x_2 + r_2x_4, \\ x_4^1 &= x_4. \end{aligned}$$

Rădăcinile ecuației caracteristice $(1 - \lambda)\, D(\lambda)$ sînt 1 și λ_1, λ_2 din cazul precedent. Prin urmare, dacă punem

$$\begin{aligned} x_1^{(n)} &= a_nx_1 + b_nx_2 + c_nx_4, \\ x_2^{(n)} &= d_nx_1 + e_nx_n + f_nx_4, \\ x_4^{(n)} &= x_4, \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} &a_n = A_0 + A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n;\ b_n = B_0 + B_1\lambda_1^n + B_2\lambda_2^n; \\ &c_n = C_0 + C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n;\ d_n = D_0 + D_1\lambda_1^n + D_2\lambda_2^n; \\ &e_n = E_0 + E_1\lambda_1^n + E_2\lambda_2^n;\ f_n = F_0 + F_1\lambda_1^n + F_2\lambda_2^n, \end{aligned}$$

avem

$$A_0 = E_0 = 0,\ B_0 = D_0 = 1 + \frac{q_1q_2 - p_1p_2x_3^2}{(1 - q_2)(1 - q_1) - p_1p_2x_3^2},$$

$$C_0 = 1 + \frac{q_1q_2 - p_1p_2x_3^2 - r_1q_2 + p_1r_2x_3 + r_1}{(1 - q_2)(1 - q_1) - p_1p_2x_3^2},$$

$$F_0 = 1 + \frac{q_1q_2 - p_1p_2x_3^2 - r_2q_1 + p_2r_1x_3 + r_2}{(1 - q_2)(1 - q_1) - p_1p_2x_3^2}.$$

Să observăm că, pentru $n \to \infty$, funcția vectorială generatoare Φ devine

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= B_0x_2 + C_0x_4,\ \Phi_3 = x^3, \\ \Phi_2 &= B_0x_1 + F_0x_4,\ \Phi_4 = x^4. \end{aligned}$$

Pe aceste expresii se pot calcula probabilitățile asimptotice ale diferitelor reacții.

§ 12. Procese stochastice ramificate

1. *Definiția procesului stochastic ramificat cu timp continuu.* Reacțiile în lanț constituie, după cum am văzut, o categorie de procese markoviene discontinue în timp, care intră în clasa proceselor stochastice ramificate.

Vom considera acum procesul continuu în timp. Teoria proceselor ramificate înlocuiește sistemele constituite, în principiu, dintr-un număr infinit de ecuații liniare, printr-una sau un număr finit de ecuații funcționale sau diferențiale neliniare. Cu toate acestea, studiul unora dintre problemele asociate sistemului este mai ușor de efectuat pe aceste ecuații neliniare, decît prin ecuațiile liniare în număr infinit.

Noțiunile proprii proceselor continue sînt aceleași cu noțiunile pe care le-am introdus în studiul reacțiilor în lanț. Le vom relua pentru a adăuga unele preciziuni necesare.

Fie 1, 2, ..., r cele r tipuri de particule, la care adăugăm tipul ω corespunzînd absorbției sau dispariției oricăreia dintre particule. (Absorbția sau dispariția se va interpreta deci ca proces de trecere a unei particule de tip determinat j într-o particulă de tip ω.)

Vom deosebi mai multe clase de procese stochastice ramificate: prima clasă, ale cărei aplicații sînt cele mai frecvente, este caracterizată astfel:

În orice moment, o particulă $e_j (j = 1, 2, ..., r)$ preferă unul sau altul dintre următoarele trei procese:

a) rămîne neschimbată $e_j \to e_j$;

b) dispare $e_j \to e_\omega$;

c_1) se transformă într-un complex determinat.

În această clasă intră cele mai curente reacții chimice în lanț, precum și numeroase fenomene fizice.

A doua clasă, în care partea stochastică este mai mare, se caracterizează prin aceea că procesul c se prezintă sub forma următoare:

c_2) particula e_j se transformă, cu probabilitățile respective, într-unul dintre complexele $(a)_{j,1}, (a)_{j,2}, ..., (a)_{j,kj}$, numărul acestor complexe fiind în general mic, așa cum este cazul în unele reacții chimice în lanț.

În sfîrșit, clasa cea mai generală este aceea pentru care putem înlocui cele trei procese printr-unul singur,

$$e_j \to (\alpha_{1,j}e_1 + \alpha_{2,j}e_2 + \cdots + \alpha_{r,j}e_r + \alpha_j\omega) \quad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

unde $\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \ldots, \alpha_{r,j}$ pot avea orice valori, iar $\alpha_j = 0$ sau 1.

Vom reține aici, atît în vederea legăturii cu fenomenele naturii cît și pentru motive de simplitate, numai procesele din prima clasă.

Presupunem că procesul este diferențiabil, deci

$$P_{j,(a)}(t,\ t+\Delta) = \delta_{j,(a)} + p_{j,(a)}(t)\,\Delta + \theta(\Delta), \tag{1}$$

unde

$$\delta_{j,(a)} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } (a) = j, \\ 0 \text{ dacă } (a) \neq j. \end{cases}$$

Procesele cu condiția (c_1), pe care le vom cerceta, vor fi caracterizate prin egalitățile

$$p_{j,(a)}(t) = 0 \text{ dacă } (a) \neq j,\ \omega,\ (\omega)_j. \tag{2}$$

Vom nota

$$P_{j,(\omega)_j}(t) = p_j(t);\ q_{j,\omega}(t) = q_1(t);\ p_{j,j}(t) = r_j(t). \tag{2'}$$

Rezultă că, dacă $(a) \neq j, \omega, (\omega)_j$, avem

$$P_{j,(a)}(t, t+\Delta t) = \theta(\Delta). \tag{3}$$

Este de asemenea evident că

$$p_j(t) \geqslant 0,\ q_j(t) \geqslant 0,\ r_j(t) \geqslant 0, \tag{4}$$

$$p_j(t) + q_j(t) + r_j(t) = 0.$$

2. *Ecuațiile diferențiale ale procesului.* Egalitățile (1) cu condițiile (2), (3), (4) conduc la următoarele sisteme de ecuații diferențiale

$$\frac{\partial P_{j,(a)}(s,t)}{\partial s} = -r_j(s)\,P_{j,(a)}(s,t) - p_j(s)\,P_{(\omega)_j,(a)}(s,t) \quad (a) \neq \omega, \tag{5}$$

$$\frac{\partial P_{j,\omega}(s,t)}{\partial s} = -r_j(s)\,P_{j,\omega}(s,t) - q_j(s) - p_j(s)\,P_{(\omega)_j,\ \omega}\ (s,t), \tag{6}$$

deoarece $P_{\omega,(a)}(s,t) = 0$ dacă $(a) \neq \omega$ și $P_{\omega,(a)}(s,t) = 1$, dacă $(a) = \omega$.

Folosind formula (6), acest sistem se poate încă scrie

$$\frac{\partial P_{j,(a)}(s,t)}{\partial s} = -r_j(s)\,P_{j,(a)}(s,t) \times$$

$$\times\, p_j(s) \sum_{\Sigma\Sigma(c)_{hk}=(a)} \prod_{h}^{1,\ldots,r} \prod_{k}^{1,\ldots,\omega_{hj}} P_{h(c)_{hk}}(s,t), \tag{7}$$

$$\frac{\partial P_{j,\omega}(s,t)}{\partial s} = -r_j(s)\,P_{j,\omega}(s,t) - q_s(s) - p_j(s) \prod_{h}^{1,\ldots,r} P_{h,\omega}(s,t) \tag{8}$$

iar pentru $s = t$, presupunînd $P_{j,(a)}(t,t) = 0$ dacă $(a) \neq j$, avem $P_{jj}(t,t) = 1$.

Integrarea acestui sistem de ecuații se face, așa cum rezultă din structura lui, din aproape în aproape. Într-adevăr, dacă probabilitățile $P_{j,(a)}(s,t)$, $(j = 1, 2, \ldots, r)$ sînt cunoscute pentru $|\alpha| < |a|$, atunci ultimul termen din ecuația (7) este o funcție cunoscută pentru orice j, deci ecuațiile corespunzătoare pot fi integrate cu condițiile limită de mai sus.

3. *Reacția* HCl. Ca exemplu vom considera reacția, presupusă continuă, a HCl:

$$r = 3,\ (\omega)_1 = e_1 + e_2,\ (\omega)_2 = e_3 + e_1,\ (\omega)_3 = e_3.$$

Ecuațiile devin

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial P_{1,(a)}(s,t)}{\partial s} = -r_1(s)\,P_{1,(a)}(s,t) - \\
&- p_1(s) \sum_{(a)_2+(a)_3=(a)} P_{2,(a)_2}(s,t)\,P_{3,(a)_3}(s,t), \\
&\frac{\partial P_{2,(a)}(s,t)}{\partial s} = -r_2(s)\,P_{2,(a)}(s,t) - \\
&- p_2(s) \sum_{(b)_3+(b)_1=(b)} P_{3,(b_3)}(s,t)\,P_{1,b_1}(s,t), \\
&\frac{\partial P_{3,(a)}(s,t)}{\partial s} = 0, \text{ deoarece } p_3 = q_3 = r_3 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

La acestea adăugăm cele trei ecuații, de asemenea neliniare, separate, pentru determinarea probabilităților de absorbție:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial P_{1,\omega}(s,t)}{\partial s} &= -r_1(s)\,P_{1,\omega}(s,t) - q_1(s) - \\
&\quad - p_1(s)\,P_{2,\omega}(s,t)\,P_{3,\omega}(s,t), \\
\frac{\partial P_{2,\omega}(s,t)}{\partial s} &= -r_2(s)\,P_{2,\omega}(s,t) - q_2(s) - \\
&\quad - p_2(s)\,P_{1,\omega}(s,t)\,P_{3,\omega}(s,t) \\
\frac{\partial P_{3,\omega}(s,t)}{\partial s} &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Ultima ecuație din (10) ne dă

$$P_{3,\omega}(s,t) = 0. \tag{11}$$

Deci sistemul se reduce la

$$\frac{\partial P_1}{\partial r} = -r_1(s)\,P_1 - q_1(s);\quad \frac{\partial P_2}{\partial s} = -r_2(s)\,P_2 - q_2(s) \tag{12}$$

notînd $P_{1,\omega} = P_1(s)$, $P_{2,\omega} = P_2(s)$, cu condițiile marginale $P_{1,\omega}(t) = 0$, $P_{2,\omega}(t) = 0$. Vom avea deci, ținînd seama de condițiile limită,

$$P_{1,\omega}(t,t) = 0,\ P_{2,\omega}(t,t) = 0:$$

$$P_{1,\omega}(s,t) = e^{\int_s^t r_1(u)\,du} \int_s^t q_1(v)\ e^{-\int_v^t r_1(u)\,du}\,dv;$$

$$P_{2,\omega}(s,t) = e^{\int_s^t r_2(u)\,du} \int_s^t q_2(v)\ e^{-\int_v^t r_2(u)\,du}\,dv.$$

Se verifică imediat că $P_{1,\omega}(s,t)$ ca și $P_{2,\omega}(s,t)$ sînt crescătoare cu t. Dacă procesul este omogen, p_j, q_j, r_j sînt constante:

$$P_{1,\omega}(t-s) = -\frac{q_1}{r_1}(1 - e^{r_1(t-s)}),$$

$$P_{2,\omega}(t-s) = -\frac{q_2}{r_2}(1 - e^{-r_2(t-s)}).$$

Reamintim că $r_1, r_2 \leqslant 0$; $q_1, q_2 \geqslant 0$. Valoarea asimptotică a probabilităților precedente este

$$\left.\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} P_{1,\omega}(t-s) &= -\frac{q_1}{r_1} \\
\lim_{t\to\infty} P_{2,\omega}(t-s) &= -\frac{q_2}{r_2}.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Pentru ca aceste limite să aibă sens probabilistic, este necesar și suficient ca $q_1 < |r_1|$, $q_2 < |r_2|$. În acest caz, procesul continuă indefinit. Dacă $q_1 = |r_1|$, avem

$$\lim_{t\to\infty} P_{1,\omega}(t-s) = 1,$$

deci *probabilitatea de absorbție a particulelor de tip* 1 *este* 1.

În această regulă de comportare asimptotică intervine numai raportul între q și $|r|$.

Se știe dintr-o teoremă a lui Perron că rezultatul este același dacă $q_1(t) \underset{t\to\infty}{\to} q_1$, $r_1(t) \underset{t\to\infty}{\to} r_1$.

În ce privește ecuațiile (9), ultima dintre ele ne dă

$$P_{3,(a)}(s,t) = P_{3,(a)}(t,t), \tag{14}$$

deci,

$$P_{3,3}(s,t) = 1;\ P_{3,(a)}(s,t) = 0 \text{ pentru } (a) \neq 3.$$

Cu aceste valori, primele două ecuații (9) devin

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial P_{1,\omega}(s,t)}{\partial s} &= -r_1(s)\,P_{1,(a)}(s,t) - p_1(s)\,P_{2,(a_1,a_2,a_3)}(s,t), \\
\frac{\partial P_{2,\omega}(s,t)}{\partial s} &= -r_2(s)\,P_{2,(a)}(s,t) - p_2(s)\,P_{1,(a_1,a_2,a_3-1)}(s,t),
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

dacă $a_3 \geqslant 1$.

Pentru cazul $(a) = (a_1, a_2, 0)$ ecuațiile devin

$$\frac{\partial P_{1,a}(s,t)}{\partial s} = -r_1(s)\,P_{1,a}(s,t);\quad \frac{\partial P_{2,a}(s,t)}{\partial s} = -r_2(s)\,P_{2,a}(s,t).$$

Cu condițiile limită

$$P_{1,(a)}(t,t) = \begin{cases} 0 & (a) \neq (1,0,0) \\ 1 & (a) = (1,0,0); \end{cases} \qquad P_{2,(a)}(t,t) = \begin{cases} 0 & (a) \neq (0,1,0) \\ 1 & (a) = (0,1,0) \end{cases}$$

găsim pentru acestea

$$\left.\begin{aligned} &P_{1,(a)}(s,t) = 0 \text{ pentru } (a) \neq (1,0,0);\ P_{1,1}(s,t) = e^{-\int_s^t r_1(u)\,du} \\ &P_{2,(a)}(s,t) = 0 \text{ pentru } (a) \neq (0,1,0);\ P_{2,2}(s,t) = e^{-\int_s^t r_2(u)\,du} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Cu ajutorul acestor valori se pot construi, din aproape în aproape, integralele ecuațiilor (15) pentru orice (a).

4. *Cele două funcții vectoriale generatoare și relațiile lor.* În cazul procesului continuu, pe lîngă funcția vectorială generatoare

$$\left.\begin{aligned} \Phi_j(s,t;x) &= \sum P_{j,(a)}(s,t)\, x^{(a)} + P_{j,\omega}(s,t)\, x_{r+1} = \\ &= \sum_{\substack{0,1,\ldots,\infty \\ a_1,\ldots a_r}} P_{j,(a_1,\ldots,a_r)}(s,t) \prod_{j=1,\ldots,r} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_r^{a_r} + P_{j,\omega}(s,t)\, x_{r+1}, \\ \Phi_{r+1} &= x_{r+1}, \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

introducem și funcția asociată vitezelor de variație $p_{j,(a)}$ din (1):

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_j(t,x) = \sum_a p_{j,(a)}(t)\, x^a + p_{j,\omega}(t)\, x_{r+1} \quad (j = 1,2,\ldots,r) \\ &\varphi_{r+1}(t;x) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Deoarece potrivit cu (1) $\sum_{(a)\neq j} p_{j,(a)}(t) = |p_{j,j}(t)|$, iar $p_{j,(a)} > 0$, pentru $(a) \neq j$, rezultă că seriile (18) ca și (17) sînt absolut convergente pentru $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_r| < 1$.

Se vede imediat, de asemenea, din (1), că

$$\varphi_j(t;1) = 0. \quad (19)$$

Se verifică imediat că între vectorii Φ și φ există următoarea relație

$$\Phi(t, t+\Delta;\ x) = x + \varphi(t;x)\,\Delta + \theta(\Delta), \quad (20)$$

cu ajutorul căreia se stabilesc următoarele două sisteme diferențiale:

1°. Sistemul de ecuații

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial s} = -\underset{s<t}{\Phi_k}(s,\Phi), \quad (k = 1,2,\ldots,r) \quad (21)$$

cu condițiile limită $\underset{s=t}{\Phi_k}(t,t;\ x) = x_k$

2°. Ecuația unică

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\sum_{k=1,\ldots,r} \varphi_k(t;x)\,\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \quad (22)$$

pentru care determinăm r soluții

$$\underset{(t=s)}{\Phi_j}(s,s;\ x) = \underset{(j=1,2,\ldots,r)}{x_j}.$$

Pentru a stabili aceste relații diferențiale plecăm de la relația funcțională vectorială

$$\Phi(s,t;x) = \Phi(s,u;\ \Phi(u,t;\ x)) \quad (s \leqslant u \leqslant t), \quad (23)$$

care, dacă facem $u = s + \Delta$ și ținem seama de (20), devine

$$\Phi(s,t;x) = \Phi(s+\Delta,t;x) + \varphi(s, F(s+\Delta;t,x)\,\Delta) + \theta\Delta,$$

de unde sistemul (21).

Dacă în (23) înlocuim pe t cu $t+\Delta$ și u cu t, obținem mai întîi egalitatea

$$\Phi(s,t+\Delta,x) = \Phi(s,t;\Phi(t,t+\Delta;\ x)) = \Phi(s,t;\ x + \varphi(t,x)\,\Delta + \theta(\Delta))$$

sau, încă, ținînd seama că funcțiile Φ și φ sînt analitice în domeniul $|x_k| \leqslant 1$,

$$\Phi(s,t+\Delta;\ x) = \Phi(s,t;\ x) + \Delta \sum_{k=1,\ldots,r} \frac{\partial \Phi_k}{\partial t_k}\,\varphi_k(t,x) + \theta(\Delta).$$

Rezultă imediat ecuația (22).

Presupunînd că funcțiile $p_{j,(a)}(t)$ sînt date în condiții pentru care sistemele precedente au soluția unică, vectorul Φ, odată determinată din sistemul (21) sau din ecuația (22), probabilitățile de trecere $P_{j,(a)}(s,t)$ sînt coeficienții dezvoltării acestor funcții în serii de puteri.

Vom reține în particular atenția coeficienților lui x_{r+1}, precum și comportarea diferitelor probabilități cînd $t \to \infty$.

Pentru diferite aplicații și teoreme speciale, cititorul poate folosi lucrările de specialitate, în primul rînd expunerea sistematică a lui B. Sevastianov, *Teoria proceselor stochastice ramificate* (Uspehi matematiceskii nauk, nr. 6, 1951).

§ 13. Lanțuri multiple

1. *Relații funcționale.* Un lanț multiplu de ordin p este definit de egalitățile

$$P_{E_{j_1} j_2 \ldots j_{n-1}}(E^n_{j_n}) = P_{E^{n-p}_{j_{n-p}} \cap E^{n-p+1}_{j_{n-p+1}} \cap \cdots \cap E^{n-1}_{j_{n-1}}}(E^n_{j_n}), \tag{1}$$

unde probabilitățile condiționate care figurează în ambii membri sînt definite în § 2.

Dacă desfacerile sînt aceleași pentru orice n, vom putea întrebuința, fără ambiguitate, notația probabilităților de trecere definită de egalitățile

$$P_{E^{n_1}_{l_1} \cap E^{n_2}_{l_2} \cap \cdots \cap E^{n_p}_{l_p}}(E^n_l) = P_{l_1 l_2 \ldots l_p, l}(n_1, n_2, \ldots, n_p; n),$$
$$n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots n_p \leqslant n. \tag{2}$$

Aceste probabilități de trecere, raportate în genere la evenimente, vor fi, în cele ce urmează, interpretate cîte o dată în relație cu valorile unui șir de variabile aleatoare $x^1, x^2, \ldots, x^n, \ldots$, definite fiecare pentru sistemul de evenimente al desfacerii de același rang. Cum noi vom presupune că desfacerile sînt identice, are sens precis afirmația că, pentru evenimentul $E^n_j = E_j$, funcția x^n ia valoarea a_j. Probabilitatea care figurează în (2) este probabilitatea condiționată de a avea valoarea a_l la momentul n, dacă la momentele anterioare și succesive $n_1, n_2, \ldots, n_p$, am avut valorile respective $a_{l_1}, a_{l_2}, \ldots, a_{l_p}$. Modul de exprimare referitor la valorile luate de variabilele respective ale șirului va fi întrebuințat în acest paragraf, fără însă a fi esențial legat de problemele pe care le examinăm.

Acest dublu aspect al lanțului: ca succesiune de evenimente — cînd va fi numit proces stochastic — și ca succesiune de valori — valorile unei funcții aleatoare — cînd reprezintă această funcție aleatoare — se va regăsi și pentru procesele continue în timp.

Valorile $P_{l_1, l_2, \ldots, l_p, l_{p+1}}(n, n+1, \ldots, n+p-1, n+p) = p_{l_1, l_2, \ldots, l_p, l_{p+1}}(n)$ constituie probabilitățile elementare ale lanțului. Ele verifică condițiile generale

$$p_{l_1, l_2, \ldots, l_{p+1}}(n) \geqslant 0, \quad \sum_{l_{p+1}}^{1, 2, \ldots, m} p_{l_1, l_2, \ldots, l_p, l_{p+1}}(n) = 1. \tag{3}$$

Pentru a găsi alte relații caracteristice lanțului, pe care le satisfac aceste probabilități, vom construi, mai întîi, sistemul de probabilități fundamentale diferite, precum urmează

$$P_{l_0, l_1, \ldots, l_{p-1}, k_0, k_1, \ldots, k_{p-1}}(r, r+1, \ldots, r+p-1; r+n, r+n+1, \ldots, r+n+p-1) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}}^{1, 2, \ldots, m} P_{l_0, l_1, \ldots, l_{p-1}, j_1}(r, r+1, \ldots, r+p-1; r+p) P_{l_1, l_2, \ldots, l_{p-1}, j_1, j_2}(r+1, \ldots, r+p-1, r+p; r+p+1) \ldots P_{j_{n-2} k_0, k_1, \ldots, k_{p-1}}(r+n-1, r+n, \ldots, r+n+p-1). \tag{4}$$

Probabilitățile fundamentale pe care le putem scrie fără ambiguitate $P_{\bar{l}, \bar{k}}(\bar{r}; \bar{s})$, unde $\bar{r}$ și $\bar{s}$ reprezintă succesiunea de momente $r, r+1, \ldots, r+p-1$, respectiv $s, s+1, \ldots, s+p-1 (s \geqslant r+p-1)$, iar $\bar{l}$ și $\bar{k}$ sistemele de indici $l_0, l_1, \ldots, l_{p+1}$; $h_0, h_1, \ldots, h_{p-1}$, verifică relația funcțională

$$P_{\bar{l}, \bar{k}}(\bar{r}, \bar{s}) = \sum_{\bar{h}} P_{\bar{l}, \bar{k}}(\bar{r}, \bar{u}) P_{\bar{h}, \bar{k}}(\bar{u}, \bar{s}) \tag{5}$$

unde

$$r \leqslant u \leqslant s.$$

Demonstrarea teoremei reprezentată de (5) constă într-o simplă și imediată verificare.

Probabilitățile de trecere ale lanțului sînt legate între ele și cu probabilitățile fundamentale prin relațiile

$$P_{\bar{l}, k}(\bar{r}; r+n) = \sum_{h} P_{\bar{l}, \bar{h}}(\bar{r}, \overline{r+u}) P_{\bar{h}, k}(\overline{r+u}, r+n), \tag{6}$$

unde

$$0 \leqslant u \leqslant n.$$

În cazul lanțului simplu, probabilitățile fundamentale și probabilitățile $P_{h, k}(r, s)$ coincid. De aceea, relațiile funcționale (5) și relațiile (6) coincid. Pentru lanțurile multiple, numai probabilitățile fundamentale, considerate ca operatori, verifică relația de propagare (5). Aceste probabilități generează probabilitățile condiționate propriu-zise, prin intermediul relațiilor (6).

Fiind cunoscute probabilitățile elementare $P_{h_1, h_2, \ldots, h_{p+1}}(r, r+1, \ldots, r+p)$ pentru fiecare r, se pot construi atît probabilitățile fundamentale cît și cele de trecere. În particular,

$$P_{\bar{h}, l}(\bar{r}, t) = \sum_{\bar{k}} P_{\bar{h}, \bar{k}}(\bar{r}, \overline{t-p})\, P_{\bar{k}, l}(\overline{t-p}, t).$$

Dacă

$$P_{h_1, h_2, \ldots, h_{p-1}}(r, r+1, \ldots, r+p) = p_{h_1, h_2, \ldots, h_{p+1}},$$

independent de r, lanțul este omogen.

2. *Reducerea la un lanț simplu.* În reprezentarea sa prin probabilitățile de bază $P_{\bar{i}, \bar{k}}(r, s)$, legate prin relațiile de propagare (5), lanțul poate fi considerat și ca un lanț simplu.

Sistemul de valori $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_{p-1})$ cu $l_0, l_1, \ldots, l_{p-1} = 1, 2, \ldots, m$ îi facem să corespundă biunivoc și numerele șirului $1, 2, \ldots, m^p$, ceea ce reprezintă o numerotare a evenimentelor $E^r_{l_0} \cap E^{r+1}_{l_1} \cap \cdots \cap E^{r+p-1}_{l_{p-1}} = \mathfrak{E}^r$. Dacă scriem

$$\Pi_{l, k}(r, s) = P_{l, k}(\bar{r}, \bar{s}),$$

deoarece

$$\Pi_{l, k}(r, s) = \sum_{h}^{1, 2, \ldots, m^p} \Pi_{l, h}(r, u)\, \Pi_{h, k}(u, s),$$

oricare ar fi u cuprins între r și s, evenimentele $\mathfrak{E}^r_l$ formează un *lanț Markov simplu.*

Acest lanț reprezintă, într-o bună măsură, mai cu seamă în ce privește comportarea asimptotică, lanțul multiplu de ordinul p considerat.

În teza sa din 1934, Gh. Mihoc a asociat unui lanț multiplu de ordinul p un lanț simplu, referindu-se nu la evenimente, ci la variabilele aleatoare $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$, care corespund desfacerilor succesive. Vom presupune că $x^{(n)}$ poate lua valorile $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Dacă $f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ este o funcție determinată de variabilele reale $z_1, z_2, \ldots, z_m$, relația

$$y^{(l)} = f(x^{(lm+1)}, x^{(lm+2)}, \ldots, x^{(l+1)m})$$

ne dă un lanț simplu de variabile aleatoare $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(l)}, \ldots$.

Alegerea funcției f este indicată de probleme. Pentru a afla comportarea sumei variabilelor $x^{(1)} + x^{(2)} + \cdots + x^{(n)}$ cînd $n \to \infty$ este suficient să luăm $f \equiv z_1 + z_2 + \cdots + z_m$ și atunci, avînd

$$y^{(1)} + y^{(2)} + \cdots + y^{(l)} = x^{(1)} + x^{(2)} + \cdots + x^{(pl)},$$

legea limită redusă a sumei $x^{(1)} + x^{(2)} + \cdots + x^{(ml)}$ a variabilelor din lanțul multiplu de ordinul p este aceeași cu legea redusă a sumei variabilelor unui lanț Markov simplu.

§ 14. Reversibilitatea și stabilitatea proceselor în lanț multiplu. Teorema lui Mihoc

1. Reversibilitatea urmînd procedeul întrebuințat în cazul lanțului simplu. Vom demonstra mai întîi.

Teorema lui Mihoc. *Lanțurile Markov multiple de ordinul k sînt reversibile cu păstrarea ordinului.*

Vom face demonstrație pentru $k = 2$ numai pentru a simplifica scrierea.

Fie $E^n_{l_n}(n = 1, 2, \ldots;\ l_n = 1, 2, \ldots, m)$ o succesiune de evenimente în lanț Markov dublu.

Aplicînd formula (4), § 2, și ținînd seama că evenimentele formează un lanț Markov dublu, obținem

$$P(E^n_{l_n} \cap E^{n+p}_{l_{n+1}} \cap E^{n+2}_{l_{n+2}} \cap E^{n+3}_{l_{n+3}}) =$$
$$= P(E^n_{l_n})\, P_{E^n_{l_n}}(E^{n+1}_{l_{n+1}}) P_{E^n_{l_n} \cap E^{n+1}_{l_{n+1}}}(E^{n+2}_{l_{n+2}})\, P_{E^{n+1}_{l_{n+1}} \cap E^{n+2}_{l_{n+2}}}(E^{n+3}_{l_{n+3}}) \qquad (1)$$

și, în același timp

$$P(E^n_{l_n} \cap E^{n+1}_{l_{n+1}} \cap E^{n+2}_{l_{n+2}} \cap E^{n+3}_{l_{n+3}}) =$$
$$= P(E^{n+3}_{l_{n+3}})\, P_{E^{n+3}_{l_{n+3}}}(E^{n+2}_{l_{n+2}})\, P_{E^{n+3}_{l_{n+3}} \cap E^{n+2}_{l_{n+2}}}(E^{n+1}_{l_{n+1}})\, P_{E^{n+3}_{l_{n+1}} \cap E^{n+2}_{l_{n+2}} \cap E^{n+1}_{l_{n+1}}}(E^n_{l_n}), \qquad (2)$$

deci

$$P(E^{n+3}_{l_{n+3}})\, P_{E^{n+3}_{l_{n+1}}}(E^{n+2}_{l_{n+2}})\, P_{E^{n+3}_{l_{n+3}} \cap E^{n+2}_{l_{n+2}}}(E^{n+1}_{l_{n+1}})\, P_{E^{n+3}_{l_{n+3}} \cap E^{n+2}_{l_{n+2}} \cap E^{n+1}_{l_{n+1}}}(E^n_{l_n}) =$$
$$= P(E^n_{l_n})\, E_{E^n_{l_n}}(E^{n+1}_{l_{n+1}})\, P_{E^n_{l_n} \cap E^{n+1}_{l_{n+1}}}(E^{n+2}_{l_{n+2}})\, P_{E^{n+1}_{l_{n+1}} \cap E^{n+2}_{l_{n+2}}}(E^{n+3}_{l_{n+3}}). \qquad (3)$$

În același mod găsim

$$P(E_{l_{n+3}}^{n+3})\ P_{E_{l_{n+3}}^{n+3}}(E_{l_{n+2}}^{n+2})\ P_{E_{l_{n+3}}^{n+3}\cap E_{l_{n+2}}^{n+2}}(E_{l_{n+1}}^{n+1}) =$$

$$= P(E_{l_{n+1}}^{n+1})\ P_{E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_{n+2}}^{n+2})\ P_{E_{l_{n+1}}^{n+1}\cap E_{l_{n+2}}^{n+2}}(E_{l_{n+3}}^{n+3}). \tag{4}$$

Divizînd membru cu membru (3) și (4), obținem

$$P_{E_{l_{n+3}}^{n+3}\cap E_{l_{n+2}}^{n+2}\cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_n}^{n}) =$$

$$= P(E_{l_n}^{n})\ P_{E_{l_n}^{n}}(E_{l_{n+1}}^{n+1})\ P_{E_{l_n}^{n}\cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_{n+2}}^{n+2})/P(E_{l_{n+1}}^{n+1})\ P_{E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_{n+2}}^{n+2}). \tag{5}$$

Prin urmare, membrul întîi nu depinde de $E_{l_{n+3}}^{n+3}$ și avem

$$P_{E_{l_{n+3}}^{n+3}\cap E_{l_{n+2}}^{n+2}\cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_n}^{n}) = P_{E_{l_{n+2}}^{n+2}\cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_n}^{n}).$$

Procesul invers este un lanț Markov de ordinul al doilea. Mai trebuie să arătăm că lanțul nu este degenerat, că ordinul este efectiv doi. Este suficient, pentru aceasta, să verificăm că membrul al doilea al relației (5) depinde efectiv de $E_{l_{n+2}}^{n+2}$. Presupunem că raportul din membrul al doilea din (5) nu depinde de $E_{l_{n+2}}^{n+2}$. Dacă punem

$$P(E_{l_n}^{n})\ P_{E_{l_n}^{n}}(E_{l_{n+1}}^{n+1})\ P_{E_{l_n}^{n}\cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_{n+2}}^{n+2}) = \lambda P(E_{l_{n+1}}^{n+1})\ P_{E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_{n+2}}^{n+2}) \tag{6}$$

și λ nu depinde de $E_{l_{n+2}}^{n+2}$, însumăm în ambii membri din relația (6) în raport cu l_{n+2}. Vom găsi

$$P(E_{l_n}^{n})\ P_{E_{l_n}^{n}}(E_{l_{n+1}}^{n+1}) = \lambda P(E_{l_{n+1}}^{n+1}).$$

Introducînd în (6), rezultă

$$P_{E_{l_n}^{n}\cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_{n+2}}^{n+2}) = P_{E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_{n+2}}^{n+2}),$$

deci lanțul direct este el însuși de ordinul întîi, în contradicție cu ipoteza.

2. *Stabilitatea și comportarea asimptotică a lanțurilor multiple* se studiază în mod complet pe lanțul simplu la care ele se reduc cu ajutorul probabilităților fundamentale.

Să presupunem, de exemplu, că lanțul probabilităților fundamentale este ergodic,

$$\lim_{s\to\infty} P_{h_1h_2,\,k_1k_2}(r,\ r+1;\ s,\ s+1) = P_{k_1k_2}.$$

Dacă plecăm de la relația care definește probabilitățile condiționate

$$P_{h_1h_2,\,l}(r,\ r+1;t) = \sum_{k_1,\,k_2} P_{h_1h_2,\,k_1k_2}(r,\ r+1;$$

$$t-2,\ t-1)\ P_{k_1k_2,\,l}(t-2,\ t-1;\ t)$$

și dacă presupunem că probabilitățile elementare $P_{k_1k_2,\,l}(t-2,\ t-1,\ t) = p_{k_1k_2,\,l}$ sînt independente de t, rezultă că

$$\lim\ P_{h_1h_2,\,l}(r,\ r+1;\ t) = \sum_{k_1,\,k_2} P_{k_1k_2}p_{k_1k_2,\,l} = P_l.$$

Deci, lanțul propriu-zis este ergodic.

Proprietățile de stabilitate se reduc toate la proprietățile de stabilitate ale lanțurilor simple.

§ 15. Construirea unui lanț Markov cu matrice de trecere și repartiție inițială date

(elaborat de I. Cuculescu)

Vom dovedi aici

Teorema. *Fie I o mulțime cel mult numărabilă. $Q = (q_{ij})$, $i, j \in I$ o matrice stochastică (deci $q_{ij} \geqslant 0$, $\sum_j q_{ij} = 1$), μ o probabilitate pe I. Atunci există un cîmp de probabilitate $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ și pe el un lanț Markov omogen (x_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$ cu repartiția inițială μ și matrice de trecere Q. Anume, $E = I^{\{0,1,2,\ldots\}} = I\times I\times I\times\ldots = \{(i_n),\ n = 0, 1, 2, \ldots / i_n \in I\}$, $x_n = \mathrm{pr}_n(x_n((i_0, i_1, \ldots)) = i_n$, $\mathfrak{K} = \mathfrak{B}(x_n) = \mathfrak{A}(I)\otimes\mathfrak{A}(I)\otimes\ldots$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$*

Pentru ușurința notației, vom dovedi un enunț mai general:

Teoremă. *Fie I_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ mulțimi cel mult numărabile. Fie μ o probabilitate pe I_0 și, pentru fiecare n o familie de numere $(q_{ij}^{(n)})$, $i \in I_{n+1}$, $j \in I_{n+1}$, așa încît $q_{ij}^{(n)} \geqslant 0$, $\sum_j q_{ij}^{n} = 1$. Fie $E = \prod_{n=0}^{\infty} I_n$, $\mathfrak{K} = \bigotimes_{n=0}^{\infty} \mathfrak{A}(I_n)$, $x_n = \mathrm{pr}_n : E \to I_n$. Atunci există o probabilitate P pe $\{E, \mathfrak{K}\}$ unică pentru care $P((x_0 = i_0)\cap\cdots\cap(x_n = i_n)) = \mu(\{i_0\})\ q_{i_0i_1}^{(0)}\ldots q_{i_{n-1}i_n}^{(n-1)}$.*

Demonstrație. 1) Unicitatea rezultă din faptul că

$$\{(x_0 = i_0) \cap \cdots \cap (x_n = i_n)/n = 0,1,2, \ldots, i_k \in I_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n\}$$

este închisă la intersecții finite și generează $\mathfrak{K}$.

Vom dovedi existența lui P utilizînd teorema lui Caratheodory. Anume vom considera

$$\mathcal{C} = \{A \times I_{n+1} \times I_{n+2} \times \cdots / n = 0, 1, 2, \ldots, A \subset I_0 \times \cdots \times I_n\}.$$

Se verifică imediat că $\mathcal{C}$ este un corp care generează corpul borelian $\mathfrak{K}$.

Să considerăm, pe $I_0 \times \ldots \times I_n$, măsura P'_n care încarcă $\{(i_0, \ldots, i_n)\}$ cu $\mu(\{i_0\})\, q^{(0)}_{i_0 i_1} \ldots q^{(n-1)}_{i_{n-1} i_n}$.

Să observăm că $P'_{n+1} \circ \mathrm{pr}^{-1}_{I_0 \times \ldots \times I_n}{}^{I_0 \times \ldots \times I_{n+1}}$ încarcă $\{(i_0, \ldots, i_n)\}$ cu $\sum_j \mu(\{i_0\})\, q^{(0)}_{i_0 i_1} \ldots q^{(n-1)}_{i_{n-1} i_n}\, q^{(n)}_{i_n j} = \mu(\{i_0\})\, q^{(0)}_{i_0 i_1} \ldots q^{(n-1)}_{i_{n-1} i_n}$, deci coincide cu P'_n. În particular, $P'_n(I_0 \times \cdots \times I_n) = P'_{n-1}(I_0 \times \cdots \times I_{n-1}) = \cdots = P'_0(I_0) = \mu(I_0) = 1$, deci P'_0 sînt probabilități.

Putem defini acum o funcție $P: \mathcal{C} \to [0, 1]$ prin $P'(A \times I_{n+1} \times I_{n+2} \times \ldots) = P'_n(A)$, definiția fiind corectă ca urmare a relației $P'_{n+1}(A \times I_{n+1}) = P'_n(A)$ stabilită mai sus.

Avem $P'((x_0 = i_0) \cap \ldots \cap (x_n = i_n)) = P'(\{(i_0, \ldots, i_n)\} \times I_{n+1} \times \times \ldots) = P'_n(\{(i_0, \ldots, i_n)\}) = \mu(\{i_0\})\, q^{(0)}_{i_0 i_1} \ldots q^{(n-1)}_{i_{n-1} i_n}$.

Rămîne deci de demonstrat că P' se prelungește la o probabilitate pe $\mathfrak{K}$. Aceasta va rezulta din teorema lui Caratheodory, dacă arătăm că $B_n \in \mathcal{C}$, $B_n \supset B_{n+1}$, $\lim P'(B_n) > 0$ implică $\bigcap_n B_n \neq \varnothing$ deoarece $P'(C_1 \cup C_2) = P'(C_1) + P'(C_2)$ pentru $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $C_1 \cap C_2 = \varnothing$ se verifică imediat (C_1, C_2 „se aduc la același n", $C_1 = A_1 \times I_{n+1} \times I_{n+2} \times \ldots$, $C_2 = A_2 \times I_{n+1} \times I_{n+2} \times \times \ldots$, rezultă $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ etc.)

2) Pentru a dovedi afirmația de la sfîrșitul punctului 1, va fi suficient, dacă notăm pentru $B \subset \prod_{m=0}^{\infty} I_m$, $i_0 \in I_0, \ldots, i_n \in I_n$ cu $B_{(i_0, \ldots, i_n)} = \{(i_{n+1}, i_{n+2}, \ldots)/(i_0, \ldots, i_n, i_{n+1}, i_{n+2} \ldots) \in B\} \subset \prod_{m>n} I_m$, să găsim, fiind dați $B_n \supset B_{n+1}$, $B_n \in \mathcal{C}$ cu $\lim P'(B_n) > 0$, un șir $i_0 \in I_0, \ldots, i_k \in I_k, \ldots$, așa încît $(B_n)_{(i_0, \ldots, i_k)} \neq \varnothing$ pentru orice n și k.

În adevăr, considerînd $\omega = (i_0, \ldots, i_k, \ldots)$ vom avea $\omega \in \bigcap_n B_n$, căci pentru un n dat avem $B_n = A \times I_{p+1} \times I_{p+2} \times \ldots$, $\omega \in B_n$ este echivalent cu $(i_0, \ldots, i_p) \in A$ care la rîndul său este echivalent cu $(B_n)_{(i_0, \ldots, i_p)} \neq \varnothing$, fapt presupus adevărat.

3) Găsirea șirului $i_0, \ldots, i_k, \ldots$ de la punctul 2 este de fapt partea cea mai delicată a demonstrației.

Vom nota $E_p = \prod_{m \geq p} I_m$, cu $\mathcal{C}_p$ analogul lui $\mathcal{C}$ pentru $I_p, I_{p+1}, \ldots$; avem $\mathfrak{B}(\mathcal{C}_p) = \mathfrak{K}_p$ definit drept $\bigotimes_{m \geq p} \mathfrak{B}(I_m)$.

Lemă. $B \in \mathcal{C}_p$, $i_p \in I_p$ *implică* $B_{i_p} \in \mathcal{C}_{p+1}$.

În adevăr, $B = A \times I_{q+1} \times I_{q+2} \times \ldots$ și se constată că $B_{i_p} = A_{i_p} \times I_{q+1} \times I_{q+2} \times \ldots$, ceea ce dovedește lema (B_{i_p} este un caz particular al notației de la punctul 2: $B_{i_p} = \{(i_{p+1}, i_{p+2}, \ldots)/(i_p, i_{p+1}, i_{p+2}, \ldots) \in B\} \subset \prod_{m \geq p+1} I_m$).

Odată lema stabilită, vom continua construind, pentru orice $p \geq 1$ și orice $i \in I_{p-1}$, o funcție $P'_{i,p}: \mathcal{C}_p \to [0, 1]$ pentru care $P'_{i,p}(C_1 \cup C_2) = P'_{i,p}(C_1) + P'_{i,p}(C_2)$ pentru $C_1 \cap C_2 = \varnothing$ și astfel încît $P'(B) = \int P'_{i,1}(B_i)\, d\mu(\{i\})$, $P'_{i,p}(B) = \int P'_{j,p+1}(B_j)\, d\mu_{i,p}(j)$, unde $\mu_{i,p}$ vor fi probabilități pe I_p.

Avînd aceste elemente, demonstrația teoremei se încheie astfel: Fie $B_n \in \mathcal{C}$, $B_n \supset B_{n+1}$, $\lim P'(B_n) > 0$. Scriem $0 < \lim P'(B_n) = \int \lim P'_{i,1}((B_n)_i)\, d\mu(\{i\})$ și alegem i_0 astfel încît $\lim P'_{i_0,1}((B_n)_{i_0}) > 0$. Apoi scriem $0 < \lim P'_{i_0,1}((B_n)_{i_0}) = \int \lim P'_{j,2}(((B_n)_{i_0})_j)\, d\mu_{i_0,1}(j)$ și alegem i_1 astfel încît $\lim P'_{i_1,2}(((B_n)_{i_0})_{i_1}) > 0$. Continuăm astfel și obținem $i_0, i_1, \ldots, i_k, \ldots$ așa încît $\lim P'_{i_k,k+1}((B_n)_{(i_0, \ldots, i_k)}) > 0$. ($((B_n)_{i_0})_{i_1} = (B_n)_{(i_0, i_1)}$ etc.). În particular, $(B_n)_{(i_0, \ldots, i_k)} \neq \varnothing$, ceea ce se cerea.

4) A rămas de construit $P'_{i,p}$, $\mu_{i,p}$ cu proprietățile indicate.

Vom proceda astfel: alegem $\mu_{i,p}(\{j\}) = q^{(p-1)}_{ij}$ și construim $P'_{i,p}$ pe $\mathcal{C}_p$ (care este $\mathcal{C}$ pentru $I_p, I_{p+1}, \ldots$) la fel cum s-a construit P' pe $\mathcal{C}$ însă cu $\mu_{i,p}$ în loc de μ și considerînd numai $q^{(n)}_{ij}$ pentru $n \geq p$.

Pentru a dovedi relația $P'_{i,p}(B) = \int P'_{j,p+1}(B_j)\, d\mu_{i,p}(j)$ să observăm că ambii membri sînt „aditivi" în B, deci va fi suficient de considerat cazul $B = (i_p, \ldots, i_n) \times I_{n+1} \times I_{n+2} \ldots$

În acest caz $B_j = \varnothing$ cu excepția cazului $j = i_p$ în care $B_j = \{(i_{p+1}, \ldots, i_n)\} \times I_{n+1} \times I_{n+2} \times \ldots$ și relația se reduce la

$$q_{i,i_p}^{(p-1)} q_{i_p,i_{p+1}}^{(p)} \ldots q_{i_{n-1}i_n}^{(n-1)} = q_{i_p,i_{p+1}}^{(p)} q_{i_{p+1},i_{p+2}}^{(p+1)} \ldots q_{i_{n-1}i_n}^{(n-1)} \cdot \mu_{i,p}(\{i_p\}).$$

care e evident adevărată prin alegerea lui $\mu_{i,p}$.

Relația $P'(B) = \int P'_{i\,1}(B_i)\, d\mu(\{i\})$ se dovedește în mod analog (de fapt se pot imagina niște notații care să le unifice).

§ 16. Trecerile unui lanț Markov de la un eveniment la altul

Să considerăm că mulțimea stărilor unui lanț Markov neomogen este $\{1, 2, \ldots, N\}$. Evenimentele sistemului sînt diferitele reuniuni disjuncte de atomi: $\{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$, unde $1 \leqslant n \leqslant N$ și $j_1 < j_2 < \cdots < j_n$.

Probabilitățile de trecere de la un atom la altul sînt date de $p_{jk}(u, v)$, unde $j, k = 1, 2, \ldots, N$, $u \leqslant v (u, v = 0, 1, 2 \ldots) \cdot p_{jk}(u, v)$ reprezintă probabilitatea ca lanțul să fie la momentul v în starea k știind că la momentul u a fost în starea j.

Relațiile caracteristice acestor probabilități de trecere sînt

$$0 \leqslant p_{jk}(m, n) \leqslant 1, \sum_{k=1}^{N} p_{jk}(m, n) = 1, \tag{1}$$

relațiile lui Chapmann

$$p_{jk}(m, n) = \sum_{h=1}^{N} p_{jh}(m, l)\, p_{hk}(l, n), \tag{2}$$

unde $j, k = 1, 2, \ldots, N$, $m \leqslant l \leqslant n$, precum și condițiile

$$p_{jk}(m, m) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } j = k, \\ 0 & \text{dacă } j \neq k \end{cases} \tag{3}$$

$$p_{jk}(m, m+1) = p_{jk}(m), \tag{4}$$

$p_{jk}(m)$ fiind cunoscute pentru fiecare $m = 0, 1, 2, \ldots$

Dacă notăm cu S evenimentul $S = (s_1, s_2, \ldots, s_l)$ și prin $p_{jS}(m, n)$ probabilitatea de trecere de la atomul j la starea S, avem

$$p_{j,S}(m, n) = \sum_{k \in S} P_{j,k}(m, n). \tag{5}$$

Folosind relația (5) și relația lui Chapmann (3) obținem imediat egalitatea

$$p_{j,S}(m, n) = \sum_{h=1}^{N} p_{j,h}(m, l)\, p_{h,S}(l, n) \tag{6}$$

care generalizează pe (5).

Pentru a introduce o relație între probabilitățile $p_{S',S''}(m, n)$ de trecere de la evenimentul S' la evenimentul S'' trebuie să introducem o funcție aditivă $\pi(S)$ pe mulțimea evenimentelor S.

Funcția π are proprietățile: $\pi(S_1 \cup S_2) = \pi(S_1) + \pi(S_2)$ dacă $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ și $\pi(j) \neq 0$ pentru orice $j = 1, 2, \ldots, N$. Să definim,

$$p_{S',S''}(m, m) = \frac{\pi(S' \cap S'')}{\pi(S')}, \tag{7}$$

$$p_{S,k}(m, n) = \frac{1}{\pi(S)} \sum_{j \in S} \pi(j)\, p_{j,k}(m, n), \tag{8}$$

$$p_{S',S''}(m, n) = \frac{1}{\pi(S')} \sum_{j \in S'} \pi(j)\, p_{j,S''}(m, n). \tag{9}$$

Folosind (9) și (6) obținem imediat relația

$$p_{S',S''}(m, n) = \sum_{h=1}^{N} p_{S',h}(m, l)\, p_{h,S''}(l, n), \tag{10}$$

unde $m \leqslant l \leqslant n$

Se verifică ușor că făcînd $l = m$ și utilizînd (7) se regăsește relația (9).

BIBLIOGRAFIE

P. LAPLACE, *Théorie analytique des probabilités*, Paris, 1812.

J. BERTRAND *Calcul des probabilités*, Paris, 1888.

H. POINCARÉ. *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1912.

A. MARKOV, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Teubner, 1912.

E. CZUBER, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Teubner, 1914.

F. P. CANTELLI, *Sulla legge dei grandi numeri*, Rendiconti dell'Acad. dei Lincei, t. XI, fasc. VII, 1916.

F. P. CANTELLI, *La tendenza ad un limite nel senso del calcolo delle probabilità*, Rund. Circolo Mat., t. XLI, Palermo, 1916.

F. P. CANTELLI, *Considérations sur la convergence dans le calcul des probabilités*, Ann. del'Inst. H. Poincaré, t. 5, 1935.

C. CASTELNUOVO, *Calcolo della probabilità*, Roma, 1919.
E. BOREL, *Eléments de la théorie des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1924.
H. STEINHAUS, *Les probabilités dénombrables et leurs rapport à la théorie de la mesure*, Fundamenta math. 1, 4, 1922.
P. LEVY, *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1925.
R. DE MISES, *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*, Springer, Berlin, 1928.
A. KEYNES, *A treatise on Probability*, Macmillan, Londra, 1930.
R. DE MISES, *Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen*, 1931.
R. DE MISES, *La théorie des probabilités*, Fondements et applications, Ann. de l'Inst. H. Poincaré, 1932.
A. KOLMOGOROV, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer, Berlin, 1933.
E. BOREL, *La valeur pratique et la philosophie des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris.
E. TORNIER, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Teuber, Leipzig, 1936.
B. DE FINETTI, *La prévision, ses lois logiques, ses sources subjectives*, Ann. de l'Inst. H. Poincaré, VII, 1938.
H. REICHENBACH, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Leyden, 1935.
J. L. DOOB, *Stochastic Processus depending on a continuons Parameter*, Trans. of the Am. Math. Soc., 1937.
M. FRÈCHET, *Traité de calcul des probabilités*, vol. I et II Gauthier-Villars, Paris.
IDEM, *Les principaux courants dans l'évolution récente des recherches sur le calcul des probabilités*, Les travaux du Colloque de Genève consacré à la théorie des probabilités, 1937. Actualités scientifiques, Hermann, 1938.
O. ONICESCU și GH. MIHOC, *Calculul probabilităților*, București, 1939.
J. VILLE, *Sur les actiones du calcul des probabilités et leurs relations avec l'expérience* (vezi mai sus), Actualités scientifiques, Hermann, 1938).
R. DE MISES, *Quelques remarques sur les fondements du calcul des probabilités* (vezi mai sus, Actualités scientifiques, Hermann, 1938).
J. F. STEFFENSEN, Frequence et probabilité (vezi mai sus, Actualités scientifiques, Hermann, 1938).
A. WALD, *Über die Widerspruchlosigkeit der Kollektiv Begriffe* (vezi mai sus, Actualités scientifiques, Hermann, 1938).
W. WIENER, *The homogeneous chaos*, Ann. J. of Math. t. 60, 1938.
O. ONICESCU, *Definiția probabilității și problema ruletei*, Buletinul științific Ac. Rom. t. XXI, 1939.
IDEM, *Probabilitatea unui eveniment izolat*, Buletinul științific Ac. Rom., t. XXII, 1940.
H. CRAMER, *Mathematical method of statistics*, Princeton Univ. Press, 1946.
C. T. IONESCU TULCEA, *Mesures dans les espaces produits*, Rendiconti dell'Acad. dei Lincei, vol. VII, fasc. 5, 1949.
G. H. MARINESCU, *O generalizare a noțiunii de variabilă aleatorie*, Comunicările Ac. R.P.R., t. I, 1951.
N. FELLER, *An introduction to Probability Théory and its applications*, New York, 1950.
A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET, *Théorie des fonctions aléatoires*, Paris, 1953.

CAPITOLUL II

LANȚURI CU LEGĂTURI COMPLETE

§ 1. Lanțuri oarecare. Spațiul lanțurilor. Evenimente și probabilități elementare

1. *Procese în genere.* Un proces stochastic discontinuu al unui sistem complet de evenimente în număr finit $E_1, E_2, \ldots, E_m$ într-un cîmp de evenimente $\{E, \mathfrak{K}\}$ este constituit din mulțimea $\mathfrak{S}$ de șiruri

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots, \tag{1}$$

unde A_n, pentru orice n, este unul oarecare dintre evenimentele $E_1, E_2, \ldots, E_m$ sau o reuniune de astfel de evenimente.

Vom numi evenimente elementare ale procesului șirurile de forma

$$E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}, E, \ldots,$$

pe care le vom nota și în forma finită echivalentă

$$\delta_n = E_{j_1}, E_{j_2} \ldots, E_{j_n}.$$

Problema procesului stochastic constă în determinarea probabilității evenimentelor elementare, deci în determinarea probabilității drumurilor finite de forma δ_n.

În general, aceste probabilități $p_{j_1, j_2, \ldots, j_n}$ sînt supuse numai următoarelor condiții

$$p_{j_1, j_2, \ldots, j_n} \geqslant 0\,; \sum_{j_n = 1, 2, \ldots, m} p_{j_1, j_2, \ldots, j_m} = p_{j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}}, \tag{2}$$

pentru orice n și $j_1, j_2, \ldots, j_n = 1, 2, \ldots, m$.

În particular, printre aceste probabilități avem și valorile p_{j_1}, care reprezintă probabilitățile evenimentelor $E_{j_1}(j = 1, 2, ..., m)$.

Condițiile (2) nu sînt contradictorii între ele, cum se verifică pe numeroase exemple. Astfel, de exemplu, condițiile (1) sînt verificate dacă luăm

$$p_{j_1, j_2, ..., j_m} = p_{j_1} \cdot p_{j_2} \cdots p_{j_m},$$

unde p_j sînt probabilitățile date ale evenimentelor E_j pe cîmpul $\{E, K, P_s\}$.

În acest caz, procesul este format dintr-o succesiune de evenimente independente.

Mai general, se pot construi probabilitățile $p_{j_1, j_2, ..., j_n}$, dacă dăm, în afară de sistemul p_j, un sistem de m^2 valori $p_{jk}(j, k = 1, 2, ..., m)$, cu proprietățile

$$p_{jk} \geq 0, \quad \sum_{k=1, 2, ..., m} p_{jk} = 1 \tag{3}$$

și luăm, prin definiție,

$$p_{j_1, j_2, ..., j_m} = p_{j_1} \cdot p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{n-1} j_n}.$$

Aceste numere au proprietățile (2) și pot fi considerate ca probabilitățile elementare ale unui proces. Acest proces este de tip Markov, omogen, simplu.

Dacă dăm cîte un sistem (2) pentru fiecare n, probabilitățile elementare sînt de formă

$$p_{j_1, j_2, ..., j_n} = p_{j_1} p_{j_1 j_2}^{(1)} p_{j_2 j_3}^{(2)} \cdots p_{j_{n-1} j_n}^{2(n-1)} \tag{4}$$

și corespund unui proces Markov simplu variabil.

Dacă dăm un sistem de probabilități inițiale p_j, $p_{jk}(j, k = 1, 2, ..., m)$ și un sistem de probabilități de trecere $p_{jkl}(s)(j, k, l = 1, 2, ..., m;\ s = 1, 2, ...)$, cu proprietățile

$$p_j \geq 0, \ \sum_j p_j = 1; \ p_{jk} \geq 0, \ \sum_k p_{jk} = 1, \tag{5}$$

$$p_{jkl}(s) \geq 0; \ \sum_l p_{jkl}(s) = 1$$

probabilitățile elementare vor fi de forma

$$p_{j_1, j_2, ..., j_l} = p_{j_1} \cdot p_{j_1 j_2} \cdot p_{j_1 j_2 j_3}^{(1)} \cdots, p_{j_{n-2} j_{n-1} j_n}^{(n-2)}$$

și corespund unui proces Markov variabil, multiplu de ordinul al doilea.

2. *Relația funcțională a lanțurilor cu legături complete.* Să considerăm un spațiu S de șiruri de evenimente, definit prin probabilitățile elementare $p_{j_1, j_2, ..., j_l}(j_1, j_2, ..., j_l = 1, 2, ..., m;\ l = 1, 2, ...)$, satisfăcînd condițiile (2).

Să notăm cu s un șir de evenimente succesive $E_{j_1}, E_{j_2}, ..., E_{j_l}$; s este un eveniment al spațiului S al șirurilor (1).

Vom nota cu $s + i$ drumul format de evenimentele succesive $E_{j_1}, E_{j_2}, ..., E_{j_l}, E_i, ...$ și cu $P_i(s)$ probabilitatea evenimentului $s + i$ condiționată de evenimentul s.

Vom pune $P_i^{(1)}(s) = P_i(s)$ și vom determina probabilitățile iterate $P_i^{(n)}(s)$ prin relația funcțională

$$P_j^{(n+1)}(s) = \sum_{i=1, 2, ..., m} P_i(s) P_j^{(n)}(s + i), \tag{6}$$

interpretînd, prin aceasta, $P_i^{(n)}(s)$ drept probabilitatea ca, după ce a fost parcurs drumul s, prin n treceri succesive, să ajungem la E_i, deci o probabilitate condiționată a evenimentului

$$\underbrace{E, E, ..., E}_{l+n}, E_i, E, E, ...$$

Un exemplu va lămuri aceste considerații.

Fie S spațiul șirurilor unui lanț Markov omogen. După cum am arătat,

$$p_{j_1, j_2, ..., j_l} = p_{j_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{l-1} j_l}.$$

În acest caz, dacă $c = E_{j_1}, E_{j_2}, ..., E_{j_l}$, avem

$$P_i(c) = p_{j_l i} = P_{j_l i}^{(1)},$$

$$P_j^{(n)}(c + i) = P_{ij}^{(n)}; \quad P_j^{(n)}(c) = P_{j_l j}^{(n)}.$$

Relația (5) devine

$$P_{j_l j}^{(n+1)} = \sum_{i=1, 2, ..., m} P_{j_l i}^{(1)} P_{ij}^{(n)},$$

caracteristică lanțului Markov.

3. *Asupra legăturii dintre spațiul lanțurilor de evenimente* (1) *și spațiul de bază* E. Fiind dat un cîmp de probabilitate $\{E, \mathfrak{K}, P\}$, probabilitățile elementare ale spațiului (1) sînt date de formulele

$$p_{j_1, j_2, \ldots, j_n} = P(E_{j_1}) P_{E_{j_1}}(E_{j_2}) P_{E_{j_1}, E_{j_2}}(E_{j_3}) \ldots P_{E_{i_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_{n-1}}}(E_{j_n}), \quad (7)$$

unde am făcut să intervină diferitele probabilități condiționate.

Deoarece numărul evenimentelor este m, probabilitățile p_{ji} distincte care intervin în aceste produse sînt în număr limitat.

Experiența pune, de obicei, problema inversă. Dîndu-se probabilitățile $p_{j_1, j_2, \ldots, j_n}$ ale evenimentelor elementare ale spațiului șirurilor, sau o parte suficientă dintre ele, să se găsească un cîmp de evenimente $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ pentru care să fie satisfăcute relațiile (7).

Probabilitățile evenimentelor E_j sînt, evident, date odată cu probabilitățile elementare. Egalitățile

$$p_{ij} = p_i \pi_{ij},$$

unde π_{ij} sînt probabilitățile condiționate, vor da aceste probabilități. Același lucru pentru probabilitățile π_{ijk}, date de egalitățile

$$p_{ijk} = p_i \pi_{ij} \pi_{ijk}.$$

Vom putea deci, în particular, recunoaște dacă lanțul este de tip Markov și găsi probabilitățile de trecere.

Nu adîncim această analiză, deoarece aici am urmărit numai să-i relevăm însemnătatea, dat fiind că $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ este, în general, un cîmp teoretic, pe cînd cel al experienței imediate este cîmpul șirurilor de evenimente.

4. *Lanțuri cu legături complete.* Cînd considerăm un lanț Markov variabil, pentru care, deci, probabilitățile $p_{jk}^{(n)}$ depind de momentul n, această dependență poate avea un caracter exterior dat apriori: $p_{jk}^{(n)} = p_{jk}(n)$ poate avea și un caracter intrinsec legat de lanț. Faptul acesta se produce dacă legăm probabilitățile evenimentului E_{j_n} de șirul $E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}, \ldots$ nu numai de evenimentul anterior, dar și de probabilitatea lui. În acest mod, legătura de lanț simplu este cimentată în modul cel mai

complet, de unde denumirea de lanț cu legături complete dat procesului respectiv. Așadar, în acest caz, vom avea

$$p_{j_h j_{h+1}} = \varphi_{j_h j_{h+1}}(p_{j_h 1}, p_{j_h 2}, \ldots, p_{j_h m}), \quad (8)$$
$$(j_h, j_{h+1} = 1, 2, \ldots, m)$$

unde $\varphi_{jk}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ sînt funcții de m argumente pentru

$$0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_m \leqslant 1,$$

avînd proprietățile

$$0 \leqslant \varphi_{jk}(x) \leqslant 1, \quad \sum_{k=1, 2, \ldots, m} \varphi_{jk}(x) = 1. \quad (9)$$

Și în acest caz vom putea defini probabilitățile elementare prin egalitățile (4). Aceste lanțuri condensează influența stărilor anterioare mai complet decît lanțurile Markov, însă folosind tot numai caracteristicile stării imediat anterioare.

§ 2. Modele de lanțuri cu legături complete

1. *Un lanț aleator de urne.* Să considerăm o urnă U_1 conținînd m_1 bile de culoarea 1, m_2 bile de culoarea 2, ..., m_k bile de culoarea k. Plecînd de la U_1 ca urnă inițială, vom construi un șir infinit de urne

$$U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots,$$

după următoarea regulă aleatoare.

Numerele $m_j^{(n+1)} (j = 1, 2, \ldots, k)$ corespunzătoare urnei U_{n+1} sînt funcții de numerele $m_j^{(n)}$ corespunzătoare urnei U_n, determinate pentru fiecare dintre cele l culori ale urnei,

$$m_j^{(n+1)} = f_j(m_1^{(n)}, m_2^{(n)}, \ldots, m_k^{(n)}). \quad (1)$$

Să presupunem că toate aceste funcții sînt omogene și de același grad. Probabilitatea extragerii unei bile de culoarea j din urna U_{n+1} este

$$p_j^{(n+1)} = \frac{m_j^{(n+1)}}{\sum_{h=1, 2, \ldots, k} m_h^{(n+1)}} = \frac{f_{lj}(m_1^{(n)}, m_2^{(n)}, \ldots, m_k^{(n)})}{\sum_{h=1, 2, \ldots, k} f_{lh}(m_1^{(n)}, m_2^{(n)}, \ldots, m_k^{(n)})}.$$

Ţinînd seama de omogenitate, putem înlocui în expresia din membrul al doilea fiecare $m_i^{(n)}$ prin $\lambda m_i^{(n)}$, oricare ar fi $\lambda \neq 0$. Dacă punem în particular $\lambda = \sum_{i=1,2,\ldots,k} m_i^{(n)}$, găsim

$$p_j^{(n+1)} = \frac{f_{lj}(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_k^{(n)})}{\sum_{h=1,2,\ldots,k} f_{lh}(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_k^{(n)})} = \varphi_{lj}(p_1^n, p_2^n, \ldots, p_k^n), \quad (2)$$

egalitate care arată că lanţul construit mai sus este: *simplu* şi cu *legături complete.*

Generalitatea funcţiunilor $f_{lj}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ne arată că modelul de mai sus are el însuşi un mare grad de generalitate.

2. *Lanţuri cu legături complete de ordinul al doilea.* O schemă simplă a lui A. Markov ne arată că, cel puţin în anumite împrejurări, dacă funcţiile $f_{lj}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ nu sînt omogene, se obţine un lanţ cu legături complete de ordinul al doilea.

Fie U_1 urna iniţială conţinînd o bilă albă şi una neagră. Se efectuează o extracţie din urnă şi se înlocuieşte bila obţinută prin altele două de aceeaşi culoare. Obţinem astfel urna U_2. Continuăm după aceeaşi regulă. Obţinem o succesiune aleatoare de urne de tipul (1), fără omogenitatea funcţiilor f_{lj}.

Să notăm prin m_1 şi m_2 respectiv numărul de bile albe şi negre, după a n-a extracţie. Dacă m_1' şi m_2' reprezintă numărul bilelor albe şi negre după extracţia ce urmează, vom avea

$$m_1' = m_1 + 1, \qquad m_2' = m_2,$$

dacă extracţia precedentă nu a dat o bilă albă, şi

$$m_1' = m_1, \qquad m_2' = m_2 + 1,$$

în cazul contrar.

Să presupunem că extracţiile de ordinul n şi $n+1$ au dat fiecare cîte o bilă albă. Dacă notăm cu α şi β numărul de bile albe şi negre care existau în urnă înainte de a n-a extracţie, vom avea

$$p = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad p' = \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1}, \quad p'' = \frac{\alpha+2}{\alpha+\beta+2},$$

unde p, p', p'' sînt probabilităţile de a extrage o bilă albă respectiv în a n-a, a $(n+1)$-a şi a $(n+2)$-a extracţie. Dacă eliminăm pe α şi β din aceste trei relaţii, rezultă

$$p'' = \frac{2p' - pp' - p}{1 + p' - 2p}; \quad (I)$$

dacă extracţiile de rang n şi $n+1$ au dat respectiv o bilă albă şi una neagră, vom avea

$$p = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad p' = \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1},$$

care prin eliminarea lui α şi β dă

$$p'' = \frac{p' - pp'}{1 + p' - 2p}; \quad (II)$$

dacă extracţiile de rang n şi $n+1$ au dat respectiv o bilă neagră şi una albă, vom avea

$$p = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad p' = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}, \quad p'' = \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}, \quad (III)$$

$$p'' = \frac{pp' + p - p'}{2p - p'};$$

şi, în sfîrşit, dacă cele două extracţii au dat fiecare cîte o bilă neagră, va rezulta

$$p = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad p' = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}, \quad p'' = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+2}; \quad (IV)$$

$$p'' = \frac{pp'}{2p - p'}.$$

Relaţiile (I), (II), (III), (IV) caracterizează un lanţ cu legături complete multiplu de ordinul al doilea.

3. *Reprezentarea unui lanţ Markov multiplu ca lanţ simplu cu legături complete.* Lanţurile Markov simple pot fi considerate ca lanţuri cu legături complete, şi anume cînd funcţiile $f_{lj}(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_k^{(n)})$ se reduc la constante.

Un lanţ multiplu de ordinul r relativ la evenimentele $E_1, E_2, \ldots, E_k$ este caracterizat prin probabilităţile fundamentale de trecere $P_{l_r, l_{r-1}, \ldots, l_1, l}(n-r, n-r+1, \ldots, n-1, n)$. Dacă notăm, prescurtat,

$$P_{l_r, l_{r-1}, \ldots, l_1, l}(n-r, n-r+1, \ldots, n-1, n) = \Pi_r^{(n)},$$

şi dacă $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sînt probabilităţile absolute ale evenimentelor $E_1, E_2, \ldots, E_k$, atunci relaţia funcţională corespunzătoare lanţului Markov multiplu poate fi interpretată ca o relaţie a unui lanţ simplu cu legături complete.

§ 3. Lanțuri cu legături complete ale schemelor de contagiune

1. *Lanț variabil.* Schema lui Pólya. Dacă funcțiile f_{ij} depind și direct de n, lanțul se numește variabil.

În această categorie se pot clasa schemele de contagiune ale lui Pólya.

Pentru realizarea acestei scheme, să considerăm o urnă cu α bile albe și β bile negre. După fiecare extracție se înlocuiește bila scoasă din urnă prin $1 + \delta$ bile de aceeași culoare.

Dacă procedăm astfel și dacă primele n extracții au dat k bile albe, urna va conține $\alpha + k\delta$ bile albe și $\beta + (n - k)\delta$ bile negre.

Probabilitatea de a obține o bilă albă va fi atunci

$$p_n = \frac{\alpha + k\delta}{\nu + n\delta}, \quad \alpha + \beta = \nu,$$

sau

$$p_n = \frac{p + k\gamma}{1 + n\gamma},$$

dacă notăm

$$p = \frac{\alpha}{\nu}, \quad \gamma = \frac{\delta}{\nu}.$$

Dacă extracția de rang n a dat o bilă albă, probabilitatea ca în extracția de rang $n + 1$ să obținem o bilă albă va fi

$$p'_{n+1} = \frac{\alpha + (k+1)\delta}{\nu + (n+1)\delta} = \frac{p + (k+1)\gamma}{1 + (n+1)\gamma}.$$

Dacă bila extrasă a fost neagră, probabilitatea de a obține în extracția de rang $n + 1$ o bilă albă va fi

$$p''_{n+1} = \frac{\alpha + k\delta}{\nu + (n+1)\delta} = \frac{p + k\gamma}{1 + (n+1)\gamma}.$$

Dacă eliminăm pe k, obținem

$$p'_{n+1} = f_{11}^{(n)}(p_n) = \frac{\gamma}{1 + (n+1)\gamma} + \frac{1 + n\gamma}{1 + (n+1)\gamma} p_n,$$

$$p''_{n+1} = f_{21}^{(n)}(p_n) = \frac{1 + n\gamma}{1 + (n+1)\gamma} p_n.$$

Lanțul cu legături complete astfel definit este variabil și de ordinul întîi. Să observăm că, dacă împingem calculul pînă la rangul $n + 2$, putem elimina pe n între relațiile obținute și vom avea un lanț cu legături complete constant, de ordinul al doilea.

2. *Un alt model de lanț variabil.* Modelul obținut la § 2, 1, după o regulă de constituire de urne a lui Markov, reprezintă de asemenea un lanț variabil, și anume un caz particular al celui precedent ($\delta = 1$).

Într-adevăr, în acest caz avem

$$p = \frac{\alpha}{n+1}, \quad p' = \frac{\alpha + 1}{n+2},$$

dacă în extracția de rang n am obținut o bilă albă, și

$$p = \frac{\alpha}{n+1}, \quad p' = \frac{\alpha}{n+2},$$

dacă în extracția de rang n a ieșit o bilă neagră. Eliminînd pe α, obținem

$$p' = f_{11}^{(n)}(p) = \frac{(n+1)p + 1}{n+2},$$

$$p'' = f_{21}^{(n)}(p) = \frac{(n+1)p}{n+2},$$

relații care caracterizează un lanț de ordinul întîi, variabil.

§ 4. Proprietățile ergodice ale lanțurilor cu legături complete

1. *Lanțuri ergodice.* Să considerăm un lanț cu legături complete de ordinul întîi la evenimentele $E_1, E_2, \ldots, E_m, E_{m+1}$.

Să presupunem că probabilitățile de trecere se exprimă cu ajutorul funcțiilor

$$\varphi_{ik}(p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

unde φ_{ik} verifică condițiile

$$\varphi_{ik} \geqslant 0 \quad \text{și} \quad \sum_1^{m+1}{}_k \varphi_{ik} = 1, \tag{1}$$

iar valorile p_i verifică condițiile

$$0 \leqslant p_i \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, m); \quad \sum_{i=1}^{m} p_i \leqslant 1. \tag{2}$$

Să notăm prin $p_1, p_2, \ldots, p_m$ probabilitățile inițiale ale stărilor $E_1, E_2, \ldots, E_m$ și fie $P_s^{(n)}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ probabilitatea evenimentului E_s în experiența de rangul n, oricare ar fi rezultatele experiențelor precedente.

Vom numi *ergodice* lanțurile pentru care

$$\lim_{n \to \infty} P_s^{(n)}(p_1, p_2, \ldots, p_m) = P_s. \tag{3}$$
$$s = 1, 2, \ldots, m$$

2. *Ecuația funcțională a probabilității totale.* Se vede imediat că

$$P_s^{(2)}(p_1, p_2, \ldots, p_m) = \sum_{1}^{m+1}{}_k \, p_k \varphi_{ks}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$$

sau cu o notație mai concisă

$$P_s^{(2)}(p) = \sum_{1}^{m+1}{}_k \, p_k \varphi_{ks}(p).$$

Dacă punem, în general,

$$\varphi_{js}^2(p_k^2) = \varphi_{js}(\varphi_{k1}(p), \varphi_{k2}(p), \ldots, \varphi_{km}(p)),$$

vom avea

$$P_s^{(n)}(p) = \Sigma p_k \varphi_{kj}(p) \, \varphi_{jl}(p^{(1)}) \ldots \varphi_{rs}(p^{(n-1)}). \tag{4}$$

Egalitatea precedentă ne dă imediat relația funcțională căutată

$$P_s^{(n)}(p) = \sum_{1}^{m+1}{}_k \, p_k P_s^{(n-1)}[\varphi_{k1}(p), \varphi_{k2}(p), \ldots, \varphi_{km}(p)]. \tag{5}$$

3. *Condiții suficiente pentru ergodicitate.* Relațiile funcționale (5) reprezintă o operație care conduce de la $P_s^{(n-1)}$ la $P_s^{(n)}$. Operatorul respectiv nu este, în general, complet continuu. Studiul proprietăților sale va fi efectuat mai întîi direct, așa cum facem în acest paragraf, care trebuie considerat și ca o teorie expusă pe un caz particular al unor operatori nu complet continui.

Vom arăta aici că pentru ergodicitate sînt suficiente următoarele trei condiții:

I. Funcțiile $\varphi_{ik}(p)$, definite în domeniul închis

$$(D) \qquad 0 \leqslant p_i \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

sînt continue în acest domeniu și admit derivate de ordinul întîi continue; ele verifică în plus condițiile

$$0 < \varphi_{ik}(p_1, p_2, \ldots, p_m) < 1 \quad (i, k = 1, 2, \ldots, m) \tag{α}$$

II. Cel puțin una dintre transformările T_i,

$$p_k' = \varphi_{ik}(p_1, p_2, \ldots, p_m) \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{β}$$

admite un punct de atracție și unul singur în interiorul domeniului (D).

III. Derivatele funcțiilor $\varphi_{ik}(p)$ verifică inegalitățile

$$\sum_{1}^{m}{}_j \left| \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial p_h} \right| < \mathrm{i}. \tag{γ}$$

4. *Egala continuitate a funcțiilor* $P_s^{(n)}(p)$. Cu aceste condiții se poate demonstra egala continuitate a mulțimii funcțiilor $P_s^{(n)}$.

Relația (5) dă prin derivare

$$\frac{\partial P_s^{(n)}}{\partial p_k} = P_s^{(n-1)}[\varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \ldots, \varphi_{k_n}] - P_s^{(n-1)}[\varphi_{m+1,1}, \ldots, \varphi_{m+1,m}] +$$

$$+ \sum_{1}^{m+1} P_i \left[\frac{\partial P_s^{(n-1)}}{\partial \varphi_{i1}} \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial p_k} + \cdots + \frac{\partial P_s^{(n-1)}}{\partial \varphi_{im}} \frac{\partial \varphi_{im}}{\partial p_k} \right],$$

de unde

$$\left| \frac{\partial P_s^{(n)}}{\partial p_k} \right| \leqslant | P_s^{(n-1)}(\varphi_k) - P_s^{(n-1)}(\varphi_{m+1}) | +$$

$$+ \sum_{1}^{m}{}_i \, p_i \left[\left| \frac{\partial P_s^{(n-1)}}{\partial \varphi_{i1}} \right| \left| \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial p_k} \right| + \cdots + \left| \frac{\partial P_s}{\partial \varphi_{im}} \right| \left| \frac{\partial \varphi_{im}}{\partial p_k} \right| \right]. \tag{6}$$

În virtutea condițiilor (γ), avem

$$\sum_{1}^{m}{}_j \left| \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial p_k} \right| < L < 1.$$

Dacă punem $\lambda = \frac{1}{1-L}$, aceleași inegalități dau, cu atît mai mult,

$$\left|\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial p_k}\right| < 1 < \lambda. \tag{7}$$

Pe de altă parte, dacă admitem că pînă la $n-1$ avem

$$\left|\frac{\partial P_s^{(n-1)}}{\partial p_k}\right| \leqslant \lambda,$$

inegalitățile (7) arată că

$$\left|\frac{\partial P_s^{(n)}}{\partial p_k}\right| \leqslant 1 + \lambda L = \lambda. \tag{8}$$

Această inegalitate va fi adevărată deci pentru orice n, dacă este adevărată pentru $n = 1$. Dar

$$P_s^{(1)}(p) = p_s,$$

ceea ce arată că (8) este adevărată în general.

Egala continuitate a sistemului $P_s^{(n)}$ rezultă din inegalitățile precedente.

Într-adevăr, putem scrie

$$|P_s^{(n)}(z_1, z_2, \ldots, z_m) - P_s^{(n)}(y_1, y_2, \ldots, y_m)| \leqslant$$

$$\leqslant \Sigma_i |z_i - y_i| \left|\frac{\partial P_s^{(n)}(\xi)}{\partial \xi_i}\right| \leqslant \lambda \Sigma_i |z_i - y_i|,$$

punctul $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ fiind cuprins în intervalul (z), (y).

Pentru $\varepsilon > 0$ dat, să alegem $\delta = \frac{\varepsilon}{m\lambda}$. Atunci

$$|z_i - y_i| \leqslant \delta$$

implică

$$|P_s^{(n)}(z) - P_s^{(n)}(y)| \leqslant \varepsilon,$$

oricare ar fi n și s, inegalitate care arată că mulțimea funcțiilor $P_s^{(n)}$ este egal continuă în domeniul (D).

5. *Existența funcțiilor limită ale șirului* $P_s^{(n)}$. Mulțimea funcțiilor $P_s^{(n)}$, egal continue, este *compactă*. Se poate extrage deci un subșir care converge uniform către o funcție continuă $P_s^{(h)}$.

Să considerăm expresiile

$$M_s^{(n)} = \lim \sup P_s^{(n)},$$

$$m_s^{(n)} = \lim \inf P_s^{(n)},$$

bine determinate în (D), pentru funcția continuă $P_s^{(n)} = P_s^{(n)}(p)$.

Inegalitățile de mai sus dau imediat

$$M_s^{(n-1)} \geqslant M_s^{(n)},$$

$$m_s^{(n-1)} \leqslant m_s^{(n)}.$$

Rezultă că șirurile mărginite $M_s^{(n)}$ și $m_s^{(n)}$ admit respectiv cîte o limită, pe care s-o notăm prin M_s și m_s.

Deoarece avem

$$M_s^{(n)} \leqslant M_s^{(1)} < 1,$$

$$m_s^{(n)} \geqslant m_s^{(1)} > 0,$$

$$M_s^{(n)} > m_s^{(n)},$$

rezultă că

$$M_s < 1, \quad m_s > 0,$$

$$\delta_s = M_s - m_s \geqslant 0.$$

Se vede, pe de altă parte, că în aceste condiții M_s și m_s vor fi respectiv limita superioară și inferioară a funcției limită $P_s^{(h)}$ și a oricărei alte funcții limită a șirului $P_s^{(n)}$.

Cu ajutorul relației de recurență (5) și al șirului

$$P_s^{(h_1)}, P_s^{(h_2)}, \ldots, P_s^{(h_n)}, \ldots$$

se poate construi un alt șir, care admite de asemenea o limită. În adevăr, dacă utilizăm relația

$$P_s^{(h+1)}(p) = \sum_{i=1}^{m+1} p_i P_s^{(h)}[\varphi_{i1}(p), \varphi_{i2}(p), \ldots, \varphi_{im}(p)],$$

vom avea

$$P_s^{(h+1)}(p) - P_s^{(h_n+1)}(p) = \sum_{i=1}^{m+1} p_i \{P_s^{(h)}(\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \ldots, \varphi_{im}) -$$

$$- P_s^{(h_n)}(\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \ldots, \varphi_{im})\}.$$

Dacă $\varepsilon > 0$ este dat, putem determina un număr N astfel ca

$$|P_s^{(h)} - P_s^{(h_n)}| < \varepsilon$$

pentru orice $n > N$.

Rezultă deci că $|P_s^{(h+1)} - P_s^{(h_n+1)}| < \varepsilon$,
ceea ce dovedește că șirul $P_s^{(h_n+1)}$ tinde către $P_s^{(h+1)}$.

În același mod, prin repetarea procedeului, vom construi un șir de funcții limită $P_s^{(h+c)}(c = 0, 1, 2, ...)$ care sînt continue în (D) și admit toate aceeași limită superioară M_s și aceeași limită inferioară m_s.

6. *Unicitatea funcției limită.* Funcția limită $P_s^{(h+r)}$ este dată de relația

$$P_s^{(h+r)} = \sum_{1}^{m+1} {}_{ij\ldots l}\, x_i \varphi_{ij} \varphi_{ijk} \cdots \varphi_{ijk,\ldots l} P(\varphi_{ijk\ldots l_1}, \varphi_{ijk\ldots l_2}, \ldots, \varphi_{ijk\ldots l_m}) \tag{9}$$

unde am notat

$$\varphi_{ijk} = \varphi_{ij}(\varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \ldots, \varphi_{km}).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_{ijk\ldots gl} = \varphi_{ijk\ldots g}(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \ldots, \varphi_{l_m}).$$

Pe de altă parte, în (9) avem

$$\Sigma_{ij\ldots kl} x_i \varphi_{ij} \cdots \varphi_{ijk\ldots l} = 1.$$

Inegalitățile (α) permit determinarea unui număr μ avînd proprietatea

$$0 < \mu < \varphi_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_m) < 1 - \mu < 1. \tag{10}$$

În acest domeniu $D_\mu(\mu, 1-\mu)$ se găsește punctul de atracție al iteratelor transformării T_i.

Fie $x_1', x_2', \ldots, x_m'$ punctul din D_μ, în care funcția $P_s^{(h+1)}(x)$ ia cea mai mare valoare.

În baza inegalităților (10), în D_μ avem

$$x_i \varphi_{ij} \varphi_{ijk} \cdots \varphi_{ijk\ldots l} > 0,$$

și egalitatea (9) devine

$$P_s^{(h+r)}(x') = P_s^{h}(\varphi'_{ijk\ldots l_1}, \varphi'_{ijk\ldots l_2}, \ldots, \varphi'_{ijk\ldots l_m}),$$

unde $\varphi'_{ijk\ldots l_h}$ este valoarea funcției $\varphi_{ijk\ldots l_h}$ în punctul x'.

În mod analog, dacă notăm prin $x_1'', x_2'', \ldots, x_m''$ punctul în care $P_s^{(h+s)}(x)$ ia cea mai mică valoare în D_μ, vom avea

$$P_s^{(h+r)}(x'') = P_s^{(h)}(\varphi''_{ijk\ldots l_1}, \varphi''_{ijk\ldots l_2}, \ldots, \varphi''_{ijk\ldots l_m}),$$

unde

$$\varphi''_{ijk\ldots l_h} = \varphi_{ijk\ldots l_h}(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'').$$

Pentru a utiliza relația (β), să alegem în relația precedentă toți indicii egali cu i. Vom avea

$$P_s^{(h+r)}(x_1', x_2', \ldots, x_m') = P_s^{(h)}[\varphi'_{ii\ldots,i1}, \varphi'_{ii\ldots i2}, \varphi'_{ii\ldots,im}],$$
$$P_s^{(h+r)}(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'') = P_s^{(h)}[\varphi''_{ii\ldots,i1}, \varphi''_{ii\ldots i2}, \ldots, \varphi''_{ii\ldots im}].$$

Cum prin ipoteză

$$\varphi'_{ii\ldots il} \to \varphi_l,$$
$$\varphi''_{ii\ldots il} \to \varphi_l,$$

cînd r tinde către infinit, funcțiile $P_s^{(h+n)}$ fiind egal continue, putem găsi un număr η, astfel ca, oricare ar fi ε dat, să avem pentru $|z_i'' - z_i'| < \eta$,

$$|P_s^{(h)}(z'') - P_s^{(h)}(z')| < \varepsilon.$$

Dacă alegem pe r suficient de mare pentru ca

$$|\varphi''_{ii\ldots il} - \varphi''_{ii\ldots il}| < \varepsilon\eta, \quad l = 1, 2, \ldots, m,$$

vom avea

$$|P_s^{(h)}(\varphi''_{ii\ldots i1}, \varphi''_{ii\ldots i2}, \ldots, \varphi''_{ii\ldots im}) -$$
$$- P_s^{(h)}(\varphi'_{ii\ldots i1}, \varphi'_{ii\ldots i2} \ldots \varphi'_{ii\ldots im})| < \eta$$

sau, dacă ținem seama de (10)

$$|P_s^{(h+r)}(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'') - P_s^{(h+r)}(x_1', x_2', \ldots, x_m')| < \eta.$$

Dacă notăm cu $M_s^{(\mu)}$ și $m_s^{(\mu)}$ limitele superioare și inferioare ale funcției $P_s^{(h+r)}$ în domeniul D_μ, în baza unei observații anterioare rezultă

$$M_s(\mu) = P_s^{(h+r)}(x_1', x_2', \ldots, x_m'),$$
$$m_s(\mu) = P_s^{(h+r)}(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'').$$

Inegalitatea precedentă ne va da deci

$$M_s(\mu) - m_s(\mu) \leqslant \eta,$$

oricare ar fi η, ceea ce implică

$$M_s(\mu) = m_s(\mu).$$

Aceasta dovedește că funcția $P_s^{(h)}$ este o constantă în domeniul D_μ, oricît de mic ar fi μ, deci în domeniul D_μ în întregime.

Putem deci a scrie

$$\lim_{n\to\infty} P_s^{(h)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P_s,$$

unde P_s este o constantă și ergodicitatea este astfel demonstrată.

§ 5. Condițiile de ergodicitate ale lui C. Ionescu-Tulcea și Gh. Marinescu

1. *O clasă de operatori aproape complet continui.* Operatorul definit de (5), § 4 face parte din clasa de operatori aproape complet continui definiți de C. Ionescu-Tulcea și Gh. Marinescu.

Se consideră un spațiu Banach E cu norma $\|x\|$ și un subspațiu F al spațiului liniar E, care este și el un spațiu Banach cu norma $\|x\|$.

Presupunem, în plus, că este îndeplinită următoarea condiție: orice șir x_n din elemente ale spațiului F, cu norma uniform mărginită $\|x_n\| < A$, avînd limita x în E astfel că $\|x_n - x\| < \varepsilon$ cînd $n \to \infty$, implică apartenența lui x la F și $\|x\| \leqslant A$.

Vom nota cu $C(B, E)$ clasa operatorilor T lucrînd asupra elementelor x din B și pentru care $Tx \in B$, mărginiți ($\|T\| < \infty$), distributivi și satisfăcînd încă următoarele condiții:

a) există o constantă pozitivă B pentru care $\|T^n\|_B \leqslant B$, pentru orice n întreg;

b) există două constante pozitive K și $k (0 < k < 1)$, pentru care $\|Tx\| \leqslant k\|x\| + K\|x\|$, pentru orice $x \in B$;

c) pentru orice parte X mărginită în B, TX este compactă în E.

Acești operatori au următoarea proprietate:

Fiecărui operator T îi corespunde un număr finit de valori proprii de modul 1. Dacă numim cu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ aceste valori proprii, vom avea

$$T^n = \sum_{j=1,2,\ldots,p} \frac{1}{\lambda_j^n} T_j + S^n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

unde T_j sînt operatori asupra elementelor lui B, pentru care T_x aparțin unei părți liniare a lui B, de dimensiune finită, și sînt distributive și mărginite, iar S este o operație distributivă și mărginită, cu următoarele proprietăți

$$T_i^2 = T_i;\ T_iT_j = 0 - (i + j);\ T_iS = ST_i = 0;$$

$$\|S^n\| \leqslant \frac{C}{(1+c)^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

C și c fiind două constante pozitive.

Aceasta înseamnă că T este cvasicomplet continuă și normele $\|T^m\|$ sînt uniform mărginite.

2. *Condiții în care relația funcțională* (5) *definește un operator de tipul* $C(B, E)$. Să notăm cu P un vector de componente $P_1, P_2, \ldots, P_m$ cu proprietățile

$$P_j \geqslant 0, \sum_{j=1,\ldots,m} P_j = 1, \qquad (1)$$

cu p un alt vector al aceluiași spațiu și să punem $h(p, E_j) = \sum_h \delta_{hj} p_h$, unde δ_{hj} este simbolul lui Kronecker.

Fie, de asemenea, pentru fiecare $j = 1, 2, \ldots, m$, vectorul $\varphi_j(\varphi_{jk}(p_1, p_2, \ldots, p_m))$, care aplică subspațiul vectorial (1) în el însuși.

Să presupunem că distanța între două puncte p' și p'' ale spațiului (1) este dată de

$$[p', p''] = \sup [p_j' - p_j'']$$

și că există o constantă r cuprinsă între 0 și 1 pentru care

$$[\varphi_j(p'), \varphi_j(p'')] \leqslant r[p', p''] \qquad (i)$$

r fiind independentă de p', p'' și j.

Fie acum o funcție continuă $P(p)$ definită pe (1) și cu valori în (1) și care are încă proprietatea că există un $d > 0$, astfel că pentru fiecare r

$$\frac{P_r(p') - P_r(p'')}{[p', p'']}$$

are o margine superioară finită cînd p', p'' sînt în (1) fără ca $p' = p''$. Notăm cu $m(P_r, d)$ această margine superioară. Se poate lua ca normă pentru $P_r(p)$

$$||P_r(p)|| = m(P_r, d) + \max |P_r(p)|.$$

Operatorul T este definit în condițiile teoremei lui C. Ionescu-Tulcea și Gh. Marinescu astfel

$$TP_r(p) = \sum_{j=1, 2, \ldots, m} h(p, E_j)\ P_r(\varphi_j(p)).$$

Dacă punem

$$TP_r^{(n)}(p) = P_r^{(n+1)}(p)$$

rezultă că mulțimea $P_r^{(n+1)}(p)$ este compactă și de aici rezultă ergodicitatea.

Demonstrarea acestei afirmații se poate face și direct folosind, cu condițiile indicate mai sus, mersul demonstrației de la § 4.

3. *Condiții ca relația funcțională a lanțurilor cu legături complete să definească un operator* $C(E, B)$. Să definim distanța în spațiul șirurilor după cum urmează: dacă s este drumul $E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}, \ldots$ și s' este drumul $E'_{j_1}, E'_{j_2}, \ldots, E'_{j_n}, \ldots$ atunci

$$[s, s'] = \sum_{n=1, 2, \ldots} k^n |j_n - j'_n|$$

$$(j_n, j'_n = 1, 2, \ldots, m).$$

Să presupunem transformarea $\varphi_i(s)$ care, în spațiul șirurilor, duce de la drumul finit s la drumul $s + i$ și satisface relația

$$[\varphi_i(s), \varphi_i(s')] < r[s, s'] \quad (0 < r < 1)$$

pentru r independent de s, s' și de i.

Fie acum un vector $P(s)$ de componente $P_j(s)$, determinat pentru fiecare drum finit, cu valori în spațiul

$$P_j(s) \geqslant 0 \sum_{j=1, 2, \ldots, m} P_j(s) = 1.$$

Componentele acestui vector verifică condițiile cerute pentru funcțiile f. Prin urmare, dacă punem

$$h(P, E_j) = \sum_{h=1, 2, \ldots, m} \delta_{hj} P_h(s),$$

relația (5) rezultă din iterația operației definită de

$$TP_j(s) = \sum_i h(P, E_j)\ P_j(\varphi_i(s)),$$

care intră în clasa $C(E, B)$.

§ 6. Corespondența între un lanț cu legături complete și un lanț Markov

1. Să presupunem că șirurile

$$E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}, E_{j_{n+1}}, \ldots \qquad (1)$$

ale spațiului de șiruri (1) sînt lanțuri cu legături complete, definite de probabilitățile de trecere (5).

Aceasta înseamnă că probabilitatea trecerii de la evenimentul $E_{j_n}(j_n = 1, 2, \ldots, m)$ la $E_{j_{n+1}}$, $j_{n+1} = 1, 2, \ldots, m)$ este $\varphi_{j_n j_{n+1}}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, probabilitățile evenimentelor $E_{j_n}(j_n = 1, 2, \ldots, m)$ fiind respectiv $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Deci, probabilitatea de trecere de la vectorul de probabilitate $p(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ la $\varphi_i(\varphi_{i1}(p), \varphi_{i2}(p) \ldots \varphi_{im}(p))$ este p_i.

Vectorii de probabilitate a evenimentelor succesive din șirul (1) constituie deci un lanț aparținînd unui tip foarte apropiat de lanțurile Markov sau de unele lanțuri folosite de R. Fortet.

Urmează un exemplu în care lanțul probabilităților este chiar un lanț Markov.

Construim un lanț simplu cu legături complete în modul următor:

Se consideră două funcții $\varphi(x)$ și $\psi(x)$ cu valori întregi pozitive cuprinse între 0 și a dacă α are valori întregi cuprinse între 0 și a.

O urnă conține în total a bile albe și negre. Compoziția ei se schimbă după fiecare extracție în modul următor:

Dacă urna U_n conține $\alpha_1^{(n)}$ bile albe și $\alpha_2^{(n)}$ bile negre ($\alpha_1^{(n)} + \alpha_2^{(n)} = a$) și dacă extracția ne dă o bilă albă, vom schimba compoziția urnei astfel

$$U'_{n+1} : \alpha_1^{(n)} = \varphi(\alpha_1),\ \alpha_2^{(n)} = a - \varphi(\alpha_1).$$

Dacă extracția a dat o bilă neagră, vom lua

$$U''_{n+1} : \alpha_1^{(n)} = a - \psi(\alpha_1),\ \alpha_2^{(n)} = \psi(\alpha_1).$$

Vectorul probabilităților corespunzător urnei U_n este p, avînd componentele

$$p_1 = \frac{\alpha_1}{a},\ p_2 = \frac{\alpha_2}{a}.$$

Pentru urna U_{n+1} avem cei doi vectori:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1\left(\varphi_{11} = \frac{\varphi(ap_1)}{a},\ \varphi_{12} = 1 - \frac{\varphi(ap_1)}{a}\right),\\ &\varphi_2\left(\varphi_{21} = 1 - \frac{\psi(ap_2)}{a},\ \varphi_{22} = \frac{\psi(ap_1)}{a}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Evenimentele lanțului Markov pot fi deci reprezentate prin punctele de pe segmentul intersectat de semiaxele pozitive rectangulare Ox, Oy pe dreapta $x + y = 1$ și avînd abscisele

$$x = 0, \frac{1}{a},\ \frac{2}{a}, \ldots,\ \frac{a}{a}.$$

De fiecare punct $p(p_1, p_2)$, punctul care urmează este unul sau altul dintre cele două puncte determinate în (2). Probabilitatea de trecere este pentru primul caz p_1, iar pentru cel de-al doilea p_2.

Să notăm cu $P_n(p_1^0)$ probabilitatea de a obține o bilă albă în extracția de rang n, dacă $p_1^0 = \frac{\alpha_1}{a}$ pentru urna originară.

Să notăm de asemenea cu $Q_n(k, p_1^0)$ probabilitatea de a obține o bilă albă în extracția de rang n, cu probabilitatea $k\left(= 0, \frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \ldots, \frac{a}{a}\right)$. Vom avea, evident,

$$P_n(p_1^0) = \sum_{k = \frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \ldots, \frac{a}{a}} kQ_n(k, p_1^0). \qquad (3)$$

Această egalitate ne arată între altele că, presupunînd că lanțul Markov al probabilităților este ergodic, deci $Q_n(k, p_1^0)$, cînd n tinde spre infinit, tind către o limită independentă de p_1^0, atunci și lanțul cu legături complete este ergodic, deoarece în acest caz și limita $P_n(p_1^0)$, cînd n tinde către infinit, există și este independentă de p_1^0.

2. *Exemple.* Două cazuri numerice pentru un șir de urne cu două bile ($a = 2$) vor exemplifica cele două eventualități care se pot ivi

1°. $\varphi(0) = 2,\ \varphi(1) = 2,\ \varphi(2) = 1;\ \psi(0) = 1,\ \psi(1) = 0,\ \psi(2) = 2.$

Lanțul Markov al probabilităților este ergodic, deci și lanțul cu legături complete este ergodic.

2°. $\varphi(0) = 1,\ \varphi(1) = 2,\ \varphi(2) = 0;\ \psi(0) = 2,\ \psi(1) = 0,\ \psi(2) = 1.$

Lanțul Markov al probabilităților nu este, în acest caz, ergodic.

§ 7. Lanțurile cu legături complete privite ca modele matematice ale unor experimente din teoria învățării

Pentru a vedea cum lanțurile cu legături complete pot fi folosite ca modele matematice ale unor experiențe de învățare, vom descrie mai întîi care este structura probabilistă a unei evoluții în lanț cu legături complete.

Să presupunem că avem un experiment care constă dintr-un șir de probe, rezultatul fiecărei probe fiind unul din evenimentele $E_1, E_2, \ldots, E_{m+1}$.

Fie $\Delta = \{p = (p_1 \ldots, p_{m+1}) : 0 \leqslant p_i \leqslant 1,\ 1 \leqslant i \leqslant m+1, \sum_{i=1}^{m+1} p_i = 1\}$ și pentru fiecare $i (1 \leqslant i \leqslant m+1)$ să considerăm dată o funcție $\Psi_i : \Delta \to \Delta$.

Potrivit celor arătate anterior, experimentul se desfășoară după regulile unui lanț cu legături complete simplu și omogen dacă schema probabilistă după care se desfășoară probele este următoarea:

a) Se alege un $p_0 \in \Delta$ drept repartiție inițială, adică componentele $p_{0,i}$, $1 \leqslant i \leqslant m+1$ ale vectorului p_0 reprezintă probabilitățile evenimentelor E_i $(1 \leqslant i \leqslant m+1)$ în prima probă;

$$P(E_{i_1}) = P_{0,i} \quad (1 \leqslant i_1 \leqslant m+1).$$

b) Dat fiind că în prima probă s-a realizat evenimentul E_{i_1}, probabilitatea condiționată ca în a doua probă să se realizeze evenimentul E_{i_2} este $\Psi_{i_1,i_2}(p_0)$, unde în general prin $\Psi_{i,j}(p)$ notăm componența j a vectorului $\Psi_i(p)$; aceasta înseamnă că repartiția condiționată a evenimentelor din a doua probă dat fiind că în prima s-a realizat evenimentul E_{i_1} se obține prin aplicarea transformării Ψ_{i_1} asupra repartiției din prima probă p_0

$$P(E_{i_2} | E_{i_1}) = \Psi_{i_1,i_2}(p_0);$$

c) Dat fiind că în prima probă s-a realizat E_{i_1} iar în a doua E_{i_2}, probabilitatea condiționată ca în a treia probă să se realizeze E_{i_3} este componentă i_3 a vectorului $(\Psi_{i_2} \circ \Psi_{i_1})(p_0) = \Psi_{i_2}(\Psi_{i_1}(p_0))$ care conform notației de mai sus este $\Psi_{i_2,i_3}(\Psi_{i_1}(p_0))$; prin urmare repartiția condiționată a evenimentelor din proba a treia dat fiind că s-au realizat E_{i_1} și E_{i_2}, în prima și a doua probă, respectiv se obține prin aplicarea transformării Ψ_{i_2}, asupra repartiției condiționate $\Psi_{i_1}(p_0)$ a evenimentelor din a doua probă — deci experiența anterioară — dat fiind că în prima probă s-a realizat E_{i_1},

$$P(E_{i_3} | E_{i_2}, E_{i_1}) = \Psi_{i_2,i_3}(\Psi_{i_1}(p_0))$$

și așa mai departe.

Prin urmare, în general repartiția condiționată a evenimentelor din proba $n+1$ dat fiind că în primele n probe s-au realizat evenimentele $E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_n}$ se obține prin aplicarea transformării Ψ_{i_n} asupra vectorului care dă repartiția condiționată a evenimentelor din proba a n-a dat fiind că în primele $n-1$ probe s-au realizat evenimentele $E_{i_1}, \ldots, E_{i_{n-1}}$.

Prin urmare

$$P(E_{i_{n+1}} | E_{i_n}, E_{i_{n-1}}, \ldots, E_{i_1}) = \Psi_{i_n,i_{n+1}}((\Psi_{i_{n-1}} \circ \Psi_{i_{n-2}} \ldots \circ \Psi_{i_1})(p_0)).$$

Vom descrie în continuare forma generală a unui experiment de învățare, arătînd că în anumite cazuri — așa-numitele experimente cu evenimente controlate numai de subiect — modelele matematice ale acestor experimente sînt exact lanțurile cu legături complete.

Să presupunem că un obiect este pus în mod repetat în fața unei situații experimentale în care i se cere, de fiecare dată, să aleagă unul din mai multe răspunsuri posibile.

Să notăm aceste răspunsuri posibile cu $A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}$. Fiecărui răspuns îi urmează un rezultat dintr-o clasă de rezultate posibile $O_1, O_2, \ldots, O_l$. Să notăm cu π_{ik} probabilitatea condiționată ca într-o anumită probă să apară rezultatul O_k dat fiind că subiectul a ales în acea probă răspunsul A_i, și să presupunem că această probabilitate nu se schimbă de la probă la probă. În experiențele clasice din teoria învățării rezultatele reprezintă recompense sau sancțiuni care se aplică subiectului în funcție de răspunsul dat.

Perechea $(A_{i,n}, O_{k,n})$ care s-a realizat în proba n-a poartă denumirea de evenimentul care s-a produs în proba n-a și se notează cu E_{i_n,k_n}.

Desigur experiența pe care subiectul o capătă în proba n-a se materializează printr-o modificare corespunzătoare a tendințelor sale de-a alege răspunsul în proba următoare, tendințe determinate înaintea probei n, de toate evenimentele din probele anterioare $E_{i_1,k_1}, E_{i_2,k_1}, \ldots, E_{i_{n-1},k_{n-1}}$.

În mod natural, tendințele de alegere a răspunsurilor în proba a n-a se exprimă prin repartiția condiționată $p_n \in \Delta$ a acestor răspunsuri în această probă, date fiind toate evenimentele din probele anterioare. Efectul probei n în care s-a realizat evenimentul E_{i_n,k_n} asupra experienței căpătate de subiect în primele $n-1$ probe, se exprimă deci printr-o transformare $\Psi_{(i_n,k_n)}$, care se aplică lui p_n, $\Psi_{(i_n,k_n)}(P_n)$ reprezentînd repartiția condiționată a răspunsurilor în proba $n+1$, date fiind toate evenimentele realizate în primele n probe.

În cazul particular în care răspunsul A_i este urmat cu probabilitatea 1 de rezultatul O_{k_i} spunem că avem de-a face cu experimente în care evenimentele sînt controlate de subiect.

În acest caz perechea $(A_{i,n}, O_{k_n,n})$ poate fi identificată cu $A_{i,n}$.

Prin urmare în acest caz imaginea matematică este aceea a unui lanț cu legături complete, simplu și omogen descris mai sus.

Anumite cazuri speciale ale acestor modele au fost studiate de Bush și Mosteller în 1955 fără a face apel la teoria lanțurilor cu legături complete.

Modelul matematic valabil pentru experimentul general de învățare descris mai sus este reprezentat prin noțiunea de sistem aleator cu legături complete, noțiune introdusă de M. Iosifescu în 1963 și care generalizează lanțurile cu legături complete.

§ 8. Procesul mersului la întîmplare simplu cu restricții

Mersul la întîmplare într-o rețea a constituit modelul probabilist pentru multe procese fizice cum ar fi de exemplu modelul imaginat de Rayleigh în 1899 pentru propagarea sunetului.

Un model particular de mers la întîmplare în care o stare atinsă la un moment dat nu va mai fi atinsă în momentele următoare și pentru care există cel puțin o stare absorbantă s-a dovedit adecvat pentru a reprezenta numeroase fenomene fizice cum ar fi vîscozitatea, difuzia, dispersia luminii precum și în fenomene chimice referitor la molecule în lanț, polimeri înalți etc.

1. *Definiții și generalități.* a) *Mers la întîmplare simplu într-o latice rectangulară N-dimensională.* Să notăm cu

$$R_N = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N);\ x_i \in Z,\ 1 \leqslant i \leqslant N\}.$$

Mersul la întîmplare cu restricții este caracterizat prin faptul că particula care se mișcă în mod aleator pe nodurile rețelei R_{IV} nu se reîntoarce niciodată într-un mod atins anterior. De asemenea particula trece dintr-o stare într-una din stările vecine nevizitate cu probabilitățile egale.

Astfel, de exemplu, dacă $N = 2$, să presupunem că particula care se află după n pași în punctul (x_1, x_2) (vezi fig. 2.1) după ce în cei trei pași anteriori trecuse din $(x_1 - 1, x_2)$ în $(x_1 - 1, x_2 - 1)$, din $(x_1 - 1, x_2 - 1)$ în $(x_1, x_2 - 1)$ și, în sfîrșit, din $(x_1, x_2 - 1)$ în (x_1, x_2), va trece în pasul $n+1$ cu probabilitatea $\frac{1}{2}$ în oricare din punctele $(x_1 + 1, x_2)$, $(x_1, x_2 + 1)$.

Dacă particula ar fi avut — după cum este arătat în fig. 2.2 — un singur punct accesibil, atunci probabilitatea de a-l atinge pe acesta este 1.

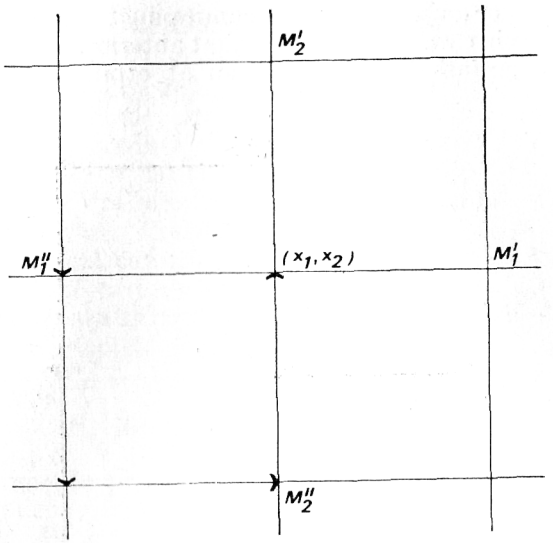


Fig. 2.1

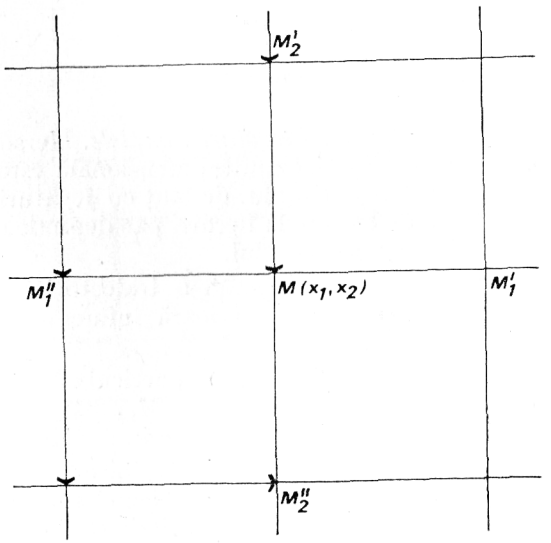


Fig. 2.2

Dacă după ce a ajuns într-un anumit punct nu mai există nici un punct vecin care să nu fi fost vizitat anterior, spunem că particula este „prinsă în capcană" sau absorbită (v. fig. 2.3).

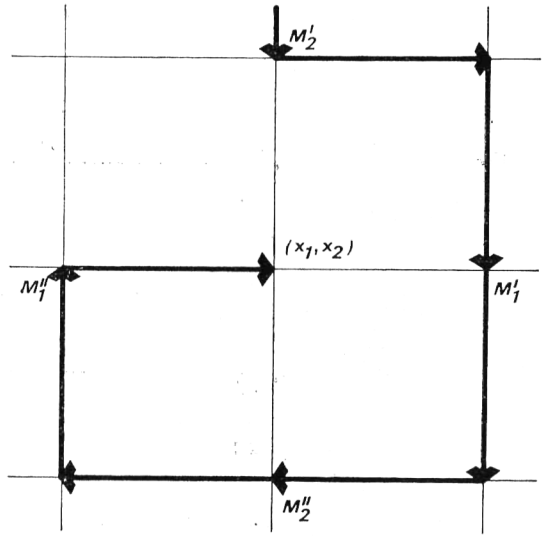


Fig. 2.3

b) *Legătura cu lanțurile cu legături complete.* Mersul la întîmplare cu restricții într-o latice multidimensională este un exemplu natural, dar nu foarte simplu, de lanț cu legături complete, unde probabilitatea de trecere la fiecare pas depinde de întreaga traiectorie anterioară a procesului.

În fig. 2.4 este pusă în evidență o traiectorie din care se poate vedea că fiecare stare anterioară influențează probabilitățile în pașii ulteriori.

În fiecare din punctele M_2, M_3, M_4 particula are trei direcții libere, în M_{14} numai o direcție, iar în M_{26} particula este din nou constrînsă de M_1, și M_{16} de a merge într-o singură direcție.

Faptul că toate traiectoriile sînt mărginite și au un punct de absorbție dă naturii analitice a problemei un caracter particular. Mersul la întîmplare fără restricții conduce la ecuații diferențiale. În acest caz al mersului cu restricții soluțiile căutate sînt soluțiile excepționale ale unor ecuații ce sînt aproximate prin ecuații cu derivate parțiale.

2. *Ecuațiile cu diferențe ale procesului.* a) *Evenimentele procesului.* Evenimentele elementare ale procesului sînt traiectoriile plecînd din originea O a laticii R_N și care ajung în n pași într-o poziție M a laticii R_N, notată cu $d(n, M)$. Mulțimea tuturor acestor traiectorii constituie evenimentul $E(n, M)$ a cărui probabilitate trebuie calculată. Prin $E_A(n, M)$ vom nota evenimentul constituit din toate traiectoriile de lungime n de la O la M care nu trec prin A. Analog $E_{A,B}(n, M)$ este evenimentul constituit din traiectoriile de la O la M de lungime n care evită punctele A și B.

Evident, avem

$$E_{A,B}(n, M) = E_A(n, M) \cap E_B(n, M). \tag{1}$$

Alte evenimente pe care le vom folosi sînt $E^A(n, M)$ reprezentînd traiectoriile de lungime n de la O la M care trec prin A și $E_B^A(n, M)$ care reprezintă traiectoriile de la O la M de lungime n care trec prin A și nu trec prin B etc.

Între evenimentele $E(n, M)$, $E^A(n, M)$ și $E_A(n, M)$ există relația

$$E(n, M) = E_A(n, M) \cup E^A(n, M). \tag{2}$$

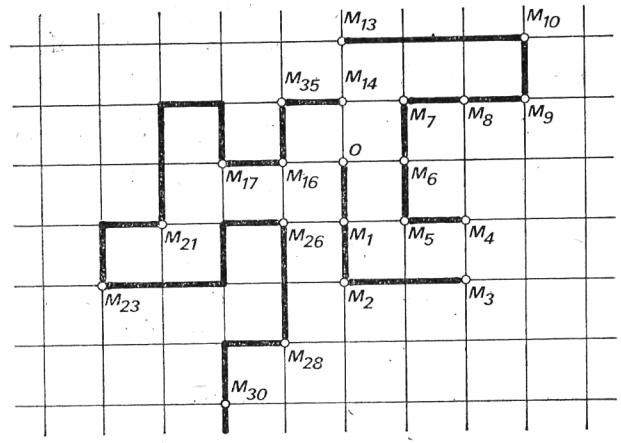


Fig. 2.4

Deoarece $E_A(n, M)$ și $E^A(n, M)$ sînt disjuncte, vom avea

$$P(n, M) = P_A(n, M) + P^A(n, M), \tag{3}$$

unde

$$P(n, M) = P(E(n, M)),\ P_A(n, M) = P(E_A(n, M))$$
$$P^A(n, M) = P(E^A(n, M)).$$

b) *Relații între* $E^A(n, M)$ și $E(k, 1)$. Se vede ușor că

$$E(\lambda, A) \cap E(n, B),\ \lambda < n \tag{4}$$

este mulțimea traiectoriilor de la O la A în λ pași și de la A la B în n-λ pași.
Prin urmare,

$$E^A(n, M) = \bigcup_{\lambda' \leqslant \lambda \leqslant n-\lambda''} E(\lambda, A) \cap E(n, M) \tag{5}$$

sau

$$E^A(n, M) = E(n, M) \cap \left(\bigcup_{\lambda' \leqslant \lambda \leqslant n-\lambda''} E(\lambda, A) \right). \tag{6}$$

Deoarece din regulile de definiție ale mersului la întîmplare cu restricții evenimentele $E(n, M)$ și $E(\lambda, A)$ sînt independente, obținem

$$P^A(n, M) = P(n, M) \sum_{\lambda' < \lambda \leqslant n-\lambda''} P(\lambda, A). \tag{7}$$

c) *Proprietăți de simetrie ale mulțimilor* $E(n, M)$ *în plan*
Dacă $M \equiv M(x, y)$, atunci, datorită simetriei, avem

$$E(n, M) = E(n, M') = E(n, M'') = E(n, M'''), \tag{8}$$

unde $M' = M'(-x, y)$, $M'' = M''(x, -y)$, $M''' = M(y, x)$.
Mai mult, există și relația

$$E(n, M) = E^0(n, M). \tag{9}$$

d) *Descompunerea mulțimii traiectoriilor care conduc la* M.
Să notăm cu M'_s, M''_s $(s = 1, 2, \ldots, N)$ cele $2N$ puncte vecine punctului $M(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ în laticea R_N.

$$M'_s = M'_s(x'_1, x'_2, \ldots, x'_N),\ x'_j = x_j,\ j \neq s,\ x'_s = x_s + 1;$$
$$M''_s(x''_1 \ldots x''_N),\ x''_j = x_j,\ j \neq s,\ x''_s = x_s - 1.$$

Mulțimea traiectoriilor de lungime n de la O la M este evident:

$$E_M(n-1, M_s) \cap E(M_s, M), \tag{10}$$

unde M_s este una dintre traiectoriile M'_s, M''_s iar prin $E(M_s, M)$ s-a notat evenimentul corespunzător traiectoriei ce conține segmentul M_sM. Aceste evenimente nu sînt disjuncte. Dacă atașăm fiecărui eveniment $E_M(n-1, M_s)$ o probabilitate, atunci probabilitatea evenimentului nu este determinată de datele procesului deoarece aceste date nu permit determinarea probabilității condiționate $P_{E_M(n-1, M_s)}(E(M_s, M))$.

Trebuie să precizăm dacă punctele vecine lui M_s — cu excepția lui M — sînt atinse pe traiectoria considerată pentru a putea să determinăm probabilitatea căutată.

Pentru simplificare vom considera numai cazul $N = 2$.

e) *Relații între evenimente în cazul* $N = 2$. În acest caz, după cum se vede și în fig. 2.5, $E_{M, N'_1, N'_2}(n-1, M'_1)$ este o mulțime nevidă; dat fiind acest eveniment, probabilitatea următorului eveniment $E(M_1, M)$ este $\frac{1}{3}$, deoarece particula care ajunge în M'_1 pe oricare din traiectoriile accesibile poate alege oricare

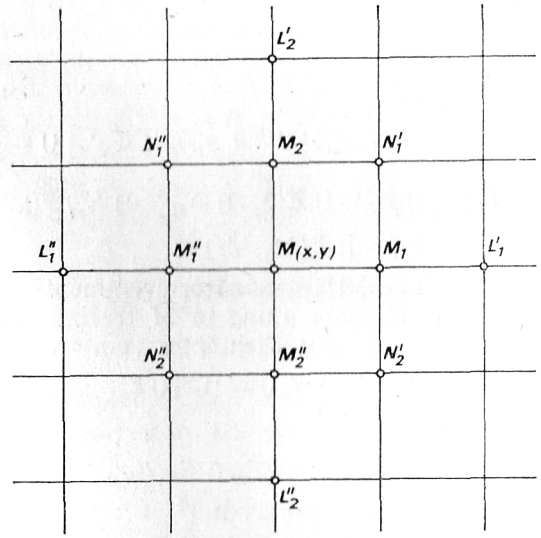


Fig. 2.5

din traiectoriile $M_1' M M_1' N_1' M_1' N_2'$ toate avînd aceleași probabilități.

$E_{M_1N_1', L_1'}(n-1, M_1')$ este o altă mulțime care prezintă caracteristici identice; traiectoriile aparținînd acestei mulțimi ajung în M_1 venind din N_2^1.

În sfîrșit, pentru mulțimea $E_{M_1N_2', L_1}(n-1, M_1')$ traiectoriile ce conduc la M_1' trec prin N_1'. Evenimentele $E_{M_1L_1'}(n-1, M_1')$ includ traiectoriile care ajung în M_1' fără a trece prin M și L_1' dar trec prin N_1' sau N_2'.

În primul caz nu se știe dacă traiectoria considerată trece prin N_2'. Presupunînd că nu trece prin N_2', atunci traiectoria aparține lui $E_{M, N_2', L_1'}(n-1, M_1')$. Atunci din $E_{M, L_1'}(n-1, M_1')$ vor fi scoase evenimentele $E^{N_2'}_{M_1L_1}(n-1, M_1')$ și $E^{N_1'}_{M_1L_1'}(n-1, M_1')$ sau mai exact evenimentul $E^{N_L}_{M_1L_1'}(n-1, M_1') \cup E^{N_1'}_{M_1L_1'}(n-1, M_1')$.

Acest eveniment este disjunct de $E_{M_1N_1', L_1'}(n-1, M_1')$ și de $E_{M, N_2', L_1'}(n-1, M_1')$. Prin urmare trebuie să considerăm evenimentele $E_M(n-1, M_1')$ care, conjecturînd că aceste evenimente se vor realiza, vor impune ca evenimentul următor $E(M_1', M)$ să aibă probabilitatea 1.

Rezumînd, traiectoriile de lungime n care sosesc în M trecînd prin M_1' sînt împărțite în două mulțimi disjuncte, a căror reuniune este membrul drept al relației de mai jos, unde pentru simplificare $E_{M, N_1', N_2'}(n-1, M_1')$ se notează cu $E_{M, N_1', N_2'}$ etc.

$$\mathfrak{L}_1' = \{E_{M, N', N_2'} \cup E_{M, N_1', L_1'} \cup E_{M, N_1', L_2'} \cup E^{N_2'}_{M_1L_1'} \cup E^{N_1'}_{M, L_1'} \cup$$

$$\cup E^{N_2'}_{M, N_1'} \cup E^{L_1}_{M, N_2'} \cup E^{N_1'}_{MN_2'} \cup E^{L_1'}_{M, N'} \cup E^{N_1'L_1'}_{M} \cup E^{N_2'N_1'}_{M} \cup E^{N_1'L_2'}_{M}\} \cap$$

$$\cap E(M_1, M). \tag{11}$$

Construind într-un mod asemănător evenimentele $\mathfrak{L}_1''$, $\mathfrak{L}_2'$, $\mathfrak{L}_2''$ care conțin traiectoriile care ajung în M trecînd prin M_1'', M_2' și M_2'', evenimente care sînt disjuncte, vom avea

$$E(n, M) = \mathfrak{L}_1' \cup \mathfrak{L}_1'' \cup \mathfrak{L}_2' \cup \mathfrak{L}_2''. \tag{12}$$

f) *Relații pentru probabilități.* Să observăm că

$$E_{M, N_1', N_2'} = E_M \cap E_{N_1'} E_{N_2'}. \tag{13}$$

Ținînd cont de relația (2), vom avea

$$E_M = E - E^M$$

și folosind (6), obținem

$$E_M(n-1, M_1') = E(n-1, M_1') - [E(n-2, M) \cap E(n-1, M_1')]. \tag{14}$$

Deci,

$$P_M(n-1, M_1') = P(n-1, M_1') - P(n-2, M) \cdot P(n-1, M_1'). \tag{15}$$

Analog,

$$E_{N_1'} = E - E^{N_1'} \tag{16}$$

și deci

$$P_{N_1'}(n-1, M_1') = P(n-1, M_1') - P(n-2, N_1')\, P(n-1, M_1'). \tag{17}$$

Prin urmare,

$$P(E_{M, N_1', N_2'}(n-1, M_1')) = P^3(n-1, M_1')\,[1 - P(n-2, M)] \times [1 - P(n-2, N_1')]\,[1 - P(n-2, N_2')]. \tag{18}$$

Într-o manieră asemănătoare putem scrie

$$E^{N_2'}_{M, N_1'} = E^{N_2'} \cap E_M \cap E'_{N_1'} \tag{19}$$

și

$$E^N(n-1, M_1') = E(n-1, M_1') \cap E(n-2, N_2'). \tag{20}$$

Deci,

$$P(E^{N_2'}_{M, L_1'}(n-1, M_1')) = P^3(m-1, M_1') \cdot P(n-2, N_2')[1 - P(n-2, M)]\,[1 - P(n-2, L_1')]. \tag{21}$$

Analog,

$$P(E^{N_1', L_1'}_{M}(n-1, M_1')) = P^3(n-1, M_1') \cdot P(n-2, N_1')\, P(n-2, L_1')\,[1 - P(n-2, M)]. \tag{22}$$

Acum putem scrie probabilitatea evenimentului $\mathfrak{L}_1'$ luînd în considerare probabilitățile condiționate ale traiectoriei $E(M_1', M)$ în diferitele cazuri

$$P(\mathfrak{L}_1') = P^3(n-1,\ M_1')\, Q_1'(n-2,\ M_1') \tag{23}$$

unde

$$Q_1'(n-2,\ M_1') = \frac{1}{3}\sum[1 - P(n-2, M)][1 - P(n-2, N_1')][1 - P(n-2,\ N_2')] + \frac{1}{2}\sum P(n-2,\ N_2')[1 - P(n-2,\ M)][1 - P(n-2,\ L_1')] + \sum P(n-2,\ N_2')\, P(n-2,\ L_1')[1 - P(n-2,\ M)]$$

sumele referindu-se la termenii corespunzători în jurul lui M_1'. În acest mod folosind relațiile (12) și (23) vom avea

$$P(n, M) = \sum_{r=1,2}\{P^3(n-1),\ M_r')\, Q_r'(n-2,\ M_r') + P^3(n-1,\ M_r'')\, Q_r''(n-2,\ M_r'')\} \tag{24}$$

relație care permite determinarea prin recurență a probabilităților căutate.

g) *Observații asupra ecuației cu diferențe* (24). Deoarece această ecuație cu diferențe corespunde unui proces în timp, (24) este de ordinul doi. Prin urmare, procesul corespunzător este de ordinul doi. Caracterul neomogen al relației (24) arată că ea nu poate conduce la o ecuație cu derivate parțiale.

BIBLIOGRAFIE

O. ONICESCU et GH. MIHOC, *Sur les chaînes à liaisons complètes*, Comptes Rendus, t. 200, Paris, 1935.

IDEM, *Sur les chaînes à liaisons complètes*, Bull. des Sciences Mathématiques, t. 59, Paris, iunie 1935.

IDEM, *Sur les chaînes statistiques*, Comptes Rendus, t. 202, Paris, 1936.

W. DOEBLIN și R. FORTET, *Sur certaines chaînes à liaisons complètes*, Bull. Sciences Mathématiques, t. 65, Paris, 1937.

O. ONICESCU, *La théorie générale des chaînes à liaisons complètes* (La reunion de Genève, 1937). Actualités scientifiques nr. 737, Hermann, Paris, 1938.

O. ONICESCU și GH. MIHOC, *La dépendance statistique*, Actualités Scientifiques nr. 503, Hermann, Paris, 1938.

R. FORTET, *Sur l'itération des substitutions algébriques lineaires à une infinité de variables et leurs applications à la théorie des probabilité en chaîne*, Thèse, Paris, 1938.

K. YOSIDA și S. KAKUTANI, *Operator theoretical treatment of Markov's process and the ergodic theorem*, Ann. of Math., vol. 42, 1941.

O. ONICESCU și GH. MIHOC, *Sur les chaînes de variables aléatoires*, Problèmes asymptotiques, Etudes et recherches, vol. 14, Ac. Romînă, 1943.

C. IONESCU-TULCEA și G. MARINESCU, *Sur certaines chaînes à liaisons complètes*, Comptes Rendus, t. 227, Paris, 1948.

IDEM, *La théorie ergodique pour les classes d'opérations non complètement continues*, Ann. of Math., vol. 52, nr. 1, 1950.

G. MARINESCU, *Operații relativ complet continue*, Studii și Cercetări Matematice, vol. II. Ac. R.P.R. 1950.

B. DE FINETTI, *Colloque sur les probabilités*, Génève, 1937, Actualités scientifiques, vol. 738, Hermann, Paris, 1938.

G. CIUCU, *Lanțuri cu legături complete cu densitate*, Comunicările Ac. R.P.R., nr. 7–8, 1954.

A. BLANC-LAPIERRE & R. FORTET, *Théorie des fonctions aléatoires*, Messa, Paris, 1953.

T. E. HARRIS, *On chaines of infinite order*, Pacific journal of Math., vol. 5, 1955.

CAPITOLUL III

CÎMP INFINIT DE PROBABILITATE

§ 1. Definiții

1. *Cîmp de evenimente.* Numim cîmp de evenimente în sen restrîns — sensul adoptat în această expunere — un sistem $\mathcal{K}$ de părți ale unei mulțimi E cu următoarele proprietăți

$$E \in \mathcal{K}; \quad \varnothing \in \mathcal{K}; \tag{c}$$

$$\text{dacă } A \in \mathcal{K}, \text{ atunci } CA \in \mathcal{K}; \tag{c'}$$

$$\text{dacă } A_j \in \mathcal{K} \text{ pentru } j \in N, \text{ atunci } \bigcup_{j \in N} A_j \in \mathcal{K}, \tag{c''}$$

N fiind mulțimea numerelor naturale.

Mulțimile S componente ale lui $\mathcal{K}$ sînt *evenimentele* cîmpului.

Punctele care compun pe E și pe care le vom reprezenta, în general, prin ξ, η, se numesc evenimentele elementare ale cîmpului. Astfel de puncte, considerate ca părți din E, pot face parte din $\mathcal{K}$.

Din axiomele (c), (c'), și (c'') rezultă cîteva alte proprietăți importante; în primul rînd următoarea

$$\text{dacă } A \in \mathcal{K}, \ B \in \mathcal{K}, \text{ atunci } A \cap B \in \mathcal{K}.$$

Observație. În prima axiomă se afirmă că evenimentul sigur E și evenimentul imposibil $\varnothing$ aparțin sistemului $\mathcal{K}$, în loc de a afirma că mulțimea vidă trebuie considerată drept complement al mulțimii E. O afirmație de semnificație pentru evenimentul imposibil $\varnothing$ în cadrul cîmpului de evenimente este în orice caz necesară.

2. *Probabilizarea cîmpului de evenimente.* Probabilitatea evenimentelor cîmpului este o funcție $P(A)$ de mulțime cu următoarele proprietăți

$$P(A) \geqslant 0; \tag{p}$$

$$P(E) = 1; \tag{p'}$$

$$P(CA) = 1 - P(A); \tag{p''}$$

$$P\left(\bigcup_{j \in N} A_j\right) = \sum_{j \in N} P(A_j), \tag{p'''}$$

dacă $A_j \cap A_k = \varnothing$ cînd $j = k$.

Axioma (p'') împreună cu (p') arată că

$$P(\varnothing) = 0.$$

Probabilitatea evenimentului imposibil este nulă. Aceasta nu înseamnă că orice eveniment cu probabilitatea nulă este imposibil.

Axioma (p''') se mai numește și axioma aditivității totale sau complete a probabilității considerată ca funcție de mulțime.

Să luăm două evenimente disjuncte A și B și evenimentul de o infinitate de ori. Deoarece

$$A \cap B = \varnothing, \quad \varnothing \cap A = \varnothing, \quad \varnothing \cap B = \varnothing, \quad \varnothing \cap \varnothing = \varnothing,$$

putem aplica axioma (p''') și, ținînd seamă că

$$A \cup B \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots = A \cup B$$

și că $P(\varnothing) = 0$, obținem

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Deci, este valabilă și aditivitatea finită.

Noțiunea de *probabilitate condiționată* și toate consecințele sale se transpun de la cîmpul finit, fără modificare.

§ 2. Variabile aleatoare. Valori medii

1. *Definiții.* O funcție $x = f(\xi)$ este o variabilă aleatoare pe cîmpul $\{E, \mathcal{K}\}$ dacă este determinată pentru orice $\xi \in E$ și este măsurabilă pe acest cîmp.

Să notăm, pentru simplificarea expunerii, cu E_A mulțimea punctelor, pentru care $f(\xi)$ aparține mulțimii măsurabile A din mulțimea numerelor reale R

$$E_A = \{\xi \mid f(\xi) \in A\}.$$

Măsurabilitatea funcției $f(\xi)$ corespunde faptului că

$$E_A \in \mathfrak{K}.$$

Dacă punem $E_a = E_A$, cînd A este intervalul $x < a$, putem enunța următoarea

Teoremă. *Condiția necesară și suficientă pentru măsurabilitatea funcției $f(\xi)$ este implicația $E_a \in \mathfrak{K}$ pentru orice a.*

Aceste condiții se pot varia luînd pentru A intervalele $x \leqslant a$, sau $x > a$, sau $x \geqslant a$.

2. *Proprietăți.* a) Dacă $g(x)(x \in R)$ este o funcție măsurabilă-Borel și $f(\xi)$ este o variabilă aleatoare a cîmpului $\{E, \mathfrak{K}\}$, funcția $g(f(\xi))$ este de asemenea o variabilă aleatoare a acestui cîmp.

Într-adevăr, dacă $g(x) < a$, $x = f(\xi) \in A$, deci $\xi \in E_A$.

b) $|f(\xi)|$ este măsurabilă dacă $f(\xi)$ este măsurabilă.

c) Dacă $g(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ este o funcție măsurabilă-Borel pe spațiul euclidian R^n și $f^1(\xi), f^2(\xi), \ldots, f^n(\xi)$ sînt variabile aleatoare în $\{E, \mathfrak{K}\}$, funcția $g(f^1(\xi), f^2(\xi), \ldots, f^n(\xi))$ este o variabilă aleatoare.

În particular, funcțiile $f + g$, fg sînt măsurabile odată cu f și g.

3. *Valoarea medie* $M(x) = M[f(\xi)]$ a variabilei aleatoare $x = f(\xi)$ pe cîmpul de probabilitate $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ se obține prin extinderea valorii medii a variabilelor simple definite în cap. II.

Se demonstrează că orice variabilă aleatoare $x = f(\xi)$ a cîmpului $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ este limită uniformă a unui șir de variabile simple,

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n. \tag{1}$$

Dacă, odată cu (1), $\lim_{n \to \infty} M(x_n)$ există și este independentă de șirul considerat, atunci, prin definiție,

$$M(x) = \lim_{n \to \infty} M[x_n]. \tag{2}$$

Vom scrie

$$M(x) = \int_E f(\xi)\ P(\mathrm{d}\xi). \tag{3}$$

Aceasta este integrala Lebesgue sau integrala funcției $f(\xi)$, cu măsura P, pe mulțimea E. Proprietățile acestei integrale sînt proprietățile generale ale valorii medii.

Se demonstrează că pentru existența integralei $M(f)$ este necesar și suficient ca $M[|f|]$ să existe.

Se demonstrează de asemenea că $M[f]$ există ori de cîte ori funcția $x = f(\xi)$ este mărginită.

Odată cu $\{E, \mathfrak{K}, P\}$, este cîmp de probabilitate și $\{A, \mathfrak{K}_A, P_A\}$, unde A este o mulțime din $\mathfrak{K}$ de măsură $P(A) \neq 0$, $\mathfrak{K}_A$ este mulțimea evenimentelor din $\mathfrak{K}$ incluse în A, iar $P_A = \frac{1}{P(A)} P$. O variabilă $f(\xi)$ măsurabilă în cîmpul $\{E, \mathfrak{K}\}$ este măsurabilă și în cîmpul $\{A, \mathfrak{K}_A\}$, deoarece $E_{(a)} \cap A \in \mathfrak{K}_A$. Prin urmare, conform definiției precedente,

$$M[f]_A = \frac{1}{P(A)} \int_A f(\xi)\ P(\mathrm{d}\xi).$$

deci integrala din membrul al doilea există.

Am definit astfel integrala funcției $f(\xi)$ pe mulțimea A cu măsura P,

$$I(f, A) = \int_A f(\xi)\ P(\mathrm{d}\xi).$$

Această integrală este

1°. Funcțională liniară de f,

$$I(f_1 + f_2, A) = I(f_1, A) + I(f_2, A),$$
$$I(\lambda f, A) = \lambda I(f, A),$$

funcționala fiind continuă

$$|f(\xi)| \leqslant M \Rightarrow |I(f, A)| \leqslant M;$$

2°. Funcție total aditivă de mulțime pe K,

$$I(f, \bigcup_j A_j) = \sum_j I(f, A_j)$$

dacă $A_j \cap A_k = \varnothing$, $j \neq k$;

3°. *Funcție absolut continuă.* Dacă $P(A) = 0$, atunci

$$\int_A f(\xi)\, P(\mathrm{d}\xi) = 0.$$

4. *Momentul de ordinul r al variabilei aleatoare* este, ca și momentul de ordinul întîi, extinderea momentului de ordinul r al unei variabile simple

$$M_r[f(\xi)] = M[(f(\xi))^r] = \int_E [f(\xi)]^r\, P(\mathrm{d}\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r\, \mathrm{d}F(x),$$

dacă această integrală, definită mai departe, există.

Se mențin relațiile de inegalitate dintre momente, stabilite pentru variabilele simple.

Teorema lui Cebîșev este valabilă pentru orice variabilă aleatoare,

$$P(\{\xi \mid |f(\xi)| < \varepsilon\}) \geqslant 1 - \frac{M_r(|f|)}{\varepsilon^r}, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

iar demonstrația corespunde aceleia dată în cazul variabilei simple.

Dispersia variabilei $f(\xi)$ este

$$\mu^2 = M[(f(\xi) - M(f))]^2.$$

Corelația între două variabile $f(\xi)$, $g(\xi)$ este

$$M[(f(\xi) - M[f])\,(g(\xi) - M[g])].$$

5. *Independența variabilelor aleatoare.* a) Variabilele $f_1(\xi)$ și $f_2(\xi)$ sînt *independente* dacă, A_1 și A_2 fiind două mulțimi boreliene oarecare din R (mulțimea numerelor reale) și E_{f_i, A_i} [mulțimea punctelor ξ din E pentru care $f_i(\xi) \in A_i (i = 1, 2)$], avem

$$P(E_{f_1, A_1} \cap E_{f_2, A_2}) = P(E_{f_1, A_1})\, P(E_{f_2, A_2}). \tag{4}$$

b) Variabilele $f_j(\xi) (j = 1, 2, \ldots, m)$ sînt independente în totalitatea lor, dacă, pentru orice grup de variabile $f_{j1}, f_{j2}, \ldots, f_{jk}$, avem:

$$P\Big(\bigcap_{l=1,2,\ldots,k} E_{f_{jl}, A_{jl}}\Big) = \prod_l P(E_{f_{jl}, A_{jl}}). \tag{5}$$

c) Variabilele $f_j(\xi) (j = 1, 2, \ldots)$ sînt independente Steinhaus, în totalitatea lor, dacă pentru orice grup finit de variabile avem egalitatea (2).

6. *Spațiile L_p și relațiile între momentele de diferite ordine.* Prin definiție, spațiul L_p relativ la cîmpul $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ este mulțimea variabilelor aleatoare care au un moment absolut de ordinul p,

$$M_p[f] = \int_E |f(\xi)|^p\, p(\mathrm{d}\xi) < \infty.$$

Inegalitățile demonstrate pentru momentele unui cîmp finit se extind la un cîmp oarecare, cu singura condiție a existenței acestor momente.

Vom reține inegalitatea (21), § 3, cap. II, care devine

$$\int_E |f(\xi)|^\alpha\, |g(\xi)|^\beta\, p(\mathrm{d}\xi) \leqslant \Big[\int_E |f(\xi)|^p\, p(\mathrm{d}\xi)\Big]^{\frac{\alpha}{p}} \Big[\int_E |g(\xi)|^q\, p(\mathrm{d}\xi)\Big]^{\frac{\beta}{q}},$$

cu relația

$$\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} = 1.$$

În particular, dacă luăm $\alpha = 1$, $p = 2$; $\beta = 1$, $q = 2$, rezultă

$$\int_E |f(\xi)\, g(\xi)|\, p(\mathrm{d}\xi) \leqslant \Big[\int_E |f(\xi)|^2\, p(\mathrm{d}\xi)\Big]^{\frac{1}{2}} \Big[\int_E |g(\xi)|^2\, p(\mathrm{d}\xi)\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Prin urmare, dacă $f(\xi) \in L_2$ și $g(\xi) \in L_2$, atunci $f(\xi)\, g(\xi) \in L_1$. Reținem de asemenea inegalitatea

$$\int_E |f(\xi)|^p\, p(\mathrm{d}\xi) \leqslant \Big[\int_E |f(\xi)|^{kp}\, p(\mathrm{d}\xi)\Big]^{\frac{1}{k}}.$$

Prin urmare, dacă $f(\xi) \in L_r$, deci dacă există un moment de ordinul r, $f(\xi)$ are momente de toate ordinile mai mici,

$$f(\xi) \in L_p (1 \leqslant p \leqslant r).$$

7. *Valorile medii ale sumei și produsului.* Prin extinderea rezultatului obținut în cazul cîmpului finit, avem următoarele două teoreme importante

1°. $M(f + g) = M(f) + M(g)$;

2°. $M(fg) = M(f)\, M(g)$, dacă variabilele $f(\xi)$ și $g(\xi)$ sînt independente.

Dacă $M(fg) = M(f)\, M(g)$, iar $f(\xi)$ și $g(\xi)$ nu sînt independente, ele se numesc necorelate.

§ 3. Probabilitate condiționată și valoare medie condiționată în raport cu o σ-algebră dată

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un cîmp de probabilitate și $A \in \mathcal{K}$, cu proprietatea $P(A) > 0$.

Am văzut că probabilitatea condiționată a lui $B \in \mathcal{K}$ de A este dată prin relația

$$P_A(B) = P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}. \tag{1}$$

S-a demonstrat de asemenea că $(\Omega, \mathcal{K}, P_A)$ este un cîmp de probabilitate în care probabilitatea P_A „nu încarcă" mulțimile disjuncte de A, adică pentru orice $B \in \mathcal{K}$ cu $B \cap A = \varnothing$ avem $P_A(B) = 0$. S-a definit valoarea medie condiționată a unei variabile aleatoare integrabile f în raport cu evenimentul A (dat fiindcă A s-a realizat) prin relația

$$M(f \mid A) = \int_\Omega f(\omega)\, P_A(\mathrm{d}\omega). \tag{2}$$

Ținînd cont de definiția (1) a lui P_A și de proprietatea arătată mai sus, relația (2) mai poate fi scrisă sub forma

$$P(A) \cdot M(f \mid A) = \int_A f(\omega)\, P(\mathrm{d}\omega). \tag{3}$$

Se observă imediat că dacă f este funcția indicatoare a unui eveniment $B \in \mathcal{K}$, adică $f = \chi_B$, atunci

$$M(\chi_B \mid A) = P(B \mid A)$$

și prin urmare probabilitatea condiționată este un caz particular de valoare medie condiționată.

Ne vom ocupa deci de definirea valorii medii condiționate în raport cu o σ-algebră oarecare $\mathcal{A}$.

Cazul unei σ-algebre cel mult numărabil generată. Vom considera mai întîi o σ-algebră $\mathcal{A}$ de o formă specială.

Fie $\{A_{i,\ i=1,2,\ldots} \mid A_i \in \mathcal{K},\ \cup A_i = \Omega\}$, adică $\{A_i\}$ formează o desfacere cel mult numărabilă, măsurabilă a lui Ω. Să considerăm $\mathcal{A}$ cea mai mică σ-ialgebră care conține pe $\{A_i\}$, astfel spus $\mathcal{A}$ este σ-algebră generată de $\{A_i\}$. Se observă că $A \in \mathcal{A}$, dacă și numai dacă $A = \cup A_{ik}$. Vom defini valoarea

medie condiționată a lui f în raport cu σ-algebra $\mathcal{A}$ ca fiind variabilă aleatoare $M(f \mid \mathcal{A})$ care ia valoarea $M(f \mid A_i)$ dacă $\omega \in A_i$ și dacă $P(A_i) > 0$. Prin urmare, $M(f \mid \mathcal{A})$ (ω) este definit numai pentru acele puncte ω care aparțin la mulțimi A_i pentru care $P(A_i) > 0$. Deci $M(f \mid \mathcal{A})$ este o variabilă aleatoare definită „cu probabilitatea 1" care este măsurabilă în raport cu σ-algebra $\mathcal{A}$. Pe mulțimea A_i pentru care $P(A_i) \neq 0$, variabila aleatoare $M(f \mid \mathcal{A})$ este constantă, valoarea acestei constante fiind valoarea medie condiționată a lui f în raport cu A_i.

Să observăm că avînd dată funcția $M(f \mid \mathcal{A})$, putem deduce imediat nu numai pe $M(f \mid A_i)$ pentru orice A_i pentru care $P(A_i) > 0$, dar și pe $M(f \mid A)$ pentru orice $A \in \mathcal{A}$ pentru care $P(A) \neq 0$. Într-adevăr, dacă $A = \cup A_{ik}$, atunci

$$P(A) \cdot M(f \mid A) = \sum_k P(A_{ik})\, M(f \mid A_{ik}). \tag{3'}$$

Ținînd cont de modul cum au fost definite $M(f \mid A)$ și $M(f \mid \mathcal{A})$ relația (3') mai poate fi scrisă și în forma

$$\int_A f\, \mathrm{d}P = \int_A M(f \mid \mathcal{A})\, \mathrm{d}P \tag{4}$$

pentru orice $A \in \mathcal{A}$. Pin urmare, $M(f \mid \mathcal{A})$ este o variabilă aleatoare măsurabilă în raport cu $\mathcal{A}$ și satisface relația (4). Două astfel de variabile aleatoare sînt în mod necesar „egale cu probabilitatea 1".

Aceste proprietăți vor servi la definirea valorii medii condiționate a lui f în raport cu o σ-algebră arbitrară.

Cazul unei σ-algebre oarecare. D e f i n i ț i a 1. *Fie* $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *un cîmp de probabilitate,* f *o variabilă aleatoare integrabilă și* $\mathcal{A}$ *o* σ*-algebră oarecare inclusă în* $\mathcal{K}$. *Valoarea medie condiționată a lui* f *în raport cu* σ*-algebra* $\mathcal{A}$ *este o variabilă aleatoare* $M(f \mid \mathcal{A})$ *care are proprietățile*:

1) $M(f \mid \mathcal{A})$ *este* $\mathcal{A}$ *măsurabilă*;

2) $\int_A M(f \mid \mathcal{A})\, \mathrm{d}P = \int_A f\, \mathrm{d}P$ *pentru orice* $A \in \mathcal{A}$.

Existența și unicitatea (cu probabilitatea 1) a lui $M(f \mid \mathcal{A})$ este dată de teorema Radon — Nykodim.

Într-adevăr, funcția de mulțime $\mu(A) = \int_A f\, \mathrm{d}P$ definită pentru orice $A \in \mathcal{A}$ este σ-aditivă, $|\mu(\Omega)| \leqslant \int_\Omega |f|\, \mathrm{d}P < \infty$, și este

absolut continuă în raport cu P. Deci există și este unică cu probabilitatea 1 o funcție g măsurabilă în raport cu σ-algebra $\mathcal{A}$ care să aibă proprietatea că

$$\int_A g\,dP = \mu(A) = \int_A f\,dP \text{ pentru orice } A \in \mathcal{A}.$$

Luînd $M(f|\mathcal{A}) = g$, existența și unicitatea cu probabilitatea 1 a valorii medii condiționate în raport cu o σ-algebră oarecare a fost demonstrată.

Probabilitatea condiționată de o σ-algebră oarecare. După cum am mai spus probabilitatea condiționată este un caz particular de valoare medie condiționată, luînd $f = \chi_B$. Prin urmare ajungem la următoarea definiție a probabilității condiționate a evenimentului B în raport cu σ-algebra $\mathcal{A}$.

Definiția 2. *Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un cîmp de probabilitate și $B \in \mathcal{K}$ un eveniment oarecare și $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}$ o σ-algebră oarecare. Probabilitatea condiționată a lui B de σ-algebra $\mathcal{A}$ este o variabilă aleatoare $P(B|\mathcal{A})$ cu proprietățile*

1) *$P(B|\mathcal{A})$ este $\mathcal{A}$ măsurabilă;*

2) $\int_A P(B|\mathcal{A})\,dP = P(B \cap A)$ *pentru orice $A \in \mathcal{A}$.*

Proprietățile valorii medii condiționate și ale probabilității condiționate de o σ-algebră oarecare. În cele ce urmează vom presupune că variabilele aleatoare care intervin sînt integrabile iar relațiile care intervin trebuie interpretate că au loc cu probabilitatea 1.

1) Dacă $f \geqslant 0$, atunci $M(f|\mathcal{A}) \geqslant 0$;

2) Dacă f este $\mathcal{A}$ măsurabilă, atunci

$$M(f|\mathcal{A}) = f.$$

În particular, dacă $B \in \mathcal{A}$, atunci

$$P(B|\mathcal{A}) = \chi_B;$$

3) $M(M(f|\mathcal{A})) = M(f)$;

4) $M(a_1 f_1 + a_2 f_2|\mathcal{A}) = a_1 M(f_1|\mathcal{A}) + a_2 M(f_2|\mathcal{A})$

pentru orice $a_1, a_2 \in R$.

În particular, dacă $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, atunci

$$P(B_1 \cup B_2|\mathcal{A}) = P(B_1|\mathcal{A}) + P(B_2|\mathcal{A}).$$

Pentru demonstrarea relației (4) se observă imediat că $a_1 M(f_1|\mathcal{A}) + a_2 M(f_2|\mathcal{A})$ îndeplinește cele două condiții din funcția lui $M(a_1 f_1 + a_2 f_2|\mathcal{A})$.

5) Dacă $\{f_n\}_{n \in N}$ este un șir monoton crescător de variabile aleatoare, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} M(f_n|\mathcal{A}) = M(\lim\limits_{n\to\infty} f_n|\mathcal{A})$.

În particular, dacă $\{B_n\}_{n \in N}$ este un șir de evenimente monoton crescător, atunci

$$\lim_{n\to\infty} B(P_n|\mathcal{A}) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n|\mathcal{A}\right)$$

iar dacă $\{B_n\}_{n \in N}$ este un șir de evenimente două cîte două disjuncte, atunci

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n|\mathcal{A}) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n|\mathcal{A}\right). \tag{5}$$

Această proprietate este o consecință imediată a teoremei de convergență monotonă.

Observație. Relația (5) nu înseamnă că pentru fiecare $\omega \in \Omega$ probabilitatea condiționată $P(\cdot|\mathcal{A})$ poate fi considerată ca o funcție numărabil aditivă pe σ-algebra $\mathcal{K}$. Conform celor spuse la început, relația (5) are loc cu probabilitatea 1, adică există eventual o mulțime E care depinde de șirul $\{B_n\}_{n \in N}$ și care are probabilitatea 0 astfel încît pentru orice $\omega \notin E$ relația (5) este adevărată. Cum mulțimea șirurilor de evenimente din $\mathcal{K}$ este nenumărabilă s-ar putea ca reuniunea acestor mulțimi de excepție să acopere o parte de măsură pozitivă din Ω sau chiar întregul spațiu Ω (și în acest caz nu există nici un punct $\omega \in \Omega$ pentru care 5) să fie adevărată pentru toate șirurile de evenimente disjuncte din $\mathcal{K}$).

6) Dacă σ-algebra generată de f este independentă de $\mathcal{A}$ atunci

$$M(f|\mathcal{A}) = M(f).$$

Într-adevăr, din independenta σ-algebrei generată de f față de σ-algebra $\mathcal{A}$ rezultă că

$$\int_A f\,dP = \int \chi_A \cdot f\,dP = \left(\int \chi_A\,dP\right) \cdot \left(\int f\,dP\right) = P(A)\,M(f).$$

De aici se vede că $M(f)$ îndeplinește cele două condiții din definiția lui $M(f \mid \mathcal{A})$.

7) Dacă g este $\mathcal{A}$ măsurabilă, atunci

$$M(g \cdot f \mid \mathcal{A}) = gM(f \mid \mathcal{A}).$$

Pentru a demonstra această formulă să considerăm mai întîi $g = \chi_{A_1}$ cu $A_1 \in \mathcal{A}$. Atunci, $g \cdot M(f \mid \mathcal{A})$ este evident $\mathcal{A}$ măsurabilă și

$$\int_A gM(f \mid \mathcal{A})\, dP = \int_A \chi_{A_1} M(f \mid \mathcal{A})\, dP = \int_{A \cap A_1} M(f \mid \mathcal{A})\, dP =$$

$$= \int_{A \cap A_1} f\, dP = \int_A \chi_{A_1} f\, dP = \int_A gf\, dP.$$

Prin urmare în acest caz particular formula a fost demonstrată. Se vede ușor că familia variabilelor aleatoare g pentru care formula este adevărată este închisă la operații liniare și la trecerea la limita pentru șiruri monotone nenegative. Prin urmare această familie, care după cum am arătat conține indicatorii evenimentelor din $\mathcal{A}$, va conține orice variabilă aleatoare $\mathcal{A}$ măsurabilă și nenegativă. Descompunînd $g = g^+ - g^-$ se obține formula în cazul general.

8) Fie $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$, atunci

$$M(M(f \mid \mathcal{A}) \mid \mathcal{A}_1) = M(f \mid \mathcal{A}_1).$$

Într-adevăr, $M(M(f \mid \mathcal{A}) \mid \mathcal{A}_1)$ este $\mathcal{A}_1$ măsurabilă și

$$\int_A M(M(f \mid \mathcal{A}) \mid \mathcal{A}_1)\, dP = \int_A M(f \mid \mathcal{A})\, dP = \int_A f\, dP$$

pentru orice $A \in \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$.

9) Fie $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \ldots \subset \mathcal{A}_n \subset \ldots \subset \mathfrak{K}$ un șir crescător de σ-algebre.

Să notăm cu $\mathcal{A}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n\right)$ — cea mai mică σ-algebră care conține toate σ-algebrele $\mathcal{A}_n$. Atunci

$$\lim_{n \to \infty} M(f \mid \mathcal{A}_n) = M(f \mid \mathcal{A}_\infty).$$

Analog, fie $\mathcal{A}_{-1} \supset \mathcal{A}_{-2} \ldots \supset \mathcal{A}_{-n} \supset \ldots$ un șir descrescător de σ-algebre incluse în $\mathfrak{K}$ și să notăm cu $\mathcal{A}_{-\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ cea mai mare σ-algebră conținută în toate σ-algebrele $\mathcal{A}_{-n}$. Atunci

$$\lim_{n \to \infty} M(f \mid \mathcal{A}_{-n}) = M(f \mid \mathcal{A}_{-\infty}).$$

Demonstrarea acestor formule se face folosind teorema de convergență a martingalelor.

§ 4. Funcția de repartiție

1. *Definiție și proprietăți.* Prin definiție, dacă E_a este mulțimea pentru care $x = f(\xi) < a$, expresia

$$P(E_a) = F(a) \tag{1}$$

se numește funcția de repartiție a variabilei aleatoare.

Următoarele proprietăți sînt imediate:

a) $0 \leqslant F(a) \leqslant 1$;

b) $F(a)$ este monotonă descrescătoare, $F(a'') \geqslant F(a')$, dacă $a'' > a'$;

c) $F(+\infty) = \lim_{a \to \infty} F(a) = 1$, deoarece $E_\infty = E$;

d) $F(-\infty) = \lim_{a \to -\infty} F(a) = 0$, deoarece $E_{-\infty} = \varnothing$;

e) $F(a)$ este continuă la stînga, $F(a - 0) = F(a)$, în legătură cu $E_{a-0} = E_a$.

2. *Discontinuitățile funcției de repartiție.* Dacă $f(\xi)$ este o variabilă simplă, susceptibilă de valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cu probabilitățile $p_1, p_2, \ldots, p_n$, avem, conform (1),

$$F(x) = \sum_{x_j < x} p_j.$$

Funcția $F(x)$ este discontinuă în fiecare dintre punctele x_j, discontinuitatea este reprezentată de un salt pozitiv egal cu p_j.

Teoremă. *Mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției* $F(a)$ *este numărabilă.*

Să numerotăm cu $x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,k_n} (k_n < n)$ punctele în care salturile funcției $F(a)$ sînt cuprinse între $\frac{1}{n}$ și $\frac{1}{n+1}$. Cînd n tinde către infinit, avem astfel un șir, deci o mulțime numărabilă, în care intră orice punct de discontinuitate.

Rezultă că mulțimea punctelor în care $F(a+0) = F(a)$ are puterea continuului.

3. *Teorema lui Helly. Dacă* $F_a(x)$ *este o familie infinită de funcții monotone nedescrescătoare, cu variație mărginită, din orice șir* $F_n(x)$ *infinit aparținînd familiei putem extrage un șir* $F_{n_s}(x)$ *care are o limită determinată* $F(x)$ *în toate punctele de continuitate ale acestuia.*

În aplicarea acestei teoreme des folosită în teoria probabilităților sînt de observat următoarele:

Dacă $\lim F_n(x) = F(x)$ în toate punctele de continuitate și dacă variația totală a fiecăreia dintre funcțiile $F_n(x)$ este mărginită, variația totală a limitei poate fi nemărginită. Numai dacă mărginirea variațiilor este uniformă, față de n, se poate ajunge la concluzia că variația funcției $F(x)$ este mărginită.

Dacă $\lim F_n(x) = F(x)$ de asemenea în punctele de continuitate și dacă variația totală a fiecăreia dintre funcțiile $F_n(x)$ este l, aceasta implică numai concluzia că variația totală a funcției $F(x)$ este cel mult egală cu l, cum arată exemple foarte ușor de construit.

4. *Integrala Stieltjes.* Fiind dată o funcție continuă $a(x)$ în intervalul (a, b), integrala

$$I = \int_a^b a(x)\, \mathrm{d}F(x),$$

unde $F(x)$ este o funcție monotonă nedescrescătoare continuă în a și b, cu variația mărginită în (a, b), este limita unică a sumelor

$$S_j = \sum_{i=1,2,\ldots,n} a(x_i)[F(x_{i+1}) - F(x_i)]$$

cu $x_1 = a$, $x_{n+1} = b$ pentru orice diviziune δ prin puncte x_i de continuitate ale funcției $F(x)$, cînd $\sup\limits_{i=1,2,\ldots,n} (x_{i+1} - x_i)$ tinde către zero.

Dacă limita acestei integrale există cînd, $a(x)$ fiind continuă pentru orice x real, $a \to -\infty$, $b \to \infty$, atunci integrala pe care o vom folosi în mod curent se scrie

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x)\, \mathrm{d}F(x).$$

Condiția necesară și suficientă pentru existența integralei I este ca

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a(x)|\, \mathrm{d}F(x)$$

să aibă o valoare finită.

Se demonstrează fără greutate că, pentru orice funcție continuă și mărginită

$$|a(x)| < M, \quad x \in R,$$

integrala I are o valoare finită, cuprinsă între limita superioară și cea inferioară a funcției $a(x)$.

5. *Egalitatea integralei Stieltjes cu integrala Lebesgue.* Se demonstrează că

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x)\, \mathrm{d}F(x) = \int_E a(f(\xi))\, P(\mathrm{d}\xi),$$

cînd ambele integrale există; în particular, deci, cînd funcția $a(x)$ este mărginită.

6. *Funcția de repartiție a unui vector*

$$x[x^1 = f^1(\xi), \quad x^2 = f(\xi), \ldots, x^n = f^n(\xi)],$$

definit pe spațiul E și cu valori în spațiul euclidian cu n dimensiuni. Componentele $x^j = f^j(\xi)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ sînt variabile aleatoare ale cîmpului $\{E, \mathfrak{K}, P\}$. Notăm

$$E_{a_1, a_2, \ldots, a_m} = \{\xi \mid f^1(\xi) < a_1, f^2(\xi) < a_2, \ldots, f^n(\xi) < a_n\}.$$

Prin definiție, *funcția de repartiție a vectorului* x sau *funcția de repartiție conjugată a variabilelor* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este

$$F(a) = F(a^1, a^2, \ldots, a^n) = P(E_{a^1, a^2, \ldots, a^n}). \qquad (2)$$

Lăsăm pe seama cititorului să precizeze proprietățile generale ale acestor funcții, după modelul funcției de repartiție a unei singure variabile.

Integrala Stieltjes, corespunzătoare pentru o funcție continuă $a(x) = a(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ într-un interval finit

$$D: c^1 \leqslant x^1 \leqslant d^1, \ldots, c^n \leqslant x^n \leqslant d^n, \tag{3}$$

se notează

$$I_D = \int_D a(x)\, dF(x)$$

și reprezintă limita unică a sumelor de forma

$$S_{D,\delta} = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} a(x^1_{j_1}, x^2_{j_2}, \ldots, x^n_{j_n})\, \Delta^n F(x^1_{j_1}, x^2_{j_2}, \ldots, x^n_{j_n})$$

pentru orice diviziune δ în intervale de tipul (3) ale domeniului D, cînd aceste intervale tind uniform către zero. Punctele de diviziune sînt puncte de continuitate ale funcției F, iar Δ^n este diferența obișnuită de ordinul n calculată în vîrfurile celulei respective.

Dacă $F(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ are în orice punct al domeniului D derivata $\dfrac{\partial^n F}{\partial x^1\, \partial x^2 \ldots \partial x^n} = \rho(x)$, aceasta este densitatea de repartiție, și integrala I_D ia forma

$$I_D = \int_D a(x)\, \rho(x)\, dx^1\, dx^2 \ldots dx^n.$$

Dacă D este întreg spațiul R^n și integrala astfel extinsă există, atunci există egalitatea între cele două integrale

$$\int_{R^n} a(x^1, x^2, \ldots, x^n)\, dF(x) = \int_E a(f^1(\xi), f^2(\xi), \ldots, f^n(\xi))\, P(d\xi).$$

§ 5. Funcția caracteristică

Fiecărei variabile aleatoare $x = f(\xi)$ îi corespunde o funcție de repartiție $F(a)$. Calculul direct cu aceste funcții, care în general sînt discontinue, prezintă dificultăți. De aceea, se introduce pentru caracterizarea repartiției o funcție continuă cu valori complexe, numită *funcție caracteristică*.

1. Definiție. *Funcția caracteristică a variabilei x este valoarea medie a variabilei $e^{iux(\xi)}$, unde u este parametru real,*

$$\varphi(u) = \int_E e^{iux(\xi)}\, P(d\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\, dF(x). \tag{1}$$

Vom folosi pentru studiul proprietăților funcției caracteristice una sau alta dintre cele două expresii echivalente ale ei.

2. *Proprietățile funcției caracteristice*:

a) $\varphi(0) = 1$, deoarece $\varphi(0) = \int_E P(d\xi) = P(E) = 1$;

b) $|\varphi(u)| \leqslant 1$, rezultă din proprietățile integralei

$$|\varphi(u)| \leqslant \int_E P(d\xi) = 1;$$

c) $\varphi(u)$ este reală dacă distribuția este simetrică. În adevăr, partea complexă este în acest caz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin ux\, dF(x) = \int_0^{\infty} \sin ux\, d[F(x) - F(-x)],$$

care se anulează dacă distribuția este simetrică.

d) $\varphi(u)$ este continuă pentru orice u real. În adevăr, fie ε un număr pozitiv oricît de mic. Există un număr A_ε astfel că

$$F(-A_\varepsilon) < \varepsilon, \quad 1 - F(A_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{2}$$

Vom avea atunci

$$\varphi(u + \Delta) - \varphi(u) = \int_{-A_\varepsilon}^{+A_\varepsilon} (e^{i(u+\Delta)x} - e^{iux})\, dF(x) + \alpha_\varepsilon, \tag{3}$$

unde, ținînd seama de (2), se vede imediat că

$$|\alpha_\varepsilon| < 4\varepsilon.$$

Deoarece funcția e^{iux} este continuă, iar x este mărginit între $-A$ și A, putem alege un număr η, astfel că

$$|e^{i(u+\Delta)x} - e^{iux}| \leqslant \varepsilon$$

dacă $\Delta < \eta$. În aceste condiții,

$$|\varphi(u + \Delta) - \varphi(u)| \leqslant 5\varepsilon,$$

deci teorema este demonstrată.

e) *Dacă există momentele pînă la ordinul n ale variabilei x, funcția caracteristică are derivate pînă la ordinul n.* În adevăr, dacă există

$$M(x) = \int_E x(\xi)\, P(\mathrm{d}\xi),$$

există atunci și

$$M(|x|) = \int_E |x(\xi)|\, P(\mathrm{d}\xi)$$

și, prin urmare,

$$\mathrm{i} \int_E x(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}ux(\xi)}\, P(\mathrm{d}\xi),$$

care reprezintă $\frac{\mathrm{d}\varphi(u)}{\mathrm{d}u}$. În același mod se demonstrează proprietatea și pentru celelalte ordine.

Vom avea, în general, următoarea relație între derivatele funcției caracteristice și momente, cînd acestea există:

$$\mathrm{i}^k M(x^k) = \left(\frac{\mathrm{d}^k \varphi(u)}{\mathrm{d}u^k}\right)_{u=0}. \tag{4}$$

Dacă funcția caracteristică este analitică, va rezulta deci următoarea expresie a ei, cu ajutorul momentelor

$$\varphi(u) = 1 + \mathrm{i}\, M_1 u + \frac{\mathrm{i}^2 M_2}{2!} u^2 + \ldots + \frac{\mathrm{i}^n M_n}{n!} u^n + \ldots \tag{5}$$

în limita regiunii de convergență.

f) Orice funcție caracteristică aparține clasei P a funcțiilor de tip pozitiv. Funcțiile de tip pozitiv $\varphi(u)$ sînt funcții continue, definite prin următoarele proprietăți:

Pentru orice întreg m, orice sistem de valori reale, $u_1, u_2, \ldots, u_m$, și orice sistem de numere complexe $a_1, a_2, \ldots, a_m$, avem

$$\sum_{h,k}^{1,\ldots,m} a_h \bar{a}_k \varphi(u_n - u_k) \geqslant 0. \tag{6}$$

Se verifică imediat că funcția caracteristică $\varphi(u)$ este de tip pozitiv. Într-adevăr,

$$\sum_{h,k} a_h \bar{a}_k \varphi(u_h - u_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{h,k} a_h \bar{a}_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}u_h x - \mathrm{i}u_k x}\right) \mathrm{d}F(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\sum_h a_h\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}u_h x}\right|^2 \mathrm{d}F(x) \geqslant 0.$$

Faptul important, în legătură cu această proprietate, este dat de

Teorema lui Bochner. *Orice funcție continuă de tip pozitiv are o reprezentare de forma*

$$\psi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\, \mathrm{d}G(x),$$

unde $G(x)$ este o funcție monotonă nedescrescătoare, cu variație totală finită. Dacă această variație este egală cu a, rezultă

$$\psi(u) = a\varphi(u),$$

unde $\varphi(u)$ este o funcție caracteristică.

Demonstrația acestei teoreme nu o dăm aici.

3. *Alte proprietăți.*

Teoremă. *Dacă $\varphi_n(u)$ este un șir de funcții caracteristice și $\varphi(u) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(u)$ există și este continuă, atunci limita $\varphi(u)$ este o funcție caracteristică.*

În adevăr, pentru orice n, avem

$$\sum_{h,k} a_h \bar{a}_k \varphi_n(u_h - u_k) \geqslant 0.$$

Deci, și cînd n tinde spre infinit, vom avea:

$$\sum_{h,k} a_h \bar{a}_k \varphi(u_h - u_k) \geqslant 0,$$

ceea ce arată că $\varphi(u)$ este o funcție de tip pozitiv. Deoarece $\varphi_n(0) = 1$ pentru orice n, iar $\lim \varphi_n(0) = \varphi(0)$, rezultă $\varphi(0) = 1$; prin urmare, $\varphi(u)$ este o funcție caracteristică.

Alte consecințe ale proprietăților precedente sînt:

Dacă $\varphi_n(u)$ sînt funcții caracteristice și a_n numere pozitive a căror sumă este 1, $\sum a_n = 1$, atunci

$$\varphi(u) = \sum a_n \varphi_n(u)$$

este o funcție caracteristică, fie că este vorba de o sumă finită sau infinită.

Mai general, dacă $\varphi_\alpha(u)$ este o funcție caracteristică pentru orice α real și $H(\alpha)$ este o funcție de repartiție, atunci

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\alpha(u)\, \mathrm{d}H(\alpha)$$

este o funcție caracteristică.

4. *Funcția caracteristică a vectorului* $f(\xi)$ aparținînd unui spațiu Hilbert real este

$$\varphi(u) = \int_E e^{i\,uf(\xi)}\, P(d\xi), \tag{7}$$

unde $uf(\xi)$ este produsul scalar între vectorul $f(\xi)$ și vectorul arbitrar real u.

În spațiul euclidian cu n dimensiuni cu reper cartezian, expresia de mai sus devine

$$\varphi(u) = \int_E e^{i\,[u_1 f_1(\xi) + u_2 f_2(\xi) + \ldots + u_n f_n(\xi)]}\, P(d\xi), \tag{8}$$

unde $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sînt componentele vectorului u, argumentul funcției caracteristice, iar $f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots, f_n(\xi)$ sînt cele n variabile aleatoare, componentele vectorului aleator $f(\xi)$.

Dacă introducem funcția de repartiție $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a acestui vector, putem înlocui (8) prin

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n)}\, dF(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{9}$$

care constituie generalizarea imediată a reprezentării spectrale (1).

5. *Unicitatea reprezentării* (1). Să presupunem că există două funcții $F_1(x)$, $F_2(x)$ cu proprietățile funcțiilor de repartiție, pentru care avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,ux}\, dF_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,ux}\, dF_2(x). \tag{10}$$

Aceasta înseamnă că

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos ux\, dF_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos ux\, dF_2(x), \tag{11}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin ux\, dF_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin ux\, dF_2(x).$$

Fie $-a$ și b două puncte de continuitate ale celor două funcții, pentru care avem $F_1(-a) < \varepsilon$, $F_2(-a) < \varepsilon$, $1 - F_1(b) < \varepsilon$, $1 - F_2(b) < \varepsilon$. Fie acum alte două puncte oarecare α, $\beta (\alpha < \beta)$ situate între $-a$ și b, de asemenea puncte de continuitate ale celor două funcții.

Putem construi pe intervalul de bază $(-a, b)$ o serie Fourier $a_0 + \sum_n a_n \cos nx + b_n \sin nx$ care reprezintă funcția

$$f(x) \begin{cases} 0 & -\alpha \leqslant x < \alpha, \\ 1 & \alpha \leqslant x \leqslant \beta, \\ 0 & \beta < x \leqslant b. \end{cases}$$

Din (11) rezultă

$$\int_{-a}^{b} f(x)\, dF_1(x) = \int_{-a}^{b} f(x)\, dF_2(x) + \omega,$$

unde $|\omega| < l\varepsilon$, deci, ținînd seama de valorile funcției $f(x)$,

$$F_1(\beta) - F_1(\alpha) = F_2(\beta) - F_2(\alpha) + \omega.$$

Cum $F_1(\alpha)$, $F_1(\beta)$, $F_2(\alpha)$, $F_2(\beta)$ nu depind de ε, rezultă

$$F_1(\beta) - F_1(\alpha) = F_2(\beta) - F_2(\alpha).$$

Dacă facem $\alpha \to \infty$, rezultă

$$F_1(\beta) = F_2(\beta)$$

în orice punct β de continuitate. Deci, reprezentarea (1) este unică.

§ 6. Relațiile între funcțiile de repartiție și funcția caracteristică

1. *Teoreme de convergență.*

Teorema A. *Dacă șirul* $F_n(x)$ *de funcții de repartiție converge către o funcție* $F(x)$, *șirul* $\varphi_n(u)$ *al funcțiilor caracteristice corespunzătoare converge către funcția caracteristică* $\varphi(u)$, *corespunzătoare funcției* $F(x)$.

Este suficient să observăm că, din convergența șirului $F_n(x)$, către $F(x)$, rezultă că $-a$ și b fiind puncte de continuitate pentru $F(x)$, astfel alese ca $F(-a) < \varepsilon$, $F(\infty) - F(b) < \varepsilon$,

putem alege un $N\varepsilon$ astfel ca $|F_n(-a) - F(-a)| < \varepsilon$, $|F_n(b) - F(b)| < \varepsilon$.

Vom scrie atunci

$$\varphi_n(u) - \varphi(u) = \int_{-a}^{b} e^{iux}\, dF_n(x) = \int_{-a}^{b} e^{iux}\, dF(x) + \alpha_n(u),$$

unde $|\alpha_n(u)| \leqslant 6\varepsilon$. Rămîne să alegem un număr $N'_\varepsilon > N_\varepsilon$, astfel ca diferența dintre cele două integrale în intervalul $(-a, +b)$ să fie mai mică decît ε, ceea ce este totdeauna posibil.

Teorema B. *Dacă șirul de funcții caracteristice $\varphi_n(u)$ converge către o funcție continuă $\varphi(u)$, aceasta este o funcție caracteristică și funcțiile de repartiție $F_n(x)$ converg către $F(x)$ corespunzătoare lui $\varphi(u)$.*

Am demonstrat la punctul 3, § 4, că o limită continuă de funcții caracteristice este o funcție caracteristică. Conform teoremei lui Bochner, există deci o funcție de repartiție $F(x)$ pentru care

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\, dF(x).$$

Rămîne să demonstrăm că $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, bineînțeles în punctele de continuitate ale acesteia.

Conform teoremei lui Helly, există totdeauna un subșir $F_{n_s}(x)$ care are o limită $F'(x)$, funcție monotonă nedescrescătoare de la $-\infty$ la ∞ cu variație cel mult egală cu 1. Se demonstrează că în condițiile teoremei această variație este 1. Funcțiile respective $\varphi_{n_s}(u)$ au atunci, în baza teoremei precedente, ca limită pe $\varphi(u)$. Prin urmare,

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\, dF'(x).$$

Toate limitele șirului $F_n(x)$ sînt funcții de repartiție, care corespund aceleiași funcții caracteristice. Ținînd seama de unicitatea reprezentării, toate aceste limite sînt egale cu $F(x)$ și teorema este demonstrată.

Teoremele A și B sînt fundamentale. În special teorema B dă posibilitatea, în diferite teoreme limită, să operăm cu funcții caracteristice, ceea ce este, în general, mai ușor.

2. *Teorema de inversiune.* Vom demonstra următoarea teoremă:

$$F(x'') - F(x') = \frac{1}{2\pi} \lim_{u\to\infty} \int_{-u}^{u} \varphi(u)\, \frac{e^{-iux''} - e^{-iux'}}{-iu}\, du \qquad (1)$$

pentru orice puncte x' și x'' de continuitate ale funcției de repartiție $F(x)$, $\varphi(u)$ fiind funcția caracteristică corespunzătoare.

Formula (1) este adevărată pentru orice variabilă aleatoare simplă. În adevăr, fie $x = f(\xi)$ o variabilă care ia valorile, scrise în ordine crescătoare $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cu probabilitățile respective $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Pentru această variabilă

$$F(x) = \sum_{x_j < x} p_j, \quad x \neq x_1, x_2, \ldots, x_j$$

și

$$\varphi(u) = \sum_{h=1,2,\ldots,n} p_h\, e^{iux_h}.$$

Să observăm

$$J_{h,u} = \int_{-u}^{u} e^{iux_h}\, \frac{e^{-iux''} - e^{-iux'}}{-iu}\, du = \int_{-u}^{u} du \int_{x'}^{x''} e^{iu(x_h - x)}\, dx =$$

$$= 2\int_{x'}^{x''} \frac{\sin u(x_h - x)}{x_h - x}\, dx = 2\int_{u(x_h - x'')}^{u(x_h - x')} \frac{\sin y}{y}\, dy.$$

Prin urmare, dacă x' și x'' sînt diferite de x_h, avem

$$\lim_{n\to\infty} J_{h,u} = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x_h \text{ este situat în afara intervalului } [x', x''], \\ 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy = 2\pi, \text{ dacă } x' < x_h < x''. \end{cases}$$

Rezultă atunci că

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_h p_h J_{h,u} = \sum_{x' < x_h < x''} p_h = F(x'') - F(x'), \qquad (2)$$

ceea ce exprimă egalitatea (1).

O variabilă oarecare $f(\xi)$, care nu este funcție simplă, este limită uniformă a unui șir de funcții simple $f_n(\xi)$; dacă $\varphi_n(u)$ și $F_n(x)$ sînt respectiv funcția caracteristică și funcția de repartiție corespunzătoare pentru fiecare dintre aceste perechi, avem relația (1) ori de cîte ori x', x'' nu sînt valori de discontinuitate ale lui $F_n(x)$.

Presupunem că x', x'' nu sînt puncte de discontinuitate pentru $F_n(x)$ oricare ar fi n suficient de mare, și nici pentru $F(x) = \lim F_n(x)$. În aceste condiții, fiecare dintre cei doi membri ai egalității

$$F_n(x'') - F_n(x') = \frac{1}{2\pi} \lim_{u \to \infty} \int_{-u}^{u} \varphi_n(u) \frac{e^{-iux''} - e^{-iux'}}{-iu} du$$

are o limită determinată, cînd n tinde către infinit. Rezultă că aceste două limite sînt egale. Rezultă teorema (1).

Teorema de inversiune (1) arată că variațiile funcției $F(x)$ sînt determinate. Cum presupunem $F(-\infty) = 0$, funcția însăși este unic determinată.

§ 7. Tipuri de repartiții cu întrebuințare curentă

1. *Repartiția normală sau gaussiană* este o repartiție continuă, pe întreaga axă Ox:

$$\rho(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-a)^2}, \quad h > 0, \tag{1}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(u)\, du.$$

Se constată imediat că $F(-\infty) = 0$ și

$$F(+\infty) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2(u-a)^2} du = 1,$$

ținînd seama că

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}.$$

Prin definiție, funcția caracteristică este dată de integrala

$$\varphi(t) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} e^{-h^2(u-a)^2} du,$$

adică

$$\varphi(t) = e^{ita - \frac{1}{4h^2} t^2}. \tag{2}$$

Aceste funcții depind de doi parametri a și h. Semnificația acestor parametri se obține calculînd momentele de primele două ordine,

$$m_1 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u\, e^{-h^2(u-a)^2} du.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $v = u - \varepsilon$ și efectuînd integrarea, obținem

$$m_1 = a;$$

a este deci centrul repartiției, care este simetrică față de acest punct. Mutînd originea în acest centru, vom obține, dacă notăm noua abscisă tot cu x,

$$\rho(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} \tag{3}$$

și, evident,

$$\varphi(t) = e^{-\frac{1}{4h^2} t^2}. \tag{4}$$

Varianța acestei repartiții este

$$\nu = \mu^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-h^2u^2} du = \frac{1}{h^2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h^2u^2 e^{-h^2u^2} d(hu).$$

Efectuînd integrala din membrul al doilea, după o integrare prin părți, găsim

$$\mu^2 = \frac{1}{2h^2}. \tag{5}$$

Constanta pozitivă h se numește *coeficientul de precizie al repartiției*. Înlocuind această constantă prin μ, cu ajutorul relației (5), găsim pentru repartiția gaussiană generală, raportată la valoarea medie

$$\rho(x) = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\mu^2}}, \quad \varphi(t) = e^{-\frac{\mu^2}{2} t^2},$$

expresii care sînt în mod obișnuit întrebuințate, iar pentru variabila redusă,

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad \Phi(x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(u)\, du.$$

2. *Momente de diferite ordine ale repartiției normale.* Dacă folosim relația (2), obținem momentele de diferite ordine ale abaterii, dezvoltînd în serie funcția caracteristică $\varphi(t)$ dată de această relație:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^{2k}}{2^k k!} t^{2k}. \qquad (6)$$

Momentele sînt prin urmare

$$M_{2k+1} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$M_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!} \mu^{2k} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2k-1)\, \mu^{2k}.$$

Aceste expresii ale momentelor determină la rîndul lor funcția caracteristică dată de relația (2), deci repartiția gaussiană cu varianța μ^2.

3. O repartiție de forma

$$\rho(x) = A\, e^{ax^2+bx+c}$$

pentru întreaga axă Ox este în mod necesar de forma (1). În adevăr, ea trebuie să fie finită pentru orice x, prin urmare $a = -h^2$ (h *real*); pe de altă parte, $-h^2x^2 + bx + c = -\left(hx - \frac{b}{2h}\right)^2 + \frac{b^2}{4h^2} + c$.

Deci

$$\rho(x) = Be^{-h^2\left(x-\frac{b}{2h}\right)^2}$$

și, cum trebuie să avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\, dx = 1,$$

rezultă

$$B = \frac{h}{\sqrt{\pi}}.$$

Mediana acestei distribuții simetrice este, evident, $\alpha = 0$. Cvartilele sînt $\alpha_1 = -0{,}6, \ldots, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0{,}6 \ldots$ Ele se găsesc în tabela valorilor funcției $\Phi(x)$ și corespund valorilor $\Phi(x) = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\xi}{4}$.

4. *Distribuția $x = \xi^2$ cînd ξ urmează legea normală redusă.* Deoarece

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \text{ deci } dF(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi}{2}} d\xi,$$

vom avea, în același timp,

$$dF(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} dx;$$

prin urmare funcția de repartiție pentru x va fi

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}},$$

x avînd valori pe semiaxa pozitivă $x > 0$.

Funcția caracteristică corespunzătoare este

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = (1 - 2it)^{-\frac{1}{2}}.$$

5. *Repartiția exponențială.* Valorile variabilei x se găsesc pe semiaxa reală $x > 0$:

$$\rho(x) = A\, e^{-ax}, \quad a > 0.$$

Condiția

$$\int_0^{\infty} \rho(x)\, dx = A \int_0^{\infty} e^{-ax}\, dx = 1$$

ne dă $A = a$.

$$\varphi(t) = a \int_0^{\infty} e^{itx} e^{-ax}\, dx = \frac{a}{a - it}.$$

Deoarece, pentru $|t| < a$, avem

$$\varphi(t) = 1 + \frac{it}{a} - \frac{i^2t^2}{a^2} + \ldots,$$

rezultă

$$M_1 = \frac{1}{a}, \quad M_2 = \frac{2}{a^2}, \nu = \frac{1}{a^2} = M_2 - M_1^2.$$

§ 8. Repartiții discontinue simple

1. *Repartiția* $u(x)$. Corespondența între o valoare $x = a$ și o masă egală cu 1 corespunde funcției de repartiție.

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x < a, \\ 1 \text{ pentru } x \geqslant a, \end{cases} \tag{1}$$

funcția caracteristică respectivă fiind deci

$$\varphi(t) = e^{ita}. \tag{2}$$

Termenul de distribuție este în acest caz impropriu; el poate fi însă întrebuințat pentru a-l cuprinde în generalitatea celorlalte cazuri, deoarece poate interveni ca limită a unor distribuții propriu-zise.

2. *Repartiția urnei elementare.* Considerăm două valori pe care le putem reduce la 0 și 1.

Masa punctului 0 este p, masa punctului 1 este q.

Presupunem $p, q > 0$, $p + q = 1$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < 0, \\ p & \text{pentru } 0 \leqslant x < 1, \\ p + q = 1 & \text{pentru } 1 \leqslant x, \end{cases}$$

$$\varphi(t) = p\, e^{it} + q, \quad p + q = 1.$$

Deoarece

$$\varphi(t) = 1 + \frac{pi}{1} t - \frac{p}{2!} t^2 + \ldots,$$

vom avea

$$M_1 = p, \quad M_2 = p.$$

Prin urmare, avem pentru varianță $\nu = \mu^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$.

Distribuția abaterilor urnei elementare are ca funcție caracteristică

$$\varphi(t) = p\, e^{iqt} + q\, e^{-ipt}.$$

Distribuția redusă a urnei elementare are ca valori

$$\frac{-p}{\sqrt{pq}}, \quad \frac{q}{\sqrt{pq}},$$

iar ca funcție caracteristică

$$\varphi_1(t) = \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{pq}}\right).$$

3. *Repartiția binomială sau urna lui Bernoulli.* Să considerăm o repartiție dată prin funcția caracteristică

$$\varphi_n(t) = (p\, e^{it} + q)^n.$$

Să verificăm mai întîi că $\varphi_n(t)$ reprezintă cu adevărat o funcție caracteristică. Dezvoltînd după regula binomului, avem

$$\varphi_n(t) = \sum_0^n C_n^l q^l p^{n-l} e^{ilt}.$$

Expresia din membrul al doilea ne arată că $\varphi_n(t)$ este funcția caracteristică a distribuției constituită din $n + 1$ valori, $x = l = 0, 1, 2, \ldots, n$, cu masele respective $C_n^l q^l p^{n-l} (l = 0, 1, 2, \ldots, n)$, suma acestor mase fiind 1:

$$\sum_0^n{}_l C_n^l q^l p^{n-l} = (q + p)^n = 1.$$

Vom avea, deci, pentru funcția de repartiție,

$$F_n(x) = \sum_{l<x} C_n^l q^l p^{n-l}. \tag{3}$$

Dezvoltînd $\varphi_n(t)$ în serie după puterile lui t, obținem

$$\varphi_n(t) = 1 + \frac{inp}{1} t - \frac{p^2n^2 + qpn}{2!} t^2 + \ldots$$

Prin urmare,

$$M_1 = np, \quad M_2 = p^2n^2 + pqn,$$

de unde *valoarea varianței*

$$\nu_n = npq$$

și *abaterea medie pătratică*

$$\mu_n = \sqrt{npq}.$$

Funcția caracteristică a distribuției reduse a urnei lui Bernoulli va fi deci

$$\varphi_n(t) = e^{-i\frac{np}{\sqrt{npq}}t}\left(pe^{+i\frac{t}{\sqrt{npq}}} + q\right)^n \tag{4}$$

sau încă

$$\varphi_n(t) = \left(p\, e^{i\frac{qt}{\sqrt{npq}}} + q\, e^{-i\frac{pt}{\sqrt{npq}}}\right)^n.$$

Funcția de repartiție corespunzătoare, ținînd seama de expresia variabilei reduse

$$\xi = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$$

și de

$$\Phi_n(\xi) = F_n(x),$$

este

$$\Phi_n(\xi) = F_n(x) = \sum_{\lambda<\xi} C_n^{np+\lambda\sqrt{npq}}\, q^{np+\lambda\sqrt{npq}}\, p^{nq-\lambda\sqrt{npq}}, \tag{5}$$

unde $\lambda = \frac{l - np}{\sqrt{npq}}$, iar l are toate valorile mai mici decît x.

4. *Repartiția limită a urnei reduse a lui Bernoulli.* Dacă dezvoltăm în serie paranteza din membrul al doilea din (4), găsim

$$\varphi_n(t) = \left(1 - \frac{i}{2n}t^2 + \frac{i\,pq(p-q)}{(\sqrt{npq})^3}\frac{t^3}{3!} + \frac{e\,n(p,q)}{(\sqrt{npq})^4}\frac{t^4}{4!} + \ldots\right)^n,$$

de unde, cînd $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{6}$$

convergența fiind uniformă.

Conform relației (5), §.6, putem afirma că

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(\xi) = \Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Repartiția redusă limită a repartiției lui Bernoulli este cea gaussiană.

5. *Repartiția lui Poisson.* În repartițiile binomiale, considerate mai sus, p și q rămîn constante cînd n variază.

Dacă presupunem că aceste elemente variază cu n și, mai precis, dacă

$$p = \frac{a}{n},$$

a fiind o constantă pozitivă, atunci

$$\varphi_n(t) = \left(\frac{a}{n}e^{it} + 1 - \frac{a}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{a}{n}(e^{it} - 1)\right)^n.$$

Cînd $n \to \infty$, vom avea, uniform:

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) = e^{a(e^{it}-1)}$$

sau încă, dezvoltînd în serie membrul al doilea,

$$\varphi(t) = e^{-a}\sum_0^\infty \frac{a^l}{l!}e^{itl}.$$

Deci, funcția caracteristică limită este funcția caracteristică a următoarei repartiții:

Valori: 0, 1, 2, ..., n, ...

masele corespunzătoare:

$$p_l = e^{-a}\frac{a^l}{l!}.$$

Aceasta este repartiția lui Poisson.

Pentru $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, obținem

$$\varphi'(t) = i\,ae^{a(e^{it}-1)}e^{it}$$

$$\varphi''(t) = -ae^{a(e^{it}-1)}(e^{2it} + e^{it}).$$

Prin urmare,

$$\varphi'(0) = i\,a,$$

$$\varphi''(0) = -2a.$$

Vom avea deci pentru primele două valori medii

$$M_1 = a, \quad M_2 = a.$$

Parametrul a, care figurează în repartiția lui Poisson, este valoarea medie.

6. *Variabile aleatoare cu valori întregi.* Pentru mecanica cuantică prezintă un interes deosebit variabilele aleatoare cu un număr finit sau cu o infinitate numărabilă de valori întregi.

Să considerăm un cîmp de probabilitate $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ și un șir $A_0, A_1, \ldots, A_j, \ldots$ de evenimente din K, astfel că

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j = E, \quad A_j \bigcap_{j \neq k} A_k = \varnothing.$$

Fie $x = f(\xi)$ o variabilă aleatoare, pentru care avem

$$f(\xi) = j, \quad \xi \in A_j, \quad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

și în același timp

$$P(A_j) = p_j \quad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

satisfăcînd condițiile

$$p_j \geqslant 0, \quad \sum_j p_j = 1.$$

Vom considera separat evenimentele $A_{j_0}, A_{j_1} \ldots, A_{j_l}, \ldots$, ale căror probabilități p_j sînt diferite de zero. Valorile respective $j_0, j_1, \ldots, j_l, \ldots$ ale variabilei aleatoare se pot scrie sub forma canonică

$$j_l = \alpha + l\delta \quad (l = 0, 1, 2, \ldots)$$

unde $\alpha = j_0$, iar δ este cel mai mare divizor comun al diferențelor $j_l - j_m$, numit pasul variabilei $f(\xi)$. Vom nota, în cele ce urmează,

$$q_l = p_{j_l}.$$

Funcția caracteristică a variabilei $f(\xi)$ este, conform definiției,

$$\varphi(u) = \sum_{l=0, 1, \ldots} q_l \, e^{i(\alpha + l\delta)u} = e^{i\alpha u} \sum q_l \, e^{il\delta u}. \tag{7}$$

De aici rezultă că funcția $e^{-i\alpha u} \varphi(u)$ este periodică, cu perioada $\frac{2\pi}{\delta}$.

Prin urmare, $|\varphi(u)|$ este de asemenea periodică, cu perioada $\frac{2\pi}{\delta}$. Vom avea deci

$$|\varphi(0)| = \left|\varphi\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)\right| = 1.$$

Se demonstrează imediat că $|\varphi(u)|$ nu atinge valoarea 1 pentru nici un punct n intermediar între 0 și $\frac{2\pi}{\delta}$.

De asemenea, se verifică imediat următoarea formulă de inversiune:

$$q_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\delta}}^{\frac{\pi}{\delta}} e^{-i(\alpha + l\delta)} \varphi(u) \, du. \tag{8}$$

Nu avem decît să înlocuim pe $\varphi(u)$ prin seria absolut convergentă (7).

7. *Variabile aleatoare vectoriale cu coordonate întregi.* Să considerăm N variabile aleatoare $x_1 = f_1(\xi)$, $x_2 = f_2(\xi), \ldots$ $\ldots, x_N = f_N(\xi)$, definite pe același cîmp de probabilitate, toate cu valori întregi.

Vectorului $M(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ îi corespund diferitele puncte cu coordonate întregi pozitive din spațiul euclidian cu N dimensiuni, în care am ales un reper cartezian. Notăm

$$p_{j_1, j_2, \ldots, j_N} = P(x_1 = j_1, \; x_2 = j_2, \ldots, x_N = j_N)$$

și vom reține acele puncte pentru care $p_{j_1, j_2, \ldots, j_N} \neq 0$. Aceste puncte sînt vîrfurile unei rețele de prisme ale căror coordonate se reprezintă sub forma canonică

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{N} l_i \delta_{ik} (l_i = 0, 1, 2, \ldots; \; i, k = 1, 2, \ldots, N).$$

Rețeaua este maximală dacă determinantul $\delta = |\delta_{ik}|$ are valoarea maximă, în sensul că, dintre toate rețelele de prisme ale căror vîrfuri cuprind punctele pentru care $p_{j_1, j_2, \ldots, j_N} \neq 0$ alegem pe aceea pentru care determinantul δ are valoarea absolută maximă.

Vom presupune că rețeaua este maximală.

Este evident că, dacă $\delta = 0$, sistemul este degenerat și anume are mai puțin de N dimensiuni; variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_N$ nu sînt independente.

Pentru cele ce urmează ne vom limita la două dimensiuni.

Funcția caracteristică a vectorului aleator $M(x_1, x_2)$ cu reprezentarea canonică maximală

$$x_1 = \alpha_1 + \delta_{11} l_1 + \delta_{12} l_2,$$
$$x_2 = \alpha_2 + \delta_{21} l_1 + \delta_{22} l_2,$$
$$l_1 l_2 = 0, 1, \ldots, \delta = \delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21} > 0,$$

este

$$\varphi(u_1, u_2) = \sum_{l_1, l_2 = 0,1,2,\ldots} q_{l_1 l_2} e^{i[u_1(\alpha_1 + \delta_{11} l_1 + \delta_{12} l_2) + u_2(\alpha_2 + \delta_{21} l_1 + \delta_{22} l_2)]} \tag{9}$$

iar formula de inversiune dă

$$q_{l_1 l_2} = \frac{\delta}{4\pi^2} \int_D e^{-i[u_1(\alpha_1 + \delta_{11} l_1 + \delta_{12} l_2) + u_2(\alpha_2 + \delta_{21} l_1 + \delta_{22} l_2)]} \varphi(u_1, u_2)\, du_1\, du_2, \tag{10}$$

unde domeniul D este paralelogramul de arie $\frac{4\pi^2}{\delta}$, definit prin inegalitățile

$$-\pi \leqslant \delta_{11} u_1 + \delta_{21} u_2 \leqslant \pi,$$
$$-\pi \leqslant \delta_{12} u_1 + \delta_{22} u_2 \leqslant \pi.$$

Formula (10) se verifică imediat înlocuind pe $\varphi(u_1, u_2)$ prin seria (9).

Se demonstrează și pentru funcțiile caracteristice $\varphi(u_1, u_2)$ că $|\varphi(u_1, u_2)| < 1$ în paralelogramul D, cu excepția punctului $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, unde avem $\varphi(0, 0) = 1$.

Observație. Este ușor de văzut că toate considerațiile precedente se extind și la cazul în care valorile variabilei pot fi întregi pozitivi și negativi.

§ 9. Alte repartiții

1. *O repartiție legată de funcția* $\Gamma(x)$. Să considerăm funcția $\Gamma(x)$ definită, după cum se știe, pentru $x > 0$, prin integrala

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u}\, du. \tag{1}$$

Această funcție pozitivă este continuă și admite derivate finite de toate ordinele

$$\Gamma^{(s)}(x) = \int_0^\infty u^{x-1} (\ln u)^s e^{-u}\, du.$$

Efectuînd o integrare parțială în (1), obținem relația de recurență cunoscută

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x).$$

Dacă x este un întreg, $x = n$, această relație ne dă imediat

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

Dată fiind forma ei, transformăm funcția $\Gamma(x)$ într-o funcție caracteristică. Facem mai întîi o schimbare de variabilă sub integrală, punînd $u = \alpha v$, $\alpha > 0$,

$$\Gamma(x) = \alpha^x \int_0^\infty v^{x-1} e^{-\alpha v}\, dv.$$

În membrul al doilea al acestei egalități, x este un parametru real pozitiv. Membrul al doilea este independent de α.

Dacă x este fix și α variază, α^x este o funcție analitică atîta vreme cît $\alpha \neq 0$. Același lucru și cu integrala. Fiecare dintre aceste funcții analitice uniforme se pot prelungi și pentru valori complexe ale lui α, dacă partea reală a lui α rămîne pozitivă. Relația dintre ele se menține. Vom pune $\alpha = \beta - it$, unde t este un parametru real, iar β are o valoare determinată pozitivă.

Relația (1) se va putea scrie

$$\int_0^\infty v^{x-1} e^{-\beta v} e^{itv}\, dv = \frac{\Gamma(x)}{(\beta - it)^x}.$$

Dacă punem

$$\rho(v) = \frac{\beta^x}{\Gamma(x)} v^{x-1} e^{-\beta x} \text{ pentru } v > 0, \tag{2}$$

această funcție poate fi considerată ca densitate de repartiție pe semiaxa pozitivă, deoarece este pozitivă, integrabilă și conform (2)

$$\int_0^\infty \rho(v)\, dv = 1.$$

Funcția ei caracteristică va fi, ținînd seama de (2),

$$f(t) = \frac{\beta^x}{\Gamma(x)} \int_0^\infty v^{x-1} e^{-\beta v} e^{itv} = \frac{\beta^x}{(\beta - it)^x}$$

sau încă

$$f(t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^x}, \quad \beta > 0.$$

Această repartiție depinde de doi parametri reali pozitivi x și β.

2. *O repartiție pe segmentul finit* 0,1. Această repartiție este legată de funcția beta definită, după cum se știe, pentru parametrii pozitivi x și y, prin integrala

$$B(x, y) = \int_0^1 u^{x-1}(1 - u)^{y-1}\, du. \tag{3}$$

Această funcție este legată de $\Gamma(x)$ prin relația binecunoscută

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}.$$

Dacă punem

$$\rho(u; x, y) = \frac{\Gamma(x + y)}{\Gamma(x)\,\Gamma(y)} u^{x-1}(1 - u)^{y-1},$$

găsim o densitate de repartiție a variabilei u, cu doi parametri x și y cu masa totală 1, așa cum arată relația (3), în intervalul 0,1.

Funcția caracteristică a repartiției beta definită de (3) este

$$f(t; x, y) = \frac{\Gamma(x + y)}{\Gamma(x)\,\Gamma(y)} \int_0^1 e^{itu} u^{x-1}(1 - u)^{y-1}\, du.$$

Dezvoltînd membrul al doilea în serie, găsim

$$f(t; x, y) = \sum_0^n {}_n \frac{B(x + n, y)}{B(x, y)} \cdot \frac{i^n t^n}{n!},$$

de unde se vede că

$$M_1 = \frac{B(x + 1, y)}{B(x, y)}, \quad M_2 = \frac{B(x + 2, y)}{B(x, y)}.$$

3. Distribuția lui Laplace și Cauchy. Dacă considerăm drept densitate a unei distribuții pe întreaga axă

$$\rho(x) = \frac{1}{2a} e^{-\frac{|x-b|}{a}}, \quad a > 0,$$

observăm imediat că

$$\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x-b|}{a}}\, dx = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{|x-b|}{a}}\, dx + \frac{1}{2a}\int_b^{\infty} e^{-\frac{x-b}{a}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{a}}\, dx,$$

iar pentru funcția caracteristică avem

$$\varphi(t) = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{b} e^{itx} e^{-\frac{|x-b|}{a}}\, dx + \frac{1}{2a}\int_b^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x-b}{a}}\, dx,$$

de unde rezultă imediat

$$\varphi(t) = \frac{e^{ibt}}{1 + a^2t^2}.$$

Această repartiție are momente finite de orice ordin. Găsim

$$M_1 = b, \quad M_2 = b^2 + 2a, \quad \nu = 2a, \quad \mu = a\sqrt{2}.$$

Dacă luăm originea axei în b, obținem

$$\rho(x) = \frac{1}{2a} e^{-\frac{|x|}{a}}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{1 + a^2t^2},$$

$$e^{-\frac{|x|}{a}} = \frac{a!}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1 + a^2t^2}\, dt.$$

Prin urmare, pentru $x = 0$, avem

$$\frac{a!}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1 + a^2t^2} = 1.$$

Deci, acum putem considera densitatea

$$\rho_c(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{1 + a^2x^2},$$

ceea ce ne va da o funcție caracteristică

$$f_c(t) = e^{-\frac{|t|}{a}},$$

cunoscută sub numele lui Cauchy.

Este evident, după forma ei, că nici un moment al acestei repartiții nu este finit.

§ 10. Repartiții cu două dimensiuni

1. *Funcția de repartiție.* Considerăm o masă materială egală cu unitatea, răspîndită pe întregul plan x, y sau numai pe un domeniu D al acestui plan.

Notăm cu $F(x, y)$ masa totală a punctelor de coordonate ξ, η, pentru care $\xi < x$, $\eta < y$; $F(x, y)$ este funcția de repartiție.

Dreptunghiul determinat prin inegalitățile

$$x_1 \leqslant \xi < x_2, \quad y_1 \leqslant \eta < y_2$$

cuprinde o masă egală cu

$$\Delta F = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) - F(x_2, y_1).$$

Prin urmare, totdeauna

$$\Delta F \geqslant 0.$$

Un dreptunghi elementar determinat prin

$$x_1 = x, \quad x_2 = x + dx, \quad y_1 = y, \quad y_2 = y + dy$$

cuprinde masa elementară, care cu notațiile obișnuite se scrie

$$dF = F(x + dx, y + dy) - F(x, y + dy) + F(x, y) - F(x + dx, y),$$

sau încă

$$dF = F(x + dx, y + dy) - F(x, y + dy) - [F(x + dx, y) - F(x, y)].$$

Vom avea atunci pentru masa repartizată într-un domeniu al planului

$$P_\Delta = \iint_\Delta dF(x, y).$$

Dacă Δ coincide cu întreg domeniul D de răspîndire a masei,

$$P_D = \iint_D dF(x, y) = 1.$$

2. *Densitatea de repartiție.* În cazul unei distribuții continue și dacă $F(x, y)$ are o derivată de ordinul al doilea bine determinată în fiecare punct, vom avea, după cum se constată imediat, înlocuind sub integrală pe dF prin

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx\, dy.$$

Funcția pozitivă

$$\rho(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

este densitatea de repartiție a maselor considerate.

3. *Repartiția marginală.* Dacă notăm cu $\Phi(x)$ masa totală corespunzătoare punctelor de abscisă mai mică decît x, $\Phi(x)$ este *funcția de repartiție marginală relativă la* x. Vom avea, în același mod, o funcție $\Psi(y)$ de repartiție marginală relativă la y.

Dacă există o densitate de repartiție, atunci

$$\rho_1(x) = \int_R F(x, y)\, dy$$

este densitatea de repartiție marginală față de x.

La fel

$$\rho_2(y) = \int_R F(x, y)\, dx$$

este *densitatea de repartiție marginală față de* y.

Dacă masa este extinsă pe întregul plan, atunci

$$\rho_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y)\, dy,$$

$$\rho_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y)\, dx.$$

Presupunînd că

$$\rho(x, y) = \rho'(x)\,\rho''(y),$$

avem

$$\rho_1(x) = a_1\rho'(x); \quad \rho_2(y) = a_2\rho''(y).$$

Prin urmare,

$$\rho(x, y) = \frac{1}{a_1 a_2}\,\rho_1(x)\,\rho_2(y).$$

Însă

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y)\,dx\,dy = \frac{1}{a_1 a_2}\int_{-\infty}^{\infty} \rho_1(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} \rho_2(y)\,dy$$

și

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_2(y)\,dy = 1,$$

deci $a_1 a_2 = 1$ și, prin urmare,

$$\rho(x, y) = \rho_1(x)\,\rho_2(y).$$

Această condiție nu este suficientă pentru ca cele două variabile x și y să poată fi considerate ca repartiții independente. În adevăr, dacă masa nu este repartizată în tot planul ci numai într-un domeniu D, mărginit de o curbă simplă $\varphi(x, y) = 0$, determinat prin inegalitatea $\varphi(x, y) < 0$, atunci

$$\rho_1(x) = \rho'(x)\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \rho''(y)\,dy,$$

unde $y_1(x)$, $y_2(x)$ sînt valorile lui y care corespund celor două puncte (presupunem cazul simplu în care sînt numai două) în care dreapta perpendiculară pe Ox, în punctul de abscisă x, întîlnește curba $\varphi(x, y) = 0$. Vom avea deci, în general,

$$\rho_1(x) = \rho'(x)\,r'(x).$$

În mod analog vom găsi

$$\rho_2(y) = \rho''(y)\,r''(y).$$

Este atunci evident că

$$\rho_1(x)\,\rho_2(y) = \rho(x, y)\,r'(x)\,r''(y)$$

și deci $\rho_1(x)\,\rho_2(y) = \rho(x, y)$ numai în cazul particular în care $r'(x) = ct$, $r''(y) = ct$, ceea ce se întîmplă, de exemplu, dacă D este un dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate.

4. *Valori medii.* Dacă $\varphi(x, y)$ este o funcție integrabilă în D, cu măsura $dF(x, y)$, integrala

$$M(\varphi(x, y)) = M_\varphi = \iint_D \varphi(x, y)\,dF(x, y)$$

este, prin definiție, valoarea medie a funcției φ față de repartiția $F(x, y)$.

În particular, deci, $\varphi(x, y) = x^h y^k$, x și y fiind întregi pozitivi sau nuli. Vom nota

$$M[x^h y^k] = m_{h,k},$$

prin urmare

$$m_{h,k} = \iint_D x^h y^k\,dF(x, y),$$

ori de cîte ori integrala din membrul al doilea există. În acest caz, $m_{h,k}$ este momentul de ordinul h, k al repartiției.

În particular,

$$m_{10} = \iint_D x\,dF(x, y)$$

dacă integrala din membrul al doilea există. Această repartiție se mai poate scrie, presupunînd că există densitate, sub forma

$$m_{10} = \int_{y_y} dy \int_{y_x} x\rho(x, y)\,dx = \int_{y_x} x\,dx \int_{y_y} \rho(x, y)\,dy =$$

$$= \int x\rho_1(x)\,dx.$$

Prin urmare, m_{10} este media repartiției marginale a cărei funcție de frecvență este $\rho_1(x)$.

5. *Repartiții condiționate. O problemă de minim.* Se caută în mulțimea funcțiilor regulate $f(x)$ pentru care integrala

$$I = \iint_D [y - f(x)]^2\,\rho(x, y)\,dx\,dy$$

există, acea funcție care face integrala I minimă.

Această problemă generalizează pe cea corespunzătoare pentru o singură variabilă. Se știe, într-adevăr, că

$$\int_\gamma (x - a)^2\,\rho(x)\,dx$$

este minimă pentru

$$a = \int_{\gamma} x\rho(x)\,dx = m_1,$$

după cum se poate verifica imediat.

În cazul nostru va trebui ca

$$\delta I = -2\iint_D [y - f(x)]\,\rho(x, y)\,\delta f(x)\,dx\,dy = 0,$$

oricare ar fi $\delta f(x)$.

Integrala din membrul al doilea se mai poate scrie

$$\int_{y_x} \delta f(x)\,\delta x \int_{y_y} [y - f(x)]\,\rho(x, y)\,dy.$$

Condiția necesară și suficientă ca această integrală să fie nulă este ca

$$\int_{y_y} [y - f(x)]\,\rho(x, y)\,dy = 0,$$

deci

$$f(x) = \frac{\int_{y_y} y\rho(x, y)\,dy}{\int_{y_y} \rho(x, y)\,dy}.$$

Funcția $f(x)$ se prezintă ca o valoare medie a lui y, pentru un x dat $x = x$, anume o repartiție care are o densitate

$$\rho(y \mid x) = \frac{\rho(x, y)}{\rho_1(x)}.$$

Această egalitate se mai poate scrie

$$\rho(y \mid x)\,dy = \frac{\rho(x, y)\,dx\,dy}{\rho_1(x)\,dx}$$

sau, folosind funcțiile de repartiție corespunzătoare,

$$dF(y \mid x)\,dF_1(x) = dF(x, y).$$

Vom numi funcția $F(y \mid x)$ repartiția condiționată a lui y față de x; $F_1(x)$ este repartiția marginală a lui x.

Prin urmare, $\rho(y \mid x)$ este densitatea de repartiție condiționată a lui y față de x.

Dar atunci $f(x)$ se poate scrie

$$f(x) = \int_{y_y} y\rho(y \mid x)\,dy.$$

Funcția care realizează minimul integralei I este media condiționată a lui y față de x. Vom pune

$$m_1(x) = \int_{y_y} y\rho(y \mid x)\,dy.$$

În același mod, vom defini repartiția $F(x \mid y)$ condiționată a lui x față de y, dacă este cazul densitatea de repartiție condiționată $\rho(x \mid y)$ și prin urmare, media condiționată

$$m_2(y) = \int_{y_x} x\rho(x, y)\,dx.$$

6. *Curbele de regresiune de tipul* 1. Curbele

$$y = m_1(x) \quad \text{și} \quad x = m_2(y)$$

sînt cele două *curbe de regresiune* ale repartiției cu două variabile $F(x, y)$.

Regresiunea este liniară dacă funcția $m_1(x)$ sau funcția $m_2(y)$ este liniară.

Funcțiile $m_1(x)$ și $m_2(y)$ dau o bună indicație asupra legăturilor dintre valorile celor două variabile.

Să considerăm cazul particular în care toată masa este repartizată pe o curbă $y = h(x)$.

În acest caz, funcția de repartiție marginală a lui x față de y este

$$dF[x, h(x)]\,d_xF(y, x) = dF(x, y).$$

Funcția de repartiție condiționată este dată de relația

$$d_xF(y \mid x) = \frac{dF(x, y)}{dF[x, h(x)]},$$

iar media condiționată va fi

$$m_1(x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y\,dF(x, y)}{dF[x, h(x)]} = \frac{h(x)\,dF[x, h(x)]}{dF[x, h(x)]} = h(x).$$

Prin urmare, curba de regresiune este chiar curba pe care se găsește distribuția.

Cealaltă curbă de regresiune este identică cu aceasta. Se găsește efectuînd aceleași operații: $x = h^{-1}(y)$.

Al doilea caz particular, în care între x și y nu este nici o legătură, deci

$$\rho(x, y) = \rho_1(x)\, \rho_2(y),$$

ne dă următorul rezultat

$$\rho(y \mid x) = \rho_2(y); \quad \rho(x \mid y) = \rho_1(x),$$

deci

$$m_1(x) = \int x\rho_1(x)\, dx = m_1 = \text{const},$$

$$m_2(y) = \int y\rho_2(y)\, dy = m_2 = \text{const}.$$

Cele două curbe de regresiune sînt dreptele $y = m_1$, $x = m_2$ perpendiculare una pe alta.

Între aceste două cazuri, în care curbele se confundă dacă $y = h(x)$, sau sînt drepte perpendiculare una pe alta, avem cazurile intermediare în care între x și y există o dependență statistică.

7. *Curbe de regresiune de tipul* 2. Am obținut curbele de regresiune de tipul I căutînd minimul integralei I în cîmpul tuturor funcțiilor regulate $f(x)$.

Vom căuta acest minim în cîmpuri mai restrînse, și anume în acela al funcțiilor parabolice

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

alegînd un n suficient de mare pentru ca aproximația să fie cît mai bună. Urmează deci să determinăm parametrii $a_0, a_1, \ldots, a_n$ pentru care

$$I = \iint_D [y - (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)]^2\, \rho(x, y)\, dx\, dy$$

să fie minimă.

Avem pentru aceasta ecuațiile

$$\frac{\partial y}{\partial a_i} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

sau

$$\iint_D (a_0x^s + a_1x^{s+1} + \ldots + a_nx^{s+n})\, \rho(x, y)\, dx\, dy = \iint_D yx^s\rho(x, y)\, dx\, dy,$$

$$(s = 0, 1, \ldots, n)$$

sau încă, dezvoltat,

$$\left.\begin{aligned} m_{00}a_0 + m_{10}a_1 + \ldots + m_{n0}a_n &= m_{01} \\ m_{10}a_0 + m_{20}a_1 + \ldots + m_{n+1,0}a_n &= m_{11} \\ m_{20}a_0 + m_{30}a_1 + \ldots + m_{n+2,0}a_n &= m_{21} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ m_{n0}a_0 + m_{n+1,0}a_1 + \ldots + m_{2n,0}a_n &= m_{n1} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

unde

$$m_{k0} = \iint_D x^k\rho(x, y)\, dx\, dy; \quad m_{k1} = \iint_D x^k y\rho(x, y)\, dy.$$

Observăm că

$$m_{k0} = \int_{y_x} x^k\rho_1(x)\, dx = m'_k, \quad (2)$$

$f_1(x)$ fiind densitatea de repartiție marginală a lui x. Prin urmare, coeficienții necunoscutelor din sistemul precedent sînt momentele repartiției marginale a lui x. Vom scrie ecuațiile sub forma

$$\left.\begin{aligned} m'_0a_0 + m'_1a_1 + \ldots + m'_na_n &= m_{01} \\ m'_1a_0 + m'_2a_1 + \ldots + m'_{n+1}a_n &= m_{11} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ m'_na_0 + m'_{n+1}a_1 + \ldots + m'_{2n}a_n &= m_{n1} \end{aligned}\right\} \quad (1')$$

Pentru a arăta că $a_0, a_1, \ldots, a_n$ au valori determinate și unice, este necesar și suficient ca determinantul

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} m'_0m'_1 & \ldots & m'_n \\ m'_1m'_2 & \ldots & m'_{n+1} \\ m'_nm'_{n+1} & \ldots & m'_{2n} \end{vmatrix}$$

să fie diferit de zero.

Acest fapt a fost stabilit de Cebîșev cu prilejul studiilor sale asupra problemei momentelor.

Să ne propunem, împreună cu Cebîșev, să determinăm $n+1$ puncte $x_0, x_1, \ldots, x_n$ și $n+1$ mase $p_0, p_1, \ldots, p_n$, astfel ca

$$m'_k = \sum_0^n {}_i\, p_i x_i^k, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n. \tag{3}$$

Presupunem, în prealabil, că masele date în problema inițială sînt numeroase și că, chiar pentru repartiția marginală, există întotdeauna mai mult de n puncte, dacă repartiția este discontinuă.

Fie $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n + \alpha_{n+1} x^{n+1}$ polinomul care admite ca rădăcini $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Acest polinom se poate scrie, în afară de un factor constant, sub forma

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n+1} \\ m'_0 & m'_1 & m'_2 & \ldots & m'_{n+1} \\ \vdots & & & & \\ m'_n & m'_{n+1} & m'_{n+2} & \ldots & m'_{2n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Coeficientul lui x^{n+1} este Δ_n. Demonstrăm că $\Delta_n \neq 0$ dacă demonstrăm că ecuația precedentă este de gradul $n+1$ efectiv și reciproc.

Presupunem că $\Delta_n = 0$, dar că $\Delta_{n-1} \neq 0$. Notăm cu $f_{n-1}(x)$ minorul momentului m'_{2n+1} din determinantul considerat,

$$f_{n-1}(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \\ m'_0 & m'_1 & m'_2 & \ldots & m'_n \\ \vdots & & & & \\ m'_{n-1} & m'_n & m'_{n+1} & \ldots & m'_{2n} \end{vmatrix}.$$

Ținînd seama de (2), se verifică imediat că

$$\int_{y_x} f(x)\, x^k \rho_1(x)\, dx = 0$$

pentru $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Dar atunci

$$\int_{y'_x} f_{n-1}^2(x)\, \rho_1(x)\, dx = 0,$$

ceea ce înseamnă că $f_{n-1}(x) = 0$ pentru cel puțin n puncte. Ipoteza noastră este absurdă, deci $\Delta_n \neq 0$; sistemul (3) are o soluție unică bine determinată.

Există deci un polinom $f(x)$ de gradul n și numai unul singur care face minimă pe I. Funcția

$$y = f(x)$$

este o curbă de regresiune parabolică a lui x față de y.

În special sînt interesante dreptele de regresiune. În acest caz,

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

iar sistemul (1) devine

$$m'_0 a_0 + m'_1 a_1 = m_{01},$$
$$m'_1 a_0 + m'_2 a_1 = m_{11}.$$

Determinantul are valoarea

$$\Delta_2 = m'_0 m'_2 - m'^2_1 = \mu'^2$$

și reprezintă deci *varianța repartiției marginale* a lui x, număr esențial diferit de zero,

$$a_1 = \frac{m_{01} m'_2 - m_{11} m'_1}{\mu'^2} = \frac{m_{01} m_{20} - m_{11} m_{10}}{m_{00} m_{20} - m_{10}^2}; \quad a_0 = \frac{m_{00} m_{11} - m_{10} m_{01}}{m_{00} m_{20} - m_{10}^2}.$$

Deci, ecuația dreptei de regresiune este

$$(m_{00} m_{20} - m_{10}^2)\, y = (m_{01} m_{20} - m_{11} m_{10})\, x + m_{00} m_{11} - m_{10} m_{01}.$$

Reamintim că $m_{00} = 1$.

8. *Variațele a două variabile. Covarianța lor. Coeficientul de corelație.* Prin definiție, variațele lui x și y sînt

$$\mu_{20}^2 = \nu_x = \iint_D (x - m_{10})^2\, dF(x, y) = m_{20} - m_{10}^2,$$

$$\mu_{02}^2 = \nu_y = \iint_D (y - m_{01})^2\, dF(x, y) = m_{11} - m_{10}^2 m_{01},$$

iar covarianța este

$$\rho = \iint (x - m_{10})\, (y - m_{01})\, dF(x, y) = m_{11} - m_{10} m_{01}.$$

Coeficientul de corelație al celor două variabile este

$$r = \frac{\mu_{11}}{\mu_{20}\mu_{02}} = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\nu_x \nu_y}}.$$

Se verifică imediat că

$$r^2 \leqslant 1.$$

În adevăr, considerăm forma

$$\int [u(x - m_{10}) + v(y - m_{01})]^2 \, dF(x, y) = \mu_{20}^2 u^2 + 2\mu_{11} uv + \mu_{02}^2 v^2;$$

întrucît ea este în general pozitiv definită, vom avea

$$\mu_{11}^2 - \mu_{20}^2 \mu_{02}^2 < 0,$$

relație echivalentă cu $r^2 < 1$.

Putem avea $\mu_{11}^2 - \mu_{20}^2 \mu_{02}^2 = 0$ dacă și numai dacă nu există mase în afară de acelea de pe dreapta $u(x - m_{10}) + v(y - m_{01}) = 0$ (u și v fiind determinate de $\mu_{20}^2 u^2 + 2\mu_{11} uv + \mu_{02}^2 v^2 = 0$).

Repartiția este atunci liniară.

Dacă variabilele sînt independente,

$$\mu_{11} = \iint_D (x - m_{10})(y - m_{01}) \, dF(x, y) =$$

$$= \int (x - m_{10}) \, dF_1(x) \int (y - m_{01}) \, dF_2(y) = 0,$$

fiecare dintre integralele din membrul al doilea sînt nule.

În acest caz $r = 0$.

Dacă însă $r = 0$ sau $\mu_{11} = 0$, variabilele nu sînt obligatoriu independente și necorelate.

Coeficientul de corelație este un indicator pentru relația dintre variabilele x și y, dar un indicator slab. Astfel, dacă masa întreagă este așezată de-a lungul unei curbe $y = f(x)$ care nu este o dreaptă, $r \neq 1$, deși y depinde funcțional de x.

Numai dacă dependența este liniară avem $r = 1$.

§ 11. Repartiția gaussiană cu n dimensiuni

1. *Repartiția gaussiană cu două dimensiuni.* Densitatea de repartiție este de forma

$$\rho(x, y) = ke^{-\varphi(x-\alpha, \, y-\beta)},$$

unde

$$\varphi(x - \alpha, y - \beta) = a(x - \alpha)^2 + 2b(x - \alpha)(y - \beta) + c(y - \beta)^2 \quad (1)$$

este o formă de gradul al doilea pozitiv definită ($ac - b^2 > 0$, $a > 0$).

O transformare liniară

$$\begin{aligned} x - \alpha &= a_1\xi + b_1\eta, \\ y - \beta &= a_2\xi + b_2\eta \end{aligned} \qquad \delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad (1')$$

aduce pe φ la forma canonică

$$\varphi(x - \alpha, \, y - \beta) = \xi^2 + \eta^2. \quad (2)$$

Se știe, și dealtfel se verifică imediat, că discriminantul formei (2) este produsul dintre discriminantul formei (1) prin δ^2, adică

$$(ac - b^2)\,\delta^2 = 1,$$

de unde

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{ac - b^2}}, \quad (3)$$

ținînd seama că $ac - b^2 > 0$, forma fiind pozitiv definită.

Întrucît va trebui ca

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) \, dx \, dy = k \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varphi(x-\alpha, \, y-\beta)} \, dx \, dy = 1, \quad (4)$$

dacă efectuăm schimbarea de variabile (1'), vom găsi

$$1 = k\delta \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi^2+\eta^2)} \, d\xi \, d\eta = k\delta \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \, d\xi\right)^2 = k\delta\pi.$$

Ținînd seama de (3), rezultă

$$k = \frac{1}{\pi\delta} = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{\pi}.$$

Prin urmare,

$$\rho(x, y) = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{\pi} e^{-[a(x-\alpha)^2 + 2b(x-\alpha)(y-\beta) + c(y-\beta)^2]}.$$

Valorile medii se calculează imediat

$$m_{10} = k\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\varphi(x-\alpha,\ y-\beta)}\, dx\, dy.$$

Facem întîi schimbarea de variabilă $x - \alpha = x'$, $y - \beta = y'$, ținînd seama de relația (4),

$$m_{10} = \alpha + k\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x'\, e^{-\varphi(x',\ y')}\, dx'\, dy'.$$

În ultima integrală facem schimbarea de variabilă (1') și obținem

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x'\, e^{-\varphi(x',\ y')}\, dx'\, dy' = a_1\delta\int_{-\infty}^{\infty} \xi\, e^{-\xi^2}\, d\xi\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2}\, d\eta +$$

$$+ b_1\delta\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi\int_{-\infty}^{\infty} \eta\, e^{-\eta^2}\, d\eta = 0,$$

după cum se verifică imediat.

Deci, $m_{10} = \alpha$ și la fel $m_{01} = \beta$.

Punctul de coordonate α, β constituie centrul repartiției care este simetrică.

Vom presupune, în cele ce urmează, că aducem centrul axelor de coordonate în acest centru de simetrie, deci $m_{10} = m_{01} = 0$.

Variațele sînt

$$\mu_{20}^2 = k\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-\varphi(x,\ y)}\, dx\, dy.$$

Efectuînd schimbarea de variabile (1') cu $\alpha = 0$, $\beta = 0$, găsim

$$\mu_{20}^2 = k\delta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (a_1\xi + b_1\eta)^2\, e^{-(\xi^2+\eta^2)}\, d\xi\, d\eta,$$

deci

$$\mu_{20}^2 = \frac{1}{2}[a_1^2 + b_1^2].$$

În mod analog

$$\mu_{02}^2 = \frac{1}{2}[a_2^2 + b_2^2].$$

Covarianța este

$$\mu_{11} = \frac{1}{\pi}\iint (a_1\xi + b_1\eta)(a_2\xi + b_2\eta)\, e^{-(\xi^2+\eta^2)}\, d\xi\, d\eta,$$

adică

$$\mu_{11} = \frac{1}{2}(a_1a_2 - b_1b_2).$$

Aceste valori se pot calcula fără greutate cu ajutorul coeficienților formei φ.

Dacă

$$\varphi(x, y) = ax^2 + cy^2, \text{ deci } b = 0,$$

atunci

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0,$$

ceea ce înseamnă că $\mu_{11} = 0$, covarianța este 0, iar variabilele sînt necorelate.

Funcția caracteristică a repartiției gaussiene este

$$\varphi(t_1, t_2) = k\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_1x+t_2y)}\, e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\, dx\, dy.$$

Efectuînd schimbarea de variabile (1'), găsim

$$\varphi(t_1, t_2) = k\delta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[(a_1t_1+a_2t_2)\xi+(b_1t_1+b_2t_2)\eta]}\, e^{-(\xi^2+\eta^2)}\, d\xi\, d\eta.$$

În baza transformării

$$s_1 = a_1t_1 + a_2t_2,$$
$$s_2 = b_1t_1 + b_2t_2,$$

avem

$$\varphi(t_1, t_2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi s_1+\eta s_2)}\, e^{-(\xi^2+\eta^2)}\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi s_1}\, e^{-\xi^2}\, d\xi\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta s_2}\, e^{-\eta^2}\, d\eta,$$

deci

$$\varphi(t_1, t_2) = e^{-\frac{1}{4}(s_1^2+s_2^2)} = e^{-\frac{1}{4}[(a_1^2+b_1^2)t_1^2+2(a_1a_2+b_1b_2)t_1t_2+(a_2^2+b_2^2)t_2^2]}$$

sau încă

$$\varphi(t_1, t_2) = e^{-\frac{1}{2}[\mu_{20}^2t_1^2+2\mu_{11}t_1t_2+\mu_{02}^2t_2^2]}.$$

Repartițiile marginale au densitățile

$$\rho_1(x) = k\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\,dy$$

sau

$$\rho_1(x) = k\,e^{-\frac{ac-b^2}{c}x^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c\left(y+\frac{b}{c}x\right)}\,dy$$

sau, efectuînd integrarea după schimbarea de variabile indicată, obținem

$$\rho_1(x) = \sqrt{\frac{ac-b^2}{c}}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{ac-b^2}{c}x^2} = \frac{1}{\delta\sqrt{c\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{c\delta^2}}$$

care este o distribuție gaussiană cu o dimensiune. În mod analog,

$$\rho_2(y) = \frac{1}{\delta\sqrt{a\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{a\delta^2}}.$$

2. *Repartiția gaussiană cu n dimensiuni.* Densitatea de repartiție este de forma

$$\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k_n\,e^{-\sum_{i,k}^{1,\ldots,n} a_{ik}(x_i-\alpha_i)(x_k-\alpha_k)},$$

unde $\varphi = \sum_{i,k}^{1,\ldots,n} a_{ik}x_i'x_k'$ este o formă pătratică pozitiv definită cu discriminantul Δ.

Pentru determinarea lui k_n să observăm că

$$k_n = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varphi(x_1,\ldots,x_n)}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n = 1.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă

$$x_i' = x_i - \alpha_i = \sum_1^n{}_j\, h_{ij}\xi_j$$

cu determinantul

$$\delta = |h_{ij}|,\quad i;\quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

care transformă $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ într-o sumă de pătrate,

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2,$$

vom avea

$\Delta\delta^2 = 1$ (discriminantul formei din membrul al doilea), deci

$$k_n\delta\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi_1^2+\ldots\xi_n^2)}\,d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_n = 1$$

sau

$$k_n\delta(\sqrt{\pi})^n = 1.$$

Prin urmare,

$$k_n = \sqrt{\frac{\Delta}{\pi^n}}.$$

Ca și în cazul $n = 2$, se verifică imediat că

$$\alpha_i = M(x_i),\quad i = 1,\ldots, n.$$

De asemenea,

$$M((x_i-\alpha_i)^2) = k_n\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-\alpha_i)^2\,e^{-\varphi(x_1,\ldots,x_n)}\,dx_1\ldots dx_n.$$

Efectuînd schimbarea de variabile de mai sus găsim

$$M((x_i-\alpha_i)^2) = k_n\delta\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}(\sum_1^n{}_j\, h_{ij}\xi_j)^2\,e^{-\sum_1^n{}_k\,\xi_k^2}\,d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_n.$$

Cum

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\xi_j\xi_k\,e^{-\sum_1^n{}_k\,\xi_k^2}\,d\xi_1\ldots d\xi_n = 0,\quad j\neq k,$$

iar

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\xi_j^2\,e^{-\sum_1^n{}_k\,\xi_k^2}\,d\xi_1\ldots d\xi_n = \prod_{k\neq j}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi_k^2}\,d\xi_k\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\xi_j^2e^{-\xi_j^2}d\xi_j =$$

$$= (\sqrt{\pi})^{n-1}\,\frac{1}{2}\,\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\,(\sqrt{\pi})^n,$$

obținem

$$M((x_i-\alpha_i)^2) = \frac{1}{2}\,k_n\delta(\sqrt{\pi})^n(h_{i1}^2+\ldots+h_{in}^2) = \frac{1}{2}\,(h_{i1}^2+\ldots+h_{in}^2).$$

§ 12. Reprezentarea repartițiilor cu o dimensiune

1. *Polinoame ortogonale corespunzătoare unei repartiții.* Fie $F(x)$ o funcție de repartiție care are o infinitate de puncte de creștere, adică puncte ca x_0, pentru care

$$F(x_0 + \alpha) > F(x_0 - \alpha),$$

pentru orice α pozitiv.

Se poate determina un șir infinit de polinoame $p_1(x)$, $p_2(x)$,... ..., $p_n(x)$ cu gradul efectiv indicat de indice, care satisfac condițiile de ortogonalitate

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_n(x)\, p_m(x)\, \mathrm{d}F(x) = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ 1 & m = n. \end{cases} \tag{1}$$

Pentru a demonstra aceasta, considerăm forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\xi_0 + \xi_1 x + \ldots + \xi_n x^n)^2\, \mathrm{d}F(x) = \sum_{i,k}^{0,\ldots,n} M_{i+k} \xi_i \xi_k \tag{2}$$

unde $M_j = \int_{-\infty}^{\infty} x^j\, \mathrm{d}F(x)$ este momentul de ordinul j al repartiției.

Întrucît $\mathrm{d}F(x) > 0$ într-o infinitate de puncte, iar $\xi_0 + \xi_1 x + \ldots + \xi_n x^n$ nu poate fi zero decît în cel mult n puncte reale, membrul întîi este pozitiv, deci forma din membrul al doilea este pozitiv definită. Această constatare conduce după sine la concluzia că determinantul formei (2) este pozitiv,

$$d_n = \begin{vmatrix} M_0 & M_1 & \ldots & M_n \\ M_1 & M_2 & \ldots & M_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_n & M_{n+1} & \ldots & M_{2n} \end{vmatrix} > 0. \tag{3}$$

Vom pune

$$p_n(x) = \xi_0 + \xi_1 x + \ldots + \xi_n x^n.$$

Relația (1) ne arată că

$$p_0(x) = 1;$$

tot (1) ne arată că

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m p_n(x)\, \mathrm{d}F(x) = 0 \tag{4}$$

pentru $m = 0, 1, \ldots, n-1$, deoarece x^m se poate scrie ca o combinație liniară a polinoamelor $p_0(x)$, $p_1(x)$,..., $p_m(x)$ care sînt de gradele efectiv indicate de indici.

Dar atunci din (4) rezultă că polinomul $p_n(x)$ are forma

$$p_n(x) = A_n \begin{vmatrix} M_0 & M_1 & \ldots & M_n \\ M_1 & M_2 & \ldots & M_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{n-1} & M_n & \ldots & M_{2n-1} \\ 1 & x & \ldots & x^n \end{vmatrix}, \tag{5}$$

unde A_n este o constantă arbitrară diferită de zero. Coeficientul lui x^n este $A_n\, \mathrm{d}_{n-1}$, prin urmare [v. (3)] este diferit de zero. A_n va fi determinat prin condiția de ortogonalitate

$$\int p_n^2(x)\, \mathrm{d}F(x) = 1$$

și prin precizarea $A_n > 0$.

Polinoamele $p_n(x)$ ortogonale față de $F(x)$ sînt astfel bine și unic determinate de această repartiție.

Observație. Dacă $F(x)$ are numai un număr finit, de exemplu N, de puncte de creștere, polinoamele $p_0(x) = 1$, $p_1(x)$,..., $p_{N-1}(x)$ sînt determinate, deoarece $d_n > 0$ pentru $n \leqslant N - 1$.

Avem $0 = D_N = D_{N+1} = \ldots$, deci nu putem vorbi de o determinare a unor polinoame de grad mai mare decît $N - 1$.

2. *Dezvoltări de tip Charlier.* Vom presupune că repartiția $F(x)$ are o densitate

$$\mathrm{d}F(x) = \rho(x)\, \mathrm{d}x.$$

Să considerăm o funcție de densitate $h(x)$, pentru care presupunem că există momente de toate ordinele. În acest caz, integralele

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x)\, h(x)\, \mathrm{d}x \tag{6}$$

există și au valori finite pentru orice n.

În condiții destul de generale pentru $h(x)$ vom putea scrie

$$h(x) = \sum a_n p_n(x).$$

Aceasta este în particular exact dacă seria din membrul al doilea este absolut și uniform convergentă.

Astfel de dezvoltări în serie sînt în multe împrejurări utile. Sînt valoroase în special dezvoltările corespunzătoare polinoamelor ortogonale determinate de repartiția gaussiană.

Polinoamele lui Hermite. Dacă

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du,$$

polinoamele ortogonale corespunzătoare sînt, în afară de factori numerici, *polinoamele lui Hermite*, definite de relația

$$\frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{d x^n} = (-1)^n H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (n = 0, 1, \ldots,)$$

deoarece ele verifică relațiile

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ n! & m = n. \end{cases}$$

Vom pune deci, în acest caz, pentru a norma șirul,

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n(x). \tag{7}$$

3. Dezvoltarea de tip Charlier cu polinoamele $H_n(x)$. Pentru o densitate $h(x)$, vom avea:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(a_0 + a_1 H_1(x) + a_2 \frac{1}{\sqrt{2}} H_2(x) + \right.$$

$$\left. + a_3 \frac{1}{\sqrt{6}} H_3(x) + \ldots \right). \tag{8}$$

În această dezvoltare, coeficienții a_i sînt dați de egalitățile (6), unde polinoamele $p_n(x)$ sînt specificate de relația (7),

$$a_0 = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, dx = 1,$$

$$a_1 = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, H_1(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x h(x)\, dx = m_1,$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) H_2(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 1)\, h(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (m_2 - 1),$$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, H_3(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{6}} \int_{-\infty}^{\infty} (x^3 - 3x)\, h(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} (m_3 - 3m_1),$$

$$a_4 = \frac{1}{\sqrt{24}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, H_4(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{24}} \int_{-\infty}^{\infty} (x^4 - 6x^2 + 3) h(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{24}} (m_4 - 6m_2 + 3).$$

Dacă presupunem că am redus variabila dată astfel ca $m_1 = 0$, $m_2 = 1$, valorile coeficienților sînt

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = \frac{m_3}{\sqrt{6}},\ a_4 = \frac{m_4 - 3}{\sqrt{24}},$$

iar dezvoltarea devine

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \frac{m_3}{3!} H_3 + \frac{m_4 - 3}{4!} H_4 + \ldots \right).$$

Coeficienții primilor doi termeni după 1 din această dezvoltare au o semnificație geometrică pentru curbele care reprezintă funcția $y = h(x)$.

Vom pune

$$\gamma_1 = m_3,\ \gamma_2 = m_4 - 3$$

și-i vom numi:

γ_1 — coeficient de asimetrie;

γ_2 — coeficient de exces.

Dacă abaterea tip μ_2 este diferită de 1, acești coeficienți iau forma

$$\gamma_1 = \frac{m_3}{\mu^3}, \quad \gamma_2 = \frac{m_4}{\mu^4} - 3.$$

Rămîne de stabilit ce condiții verifică funcția $h(x)$ pentru ca dezvoltarea (8) să fie valabilă.

Se demonstrează că pentru aceasta este suficient ca integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

să existe și să aibă o valoare finită.

Dealtfel, în general, nu avem nevoie chiar de toți termenii unei asemenea dezvoltări. Sînt importanți pentru caracterizarea funcției $h(x)$ numai cîțiva termeni din dezvoltare, în particular chiar numai acei termeni pe care i-am scris efectiv, adică primii trei termeni. Ei ne dau indicații în genere suficiente asupra formei funcției.

§ 13. Repartițiile lui Pearson

Definiție. Foarte numeroase distribuții au o funcție de frecvență (densitate de repartiție), care verifică o relație diferențială de forma

$$\frac{y'}{y} = \frac{a_1 + x}{a_2 + a_3 x + a_4 x^2} \tag{1}$$

sau se deduce din aceasta printr-o schimbare liniară de variabile, sau este o limită de funcții de acest fel cînd cei patru parametri depind de un același parametru, pe care-l facem să se apropie de o anumită valoare limită. Pentru completa determinare a lui y, deci pentru a determina cei patru parametri care figurează în (1), este necesar să cunoaștem primele patru momente (m_1, m_2, m_3, m_4) ale repartiției. Constanta de integrare se determină impunînd condiția de normare

$$\int \rho(x)dx = 1, \tag{2}$$

intervalul de integrare fiind acela în care considerăm repartiția.

Este evident că y dat de (1) este caracterizat în primul rînd de natura rădăcinilor ecuației $a_2 + a_3 x + a_4 x^2 = 0$.

1. Dacă există două rădăcini reale distincte α_1 și α_2, membrul al doilea din (1) se descompune într-o sumă de două funcții simple

$$\frac{y'}{y} = \frac{b_1}{x - \alpha_1} + \frac{b_2}{x - \alpha_2}, \quad b_1 + b_2 \neq 0$$

și, prin urmare,

$$y = k(x - \alpha_1)^{b_1} (x - \alpha_2)^{b_2}$$

pentru

$$\alpha_1 < x < \alpha_2.$$

a) Obținem în acest caz densitatea de repartiție normală dacă luăm

$$\alpha_1 = -n, \quad \alpha_2 = n,$$

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{2} n^2, \quad k = hn^{-n^2},$$

ceea ce dă

$$y = h\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}n^2}$$

și facem pe n să tindă către infinit. Obținem

$$y = h\, e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

b) Pentru $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $y = kx^{b_1}(1 - x)^{b_2}$ $(0 < x < 1)$, avem distribuții legate de funcțiile beta.

În acest caz, trebuie să avem

$$k \int_0^1 x^{b_1}(1 - x)^{b_2}\, dx = 1,$$

ceea ce implică $b_1 > -1$, $b_2 > -1$.

Dacă punem $b_1 = p_1 - 1$, $b_2 = p_2 - 1$, $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, știm că

$$B(p_1, p_2) = \int_0^1 x^{p_1 - 1} (1 - x)^{p_2 - 1}\, dx = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1 + p_2)}, \tag{3}$$

prin urmare

$$k = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1 + p_2)} = \frac{\Gamma(b_1 + 1)\,\Gamma(b_2 + 1)}{\Gamma(b_1 + b_2 + 2)},$$

deci

$$y = \frac{\Gamma(b_1 + 1)\,\Gamma(b_2 + 1)}{\Gamma(b_1 + b_2 + 2)}\, x^{b_1}(1 - x)^{b_2}.$$

c) Dacă punem $b_2 = \alpha_2\,\alpha$, $k = h\,e^{\alpha\alpha_1}\,\alpha_2^{-\alpha\alpha_2}$, obținem

$$y = h(x - \alpha_1)^{b_1}\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2\alpha} e^{\alpha_1\alpha}.$$

Făcînd $\alpha_2 \to \infty$, găsim

$$y = h(x - \omega)^{\lambda - 1}\, e^{-\alpha(x - \omega)}, \quad x > \omega, \tag{4}$$

după ce am schimbat notațiile.

Această repartiție este legată de repartiția definită cu ajutorul funcției $\Gamma(\lambda)$, după ce am mutat originea în $x = \omega$, cum se verifică imediat. În acest caz,

$$h = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}$$

și are ca funcție caracteristică

$$f(t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{it}{\alpha}\right)^\lambda}, \quad \omega = 0. \tag{5}$$

Din ea derivă repartiția foarte cunoscută statisticienilor și numită a lui χ^2.

d) Alegînd convenabil pe k, dacă $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 0$, obținem repartiția lui Fisher

$$y = kx^{b_2}(x + 1)^{b_1}, \tag{6}$$

care joacă un rol important.

2. Cînd cele două rădăcini sînt imaginare, avem soluții de forma

$$y = \frac{k}{(a_2 + a_3 x + a_4 x^2)^m} \quad (-\infty < x < \infty) \tag{7}$$

dacă între constantele date este o relație care se verifică cu ușurință, iar $m > \frac{1}{2}$.

Aceasta cuprinde, ca un caz particular, repartiția lui Student,

$$y = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \tag{8}$$

§ 14. Tipuri de convergență ale șirurilor de variabile aleatoare

1. Definiții. Fie $f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots, f_n(\xi), \ldots$ un șir de variabile aleatoare definite pe cîmpul de probabilitate $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ și $f(\xi)$ o variabilă aleatoare definită de asemenea pe acest cîmp.

Convergența B. Șirul $\{f_n(\xi)\}$ converge B (în sensul Bernoulli) către $f(\xi)$, dacă $F_n(a) \to F(a)$ în orice punct $a \in R$ de continuitate a funcției $F(a) = P[f(\xi) < a]$.

Tipuri de convergență B. Distanța în spațiul funcțiilor de repartiție. Convergența definită aici este foarte des folosită în teoria probabilităților, fie direct, prin constatarea convergenței funcțiilor de repartiție, fie indirect, prin constatarea convergenței funcțiilor caracteristice.

Cîtă vreme cercetarea se mărginește la găsirea funcției de repartiție sau a funcției caracteristice limită, procesul de realizare a limitei nu prezintă interes.

Sînt însă împrejurări, în special în mecanica statistică clasică sau cuantică, în care acest proces este cu deosebire important, cînd interesează $F_n(x)$ pentru n mare. În acest caz, este necesar să se evalueze eroarea care se face luînd $F_n(a)$ în loc de $F(a)$. Aceasta cere însă introducerea unei distanțe în spațiul funcțiilor de repartiție sau al funcțiilor caracteristice sau alte metrizări echivalente.

O atare distanță între repartițiile a două variabile aleatoare $f_1(\xi)$ și $f_2(\xi)$ este, de exemplu, valoarea absolută a variației totale a diferenței $F_1(a) - F_2(a)$,

$$R_1(F_1, F_2) = |\text{ var. tot. } (F_1 - F_2)|.$$

Altă distanță este

$$R_2(F_1, F_2) = \sup |F_1(a - 0) - F_2(a - 0)|.$$

Convergența după R_1 este mai tare decît convergența după R_2. Evaluările asimptotice ale sumelor de variabile cu valori întregi ale lui Gnedenko în legătură cu legea lui Gauss sînt rezultatele aplicării unor astfel de criterii de convergență.

Convergența în probabilitate (C_p). *Șirul* $\{f_n(\xi)\}$ *converge în probabilitate (sau măsură) către* $f(\xi)$ *dacă,* $\varepsilon > 0$ *și* $\eta > 0$ *fiind date, există* $N(\varepsilon, \eta)$ *astfel încît*

$$P(\{x \mid |f_n(\xi) - f(\xi)| > \varepsilon\}) < \eta \tag{1}$$

pentru $n \geqslant N(\varepsilon, \eta)$.

Criteriul lui Slutsky. Condiția necesară și suficientă pentru ca șirul $\{f_n(\xi)\}$ să conveargă în probabilitate este următoarea: dacă ε și η sînt dați, există $N(\varepsilon, \eta)$ astfel ca

$$P(\{\xi \mid |f_n(\xi) - f_m(\xi)| > \varepsilon\}) < \eta, \tag{1'}$$

dacă $n, m > N(\varepsilon, \eta)$.

Convergența aproape sigură (C_{as}). *Șirul* $\{f_n(\xi)\}$ *converge aproape sigur (sau aproape peste tot) către* $f(\xi)$ *dacă există o mulțime* $E_0 \in K$ *cu* $P(E_0) = 0$ *astfel încît*

$$f_n(\xi) \to f(\xi)$$

pentru orice $x \in E - E_0$; *prin urmare, dacă* $f_n(\xi)$ *converge în mod obișnuit către* $f(x)$ *cu excepția unei mulțimi* E_0 *de probabilitate nulă.*

Convergența tare (C_t). *Șirul* $\{f_n(\xi)\}$ *converge tare către* $f(\xi)$ *dacă,* $\varepsilon > 0$ *și* $\eta > 0$ *fiind dați, există* $N(\varepsilon, \eta)$ *astfel încît*

$$P\Big(\bigcup_{n \geqslant N(\xi, \eta)} \{\xi \mid |f_n(\xi) - f(\xi)| > \varepsilon\}\Big) < \eta. \tag{2}$$

Este ușor de văzut că (2) este echivalentă cu

$$P\Big(\bigcap_{n \geqslant N(\varepsilon, \eta)} \{\xi \mid |f_n(\xi) - f(\xi)| \leqslant \varepsilon\}\Big) \geqslant 1 - \eta. \tag{3}$$

Demonstrăm întîi o egalitate auxiliară, plecînd de la

$$\{\xi \mid |f_n(\xi) - f(\xi)| > \varepsilon\} = \mathbf{C}\{\xi \mid |f_n(\xi) - f(\xi)| \leqslant \varepsilon\}.$$

Atunci

$$\mathbf{C} \bigcup_{n \geqslant N(\varepsilon, \eta)} \{\xi \mid |f_n(\xi) - f(\xi)| > \varepsilon\} = \bigcap_{n \geqslant N(\varepsilon, \eta)} \{\xi \mid |f_n(\xi) - f(\xi)| \leqslant \varepsilon\}.$$

Dar

$$\Big[\mathbf{C} \bigcup_{n \geqslant N(\varepsilon, \eta)} \{\xi \mid |f_n(\xi) - f(\xi)| > \varepsilon\}\Big] \cup \Big[\bigcup_{n \geqslant N(\varepsilon, \eta)} \{\xi \mid |f_n(\xi) - f(\xi)| > \varepsilon\}\Big] = E$$

și

$$\Big[\mathbf{C} \bigcup_{n \geqslant N(\varepsilon, \eta)} \{\xi \mid |f_n(\xi) - f(\xi)| > \varepsilon\}\Big] \cap \Big[\bigcup_{n \geqslant N(\varepsilon, \eta)} \{\xi \mid |f_n(\xi) - f(\xi)| > \varepsilon\}\Big] = \varnothing.$$

Rezultă egalitatea căutată

$$P\Big(\mathbf{C} \bigcup_{n \geqslant N(\varepsilon, \eta)} \{\xi \mid |f_n(\xi) - f(\xi)| > \varepsilon\} + P\Big(\bigcup_{n \geqslant N(\varepsilon, \eta)} \{\xi \mid |f_n(\xi) - f(\xi)| > \varepsilon\}\Big) = P(E) = 1. \tag{4}$$

Dacă relația (3) este îndeplinită, atunci

$$P\Big(\bigcup_{n \geqslant N(\varepsilon, \eta)} \{\xi \mid |f_n(\xi) - f(\xi) > \varepsilon\}\Big) = 1 - P\Big(\mathbf{C} \bigcup_{n \geqslant N(\varepsilon, \eta)} \{\xi \mid |f_n(\xi) - f(\xi)| > \varepsilon\}\Big) = 1 - P\Big(\bigcap_{n \geqslant N(\varepsilon, \eta)} \{\xi \mid |f_n(\xi) - f(\xi)| \leqslant \varepsilon\}\Big) < 1 - 1 + \eta = \eta,$$

deci relația (2) este verificată. Invers, din (2) rezultă (3)

$$\Big(P \bigcap_{n \geqslant N(\varepsilon, \eta)} \{\xi \mid |f_n(\xi) - f(\xi)| \leqslant \varepsilon\}\Big) = P\Big(\mathbf{C} \bigcup_{n \geqslant N(\varepsilon)} \{\xi \mid |f_n(\xi) - f(\xi)| > \varepsilon\}\Big) = 1 - P\Big(\bigcup_{n \geqslant N(\varepsilon)} \{\xi \mid |f_n(\xi) - f(\xi)| > \varepsilon\}\Big) > 1 - \eta.$$

Convergența în medie. Pentru enunțarea condițiilor de convergență în medie de ordinul r este necesar să presupunem că există integralele

$$\int_E |f_n(\xi)|^r P(d\xi) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

și

$$\int_E |f(\xi)|^r P(d\xi).$$

Șirul $f_n(\xi)$ *converge în medie de ordinul* r (întreg $\geqslant 1$) *către* $f(\xi)$ *dacă*

$$\lim_{n \to \infty} \int_E |f_n(\xi) - f(\xi)|^r P(d\xi) = 0.$$

2. *Ordonarea tipurilor de convergență.*

a) *Convergența în sensul Bernoulli nu atrage convergența în probabilitate.*

Să luăm

$$E = [0, 1], \quad K = B, \quad P = L^*,$$

$$f_n(\xi) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant \xi < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leqslant \xi \leqslant 1 \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

și

$$f(\xi) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant \xi < \frac{1}{2}, \\ 0 & \frac{1}{2} \leqslant \xi < 1. \end{cases}$$

Atunci

$$P(\{\xi \,|\, |f_n(\xi) - f(\xi)| = 1\}) = 1,$$

deci $f_n(\xi)$ nu converge către $f(\xi)$ în probabilitate.

Totuși, $\lim\limits_{n \to \infty} F_n(a) = F(a)$ pentru orice $a \in R$, $F_n(a)$ fiind funcția de repartiție a variabilei $f_n(\xi)$ și $F(a)$ funcția de repartiție a variabilei $f(\xi)$. În adevăr,

$$F_n(a) = \begin{cases} 0 & a \leqslant 0, \\ \frac{1}{2} & 0 < a \leqslant 1, \\ 1 & 1 < a, \end{cases} \qquad F(a) = \begin{cases} 0 & a \leqslant 0, \\ \frac{1}{2} & 0 < a \leqslant 1, \\ 1 & 1 < a, \end{cases}$$

deci

$$F_n(a) = F(a).$$

Se poate totuși demonstra

Teorema. *Dacă $f_n(\xi)$ converge în sensul Bernoulli către o constantă ω, șirul $f_n(\xi)$ converge în probabilitate către ω.*

Demonstrație. Fie deci $F_n(a) = P(x_n < a)$, $F(a) = P(x < a)$. Avem,

$$F(a) = \begin{cases} 0 & a \leqslant \omega, \\ 1 & a > \omega. \end{cases}$$

Singurul punct de discontinuitate al funcției $F(a)$ este punctul $a = \omega$. Avem,

$$0 \leqslant 1 - P(\{\xi \,|\, |f_n - \omega| \leqslant \varepsilon\}) = 1 - P\{\xi \,|\, \omega - \varepsilon \leqslant f_n(\xi) \leqslant \omega + \varepsilon\}) \leqslant$$

$$\leqslant 1 - P(\{\xi \,|\, \omega - \varepsilon \leqslant f_n(\xi) < \omega + \varepsilon\}) \leqslant 1 - [P(\{\xi \,|\, f_n(\xi) < \omega + \varepsilon\}) -$$

$$- P(\{\xi \,|\, f_n(\xi) < \omega - \varepsilon\}) = F(\omega + \varepsilon) - F(\omega - \varepsilon) -$$

$$- [F_n(\omega + \varepsilon) - F_n(\omega - \varepsilon)].$$

Prin urmare,

$$P(\{\xi \,|\, |f_n(\xi) - \omega| \leqslant \varepsilon\}) \to 1,$$

deci

$$P(\{\xi \,|\, |f_n - \omega| > \varepsilon\}) \to 0.$$

$f_n(\xi)$ converge în probabilitate către ω, deci teorema este demonstrată.

b) Dacă $f_n(\xi)$ converge în probabilitate către $f(\xi)$, $F_n(a)$ converge către $F(a)$ în orice punct de continuitate al lui $F(a)$, $F_n(a)$ fiind funcția de repartiție a lui $x_n(\xi)$, iar $F(a)$ funcția de repartiție a lui $f(\xi)$.

Demonstrație. Vom folosi următoarea lemă pe care o vom demonstra la urmă.

Fie $x = f(\xi)$ și $y = g(\xi)$ două variabile aleatoare și A, η două numere dintre care $\eta > 0$. Atunci

$$|P(\{\xi \,|\, f(\xi) < A\}) - P(\{\xi \,|\, y < A\}| \leqslant |P(\{\xi \,|\, f(\xi) < A + \eta\}) -$$

$$- P(\{\xi \,|\, f(\xi) < A - \eta\}) + P(\{\xi \,|\, |f(\xi) - g(\xi)| > \eta.$$

Revenind la demonstrarea teoremei, fie $\varepsilon > 0$ și $\eta > 0$. Există $N(\varepsilon, \eta)$ astfel încît

$$P(\{\xi \,|\, |f_n(\xi) - f(\xi)| \geqslant \eta\}) < \varepsilon \text{ pentru } n \geqslant N(\varepsilon, \eta).$$

După lema precedentă

$$|F_n(a) - F(a)| \leqslant |F(a + \eta) - F(a - \eta)| + \varepsilon.$$

Dacă $F(a)$ este continuă în punctul a, atunci

$$|F(a + \eta) - F(a - \eta)| \leqslant \varepsilon,$$

dacă η este destul de mic. Atunci pentru n destul de mare

$$|F_n(a) - F(a)| \leqslant 2\varepsilon,$$

deci $F_n(a)$ converge către $F(a)$ în orice punct $a \in R$ de continuitate al funcției $F(a)$.

Pentru demonstrarea lemei enunțată mai sus, fie A și $\eta > 0$ constantele din lemă. Avem

$$\{\xi | x < A, \quad g \geqslant A\} \cup \{\xi | f(\xi) \geqslant A, \quad g(\xi) < A\} <$$
$$< \{\xi | A - \eta \leqslant f(\xi) < A + \eta\} \cup \{\xi || f(\xi) - g(\xi)| \geqslant \eta\}.$$

Deci,

$$P(\{\xi | f(\xi) < A, g(\xi) \geqslant A\}) + P(\{\xi | f(\xi) \geqslant A, g(\xi) < A\}) \leqslant$$
$$\leqslant P(\{\xi | A - \eta \leqslant f(\xi) < A + \eta\}) + P(\{\xi || f(\xi) - g(\xi)| \geqslant \eta\}) =$$
$$= [F(A + \eta) - F(A - \eta)] + P(\{\xi || f(\xi) - g(\xi)| \geqslant \eta\}).$$

Dar

$$P(\{\xi | f(\xi) < A\}) = P(\{\xi | f(\xi) < A, g(\xi) < A\})$$

și

$$P(\{\xi | g(\xi) < A\}) = P(\{\xi | f(\xi) < A, g(\xi) < A\}) +$$
$$+ P(\{\xi | f(\xi) \geqslant A, g(\xi) < A\}).$$

Deci,

$$P(\{\xi | f(\xi) < A\}) - P(\{\xi | g(\xi) < A\}) = P(\{\xi | f(\xi) < A, g(\xi) \geqslant A\}) -$$
$$- P(\{\xi | f(\xi) \geqslant A, g(\xi) < A\}) \leqslant P(\{\xi | f(\xi) < A, g(\xi) \geqslant A\}),$$

adică inegalitatea căutată.

Observație. Este ușor de văzut că $F_n(a) \to F(a)$ în orice punct de continuitate al funcției $F(a)$ nu atrage

$$P(f_n < a) \to P(f < a)$$

pentru orice $a \in R$. Iată un exemplu. Fie

$$f_n(x) = -\frac{1}{n} \quad \text{pentru } x \in E$$

și

$$f(x) = 0 \quad \text{pentru } x \in E.$$

Atunci

$$F_n(a) = \begin{cases} 0 & a \leq -\frac{1}{n}, \\ 1 & a > -\frac{1}{n}. \end{cases}$$

$$F(a) = \begin{cases} 0 & a \leqslant 0, \\ 1 & a > 0. \end{cases}$$

Dar

$$F_n(a) \to F(a) = \begin{cases} 0 & a < 0, \\ 1 & a \geqslant 0, \end{cases}$$

și

$$F^*(a) = \begin{cases} F(a), & a \neq 0, \\ 1 \neq F(a) = 0, & a = 0, \end{cases}$$

ceea ce demonstrează afirmația noastră.

Observație în legătură cu convergența în măsură. Dacă un șir $f_n(\xi)$ de variabile aleatoare converge în sensul Bernoulli către $f(\xi)$ și către $f^*(\xi)$, se poate ca

$$f(\xi) \neq f^*(\xi)$$

pentru orice $\xi \in E$.

Dacă șirul $f_n(\xi)$ converge în probabilitate către $f(\xi)$ și de asemenea către $f^*(\xi)$, atunci $f(\xi)$ și $f^*(\xi)$ coincid, cu excepția unei mulțimi E_0 de probabilitate zero. Pentru aceasta nu avem decît să observăm că

$$|f(\xi) - f^*(\xi)| \leqslant |f(\xi) - f_n(\xi)| + |f_n(\xi) - f^*(\xi)|,$$

deci

$$\{\xi | f(\xi) - f^*(\xi)| > \varepsilon\} \subset \left\{\xi || f(\xi) - f_n(\xi)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup$$
$$\cup \left\{\xi | f_n(\xi) - f^*(\xi)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

și, prin urmare,

$$P(\{\xi || f(\xi) - f^*(\xi)| > \varepsilon\}) \leqslant P\left(\left\{\xi | f(\xi) - f_n(\xi)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) +$$
$$+ P\left(\left\{\xi || f_n(\xi) - f^*(\xi)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right).$$

Dacă luăm pe n destul de mare, rezultă că

$$P(\xi \mid\mid f(\xi) - f^*(\xi)| > \varepsilon\}| = 0.$$

Dar

$$P(\{\xi \mid\mid f(\xi) - f^*(\xi)| > 0\}) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\xi \mid\mid f(\xi) - f^*(\xi)| > \frac{1}{n}\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left\{\xi \mid\mid f(\xi) - f^*(\xi)| > \frac{1}{n}\right\}\right) = 0,$$

de unde

$$P(\{\xi \mid\mid f(\xi) - f^*(\xi)| > 0\}) = 0.$$

Variabilele aleatoare limită coincid, deci, aproape peste tot. Ele sînt variabile echivalente.

c) *Un șir de variabile aleatoare aproape sigur convergent converge tare.*

Demonstrație. Fie e mulțimea din K pe care $f_n(\xi)$ converge către $f(\xi)$. Cum am presupus că $f_n(\xi)$ converge aproape sigur către $f(\xi)$, urmează

$$P(E - \mathrm{e}) = 0 \text{ sau } P(\mathrm{e}) = 1.$$

Fie

$$\mathrm{e}_{n,\varepsilon} = \{\xi \mid\mid f_n(\xi) - f(\xi)| \leqslant \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0$$

și

$$E_{n,\varepsilon} = \bigcap_{i \geqslant n} \mathrm{e}_{i,\varepsilon}.$$

Este evident că

$$E_{j,\varepsilon} \subset E_{j+1,\varepsilon} \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

și că

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{j,\varepsilon} \supset \mathrm{e},$$

oricare ar fi $\varepsilon > 0$, căci $f_n(\xi) \to f(\xi)$ pentru $\xi \in \mathrm{e}$.

Prin urmare,

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{j,\varepsilon}\right) = 1,$$

deci

$$\lim_{n \to \infty} P(E_{n,\varepsilon}) = 1.$$

Să dăm acum $\varepsilon > 0$ și $\eta > 0$. Să demonstrăm că există $N(\varepsilon, \eta)$ astfel încît

$$P\left(\bigcap_{n \geqslant N(\varepsilon,\eta)} \{\xi \mid\mid f_n(\xi) - f(\xi)| \leqslant \varepsilon\}\right) > 1 - \eta. \tag{5}$$

Va fi suficient să demonstrăm că

$$P\left(\bigcap_{n \geqslant N(\varepsilon,\eta)} \{\xi \mid\mid f_n(\xi) - f(\xi)| < \varepsilon\}\right) > 1 - \eta. \tag{6}$$

Dar

$$\bigcap_{n \geqslant j} \{\xi \mid\mid f_n(\xi) - f(\xi)| < \varepsilon\} = E_{j,\varepsilon}$$

și

$$P(E_{j,\varepsilon}) > 1 - \eta,$$

dacă $j > N'$ este convenabil ales. Este suficient să luăm $N(\varepsilon, \eta) = N'$ pentru ca (6), deci și (5), să fie satisfăcute. Deci, *convergența aproape sigură implică pe cea tare.* Mai trebuie acum să demonstrăm că convergența tare implică pe cea aproape sigură pentru a demonstra echivalența între cele două moduri de convergență.

Observație. (6) implică (5), deoarece

$$\bigcap_{n \geqslant N(\varepsilon,\eta)} \{\xi \mid\mid f_n(\xi) - f(\xi)| \leqslant \varepsilon\} \supset \bigcap_{n \geqslant N(\varepsilon,\eta)} \{\xi \mid\mid f_n(\xi) - f(\xi)| > \varepsilon\}$$

d) *Un șir de variabile aleatoare tare convergent este aproape sigur convergent.*

Demonstrație. Cum $x_n(\xi)$ converge tare către $x(\xi)$, $\varepsilon > 0$ și $\eta > 0$ fiind dați, putem găsi un număr întreg N astfel încît

$$P\left(\bigcap_{j \geqslant N} \{\xi \mid\mid f_n(\xi) - f(\xi)| \leqslant \varepsilon\}\right) > 1 - \eta.$$

Fie p un întreg arbitrar strict pozitiv. Fie $\mathrm{e}^{(p)}$ mulțimea punctelor $\xi \in E$ pentru care

$$|f_n(\xi) - f(\xi)| < \frac{1}{p}$$

pentru orice n mai mare sau egal cu un anumit întreg N_p.

Din cele ce preced rezultă că putem alege N_p astfel încît

$$P(\mathrm{e}^{(p)} > 1 - \frac{1}{2^p} \text{ și } N_p > N_{p+1}.$$

Mulțimea E_r, care constă în intersecția mulțimilor $e^{(r+1)}$, $e^{(r+2)}$,..., $e^{(r+p)}$,... va avea o probabilitate mai mare sau egală cu $1 - \frac{1}{2^r}$.

Cu atît mai mult, probabilitatea intersecției numai a unei părți din șirul mulțimilor

$$e^{(r+1)},\ e^{(r+2)},\ldots,\ e^{(r+p)},\ldots$$

este mai mare sau egală cu $1 - \frac{1}{2^r}$.

Prin urmare, în particular,

$$P(F_n) \geqslant 1 - \frac{1}{2^r}$$

cînd $N_{r+1} \leqslant n \leqslant N_{r+2}$, unde

$$F_n = \bigcap_{j=n}^{\infty} \{\xi \,|\, |x_j(\xi) - x(\xi)| < \varepsilon_j\}$$

și unde

$$\varepsilon_n = \frac{1}{r+1},$$

și, prin urmare,

$$\varepsilon_{N_{r+1}} = \varepsilon_{1+N_{r+1}} = \varepsilon_{2+N_{r+1}} = \ldots = \varepsilon_{N_{r+2}-1} = \frac{1}{r+1}$$

$$\varepsilon_{N_{r+2}} = \varepsilon_{1+N_{r+2}} = \ldots = \frac{1}{r+2}, \ldots .$$

Cînd n crește indefinit, și r crește indefinit și prin urmare șirul ε_n tinde către 0 iar $P(F_n)$ către 1.

Rezultă atunci că mulțimea Q a punctelor $\xi \in E$ pentru care $x_n(\xi) \to x(\xi)$ are probabilitatea 1, căci $Q \supset F_n$ pentru orice n și cum

$$\lim_{n\to\infty} P(F_n) = 1$$

și

$$P(F_n) \leqslant P(Q),$$

deducem

$$P(Q) = 1.$$

Am demonstrat, prin urmare, că un șir de variabile aleatoare tare convergent este și aproape sigur convergent. Dacă ținem seama și de teorema c, obținem că cele două tipuri de convergență sînt echivalente.

Înainte de a încheia acest paragraf, vom face cîteva observații cu privire la legăturile dintre convergența tare, convergența aproape sigură și cea în probabilitate.

Dacă ținem seamă de definițiile C_{as} și C_t, se vede imediat că un șir convergent tare — convergent aproape sigur este și convergent în probabilitate. Implicația inversă nu este valabilă.

În concluzie,

convergența aproape sigură $\leftrightarrow$ *convergența tare;*

convergența tare $\rightarrow$ *convergența în probabilitate;*

convergența în probabilitate $\rightarrow$ *convergența în sensul Bernoulli;*

convergența în medie de ordinul $r(\geqslant 1)$ $\rightarrow$ *convergența în probabilitate.*

Exemplele date în cursul acestui paragraf arată că nici una dintre implicațiile inverse nu este valabilă. Demonstrăm aici și ultima afirmație.

e) *Dacă* $f_n(\xi)$ *converge în medie de ordinul* r *către* $f(\xi)$, $f_n(\xi)$ *converge și în probabilitate către* $f(\xi)$.

Demonstrație. Să presupunem că $f_n(\xi)$ nu ar converge în probabilitate către $f(\xi)$. Atunci ar exista $\varepsilon \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$ și un șir de numere $n_i \to \infty$, astfel încît

$$P(\{\xi \,|\, |f_{n_i}(\xi) - f(\xi)| \geqslant \varepsilon\}) \geqslant \eta$$

pentru orice i. Dar

$$\left[\int_E |f_{n_i}(\xi) - f(\xi)|^\nu \, P(\mathrm{d}\xi)\right]^{\frac{1}{\nu}} \geqslant \left[\int_{\{x \,|\, |f_{n_i}(\xi) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}} |f_{n_i}(\xi) - \right.$$

$$\left. - f(\xi)|^\nu \, P(\mathrm{d}\xi)\right]^{\frac{1}{\nu}} \geqslant [\varepsilon^\nu \, P(\{\xi \,|\, |f_{n_i}(\xi) - f(\xi)| \geqslant \varepsilon\})]^{\frac{1}{\nu}} = \varepsilon \eta^{\frac{1}{\nu}}.$$

Deci

$$\left[\int_E |f_{n_i}(\xi) - f(\xi)|^\nu \, P(\mathrm{d}\xi)\right]^{\frac{1}{\nu}} \geqslant \varepsilon \eta^{\frac{1}{\nu}},$$

ceea ce ne conduce la o contradicție, deoarece

$$\lim_n \left[\int_E |f_n(\xi) - f(\xi)|^\nu P(d\xi)\right]^{\frac{1}{\nu}} = 0,$$

deci și

$$\lim_i \left[\int_E |f_{n_i}(\xi) - f(\xi)| P(d\xi)\right]^{\frac{1}{\nu}} = 0.$$

Prin urmare, șirul $f_n(\xi)$ converge în măsură către $f(\xi)$.

§ 15. Echivalența asimptotică și stabilitatea șirurilor

1. Definiții. *Echivalența a două șiruri f_n și g_n de variabile aleatoare* ale unui cîmp probabilizat $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ se definește în raport cu fiecare dintre tipurile de convergență.

Cele două șiruri sînt echivalente B (în sensul Bernoulli), *în probabilitate, tare, aproape sigur sau în medie de ordinul r, dacă $\{f_n - g_n\}$ converge către zero, după criteriul respectiv.*

Vom numi *domeniu de stabilitate al unui șir $\{f_n\}$* după unul dintre criteriile precedente, mulțimea șirurilor echivalente cu $\{f_n\}$ după acel criteriu.

Deosebit de important este domeniul de stabilitate al unui șir numeric $\{a_n\}$. Șirurile $\{f_n\}$ aparținînd unui atare cîmp se numesc stabile.

Un șir $\{f_n\}$ este *propriu stabil* [1] dacă aparține domeniului de stabilitate al șirului valorilor sale medii. Deci, de exemplu:

Șirul $\{f_n\}$ este propriu stabil, în probabilitate, dacă $\{f_n - M[f_n]\}$ converge către zero în probabilitate.

2. *Condiții de stabilitate proprie*

Teoremă. *Fie $\{s_n(\xi)\}$ un șir de variabile aleatoare aparținînd spațiului L_2.*

Dacă $\mu_n^2 = M[(s_n - M[s_n])^2] \to 0$ cînd $n \to \infty$, șirul este propriu stabil, în probabilitate.

[1] Folosim acest termen în loc de „normal stabil", deoarece, în teoria probabilităților, atributul normal este legat de legea lui Gauss. Am numi, de exemplu, „normal stabil" un șir care aparține domeniului de stabilitate al unui șir care converge către o variabilă gaussiană.

Pentru demonstrație, observăm doar că însăși condiția $\mu_n \to 0$ caracterizează un șir propriu stabil în medie de ordinul al doilea, ceea ce atrage convergența în probabilitate.

Putem verifica și direct, prin aplicarea inegalității lui Cebîșev,

$$P(\{\xi \mid |s_n(\xi) - M[s_n]| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{\mu_n^2}{\varepsilon^2}.$$

Conform, ipotezelor, μ_n tinde către zero, de unde stabilitatea.

Tot așa de evidentă este și următoarea

Teorema a lui Cebîșev. *Dacă $f_n(\xi) \in L_2$ și*

$$M_2\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1,2,\ldots,n} f_j - M\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1,2,\ldots,n} f_j\right]\right] \to 0, \qquad (1)$$

atunci șirul

$$s_n(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{j=1,2,\ldots,n} f_j(\xi)$$

este propriu stabil, în probabilitate.

Condiția dată arată că șirul este propriu stabil în medie de ordinul al doilea. El este deci propriu stabil și în probabilitate.

Pentru aplicațiile acestei teoreme vom deosebi cazul în care variabilele f_n sînt independente în totalitatea lor.

În acest caz,

$$M_2\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1,2,\ldots,n} f_j - M\left[\frac{1}{n}\sum f_j\right]\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1,2,\ldots,n} \mu_j^2, \qquad (2)$$

deci criteriul (1) se transformă în criteriul

$$\frac{1}{n^2}\sum_{j=1,2,\ldots,n} \mu_j^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0. \qquad (3)$$

Criteriul (3) este verificat în cazul șirurilor de variabile uniform mărginite $|f_n| \leqslant K$. Prin urmare, *mediile $s_n(\xi)$ ale unui șir de variabile uniform mărginite independente sînt variabile aleatoare propriu stabile.*

Evident criteriul (3) este de asemenea verificat dacă variabilele șirului aparțin spațiului L_2 și au aceeași lege de repartiție, deoarece în acest caz $\mu_1 = \mu_2 = \ldots$. De unde propoziția:

Mediile $s_n(\xi)$ ale unui șir de variabile aparținînd spațiului L_2 și avînd aceeași funcție de repartiție sînt variabile propriu stabile.

3. *Șiruri de variabile dependente.* Dacă variabilele șirului nu sînt independente, criteriul (1) se exprimă cu ajutorul dispersiilor μ_j și cu ajutorul corelațiilor

$$\rho_{jh} = M[(f_j - M[f_j])(f_h - M[f_h])],$$

astfel

$$\frac{1}{n^2} \sum_{n=1,\,2,\ldots,\,n} \mu_j^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{j<h} \rho_{jh} \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{4}$$

Acest criteriu este evident satisfăcut dacă

$$\frac{1}{n^2} \sum_{j=1,\,2,\ldots,\,n} \mu_j^2 \to 0, \quad \frac{1}{n^2} \sum_{j<h} \rho_{jh} \to 0. \tag{5}$$

În particular, dacă variabilele sînt două cîte două necorelate ($\rho_{jh} = 0$), regăsim relația (3) ca singur criteriu de stabilitate.

Dăm aici o teoremă de stabilitate pentru cazul în care există corelație.

Teoremă. *Dacă*

$$|f_n(\xi)| < K, \quad \rho_{jh} = a(h-j)$$

și

$$\frac{1}{n^2} a(h-j) \to 0,$$

cînd $h-j \to \infty$, mediile $s_n(\xi)$ sînt propriu stabile.

Prima parte a criteriului (4) este evident satisfăcută. Să arătăm că este satisfăcută și a doua parte.

λ fiind un întreg oarecare, numărul perechilor de valori j, h ($j, h = 1, 2, \ldots, n$, $j < h$), pentru care $h - j < l$, este mai mic decît λn iar numărul celor pentru care $h - j \geq l$ este mai mic decît n^2.

Pe de altă parte, dînd un ε arbitrar de mic, putem alege un λ_ε astfel ca

$$a(h-j) < \varepsilon,$$

dacă $h - j > \lambda_\varepsilon$.

Să adăugăm și observația că, în condițiile date,

$$|\rho_{jh}| < K^2.$$

Observăm acum că

$$\sum_{j<h}^{1,\,2,\ldots,\,n} \rho_{jh} = \sum_{h-j<\lambda_\delta} \rho_{jh} + \sum_{h-j\geq\lambda_\delta} \rho_{jh},$$

de unde, ținînd seama de rezultatele precedente,

$$\frac{1}{n^2} \sum_{j<h}^{1,\,2,\ldots,\,n} \rho_{jh} < \frac{n\lambda_\varepsilon h^2}{n^2} + \frac{n^2\varepsilon}{n^2} = \frac{\lambda_\varepsilon k^2}{n} + \varepsilon,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j<h}^{1,\,2,\ldots,\,n} \rho_{jh} \leq \varepsilon.$$

4. *Condiții de stabilitate pentru șiruri de variabile din spațiul L_1.*

P r o p o z i ț i a 1. *Dacă $\{f_n(\xi)\}$ este un șir de variabile independente din spațiul L_1 și care au aceeași funcție de repartiție, media $s_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1,\,2,\ldots,\,n} \delta_j$ este propriu stabilă în sensul Bernoulli.*

Presupunem, pentru a simplifica scrisul, că $M[f_n] = 0$. Rămîne să arătăm că funcția caracteristică a variabilei s_n, care este

$$\varphi_n(u) = \left[\varphi\left(\frac{u}{n}\right)\right]^n, \tag{6}$$

unde $\varphi(u)$ este funcția caracteristică comună a variabilelor f_n, tinde către unitate cînd n tinde către infinit.

Deoarece există momentul de ordinul întîi, există derivata întîi a funcției $\varphi(u) = \varphi_1(u) + i\varphi_2(u)$, și această derivată este o funcție continuă ca și $\varphi(u)$,

$$\varphi(u) = 1 + u(\varphi_1'(\theta_1 u) + i\varphi_2'(\theta_2 u)). \tag{7}$$
$$(0 < \theta_1,\ \theta_2 < 1)$$

Prin urmare,

$$\varphi_n(u) = \left[1 + \frac{u}{n}\left(\varphi_1'\left(\theta_1 \frac{u}{n}\right) + i\varphi_2'\left(\theta_2 \frac{u}{n}\right)\right)\right]^n.$$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_1'\left(\theta_1 \frac{u}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi_2'\left(\theta_2 \frac{u}{n}\right) = 0$$

pentru orice u finit, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(u) = \lim_{n\to\infty} e^{u\left(\varphi_1'\left(\theta_1 \frac{u}{n}\right) + i\varphi_2'\left(\theta_2 \frac{u}{n}\right)\right)} = 1.$$

Propoziția 2. O teoremă a lui Hincin afirmă mai mult: *În condițiile propoziției 1, media este propriu stabilă în probabilitate.*

Propoziția 3. *Dacă*

$$f_n(\xi) \in L_1$$

și

$$\lambda_n = M[|f_n - M[f_n]|] \to 0,$$

atunci f_n tinde în probabilitate către zero, cînd n tinde către infinit.

Vom presupune, pentru simplificare, $M[f_n] = 0$. Știm că există

$$\lambda_n = \int_E |f_n| \, P(d\xi).$$

Prin urmare,

$$\varepsilon \int_{|f_n| \geqslant \varepsilon} P(d\xi) \leqslant \int_{|f_n| \geqslant \varepsilon} |f_n| \, P(d\xi) \leqslant \lambda_n,$$

de unde

$$P(\{\xi \,||f_n| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{\lambda_n}{\varepsilon},$$

deci

$$P(\{\xi \,||f_n| \geqslant \varepsilon\}) \to 0$$

cînd $n \to \infty$. Lema este astfel demonstrată.

În particular, dacă f_n este media $s_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1,2,\ldots,n} g_j(\xi)$, propoziția 3 devine următoarea

Teoremă. *Dacă*

$$\Delta_n = M[|s_n - M[s_n]|] \to 0 \qquad (1)$$

cînd $n \to \infty$, $s_n - M[s_n]$ tinde în probabilitate către zero.

§ 16. Legea numerelor mari

1. *Teorema de stabilitate proprie a frecvenței.* Dacă f_j reprezintă frecvența evenimentului A în experiența de rang j, probabilitatea acestui eveniment este p_j, și această experiență este independentă de celelalte; f_j, f_k fiind independente, atunci se aplică propoziția 1 din paragraful precedent.

Se mai observă că

$$s_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1,2,\ldots,n} f_j$$

este frecvența relativă în sistemul celor n experiențe. Pe de altă parte,

$$M[s_n] = \frac{1}{n} \sum M[f_j] = \frac{1}{n} (p_1 + p_2 + \ldots + p_n).$$

Teorema (1) ia atunci următoarea formă:

Frecvența este o variabilă propriu stabilă.

Dacă la fiecare experiență evenimentul are aceeași probabilitate, $p = p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \ldots$, teorema de stabilitate ia forma cunoscută sub numele de

2. *Legea numerelor mari sau teorema lui Bernoulli: Frecvența tinde în probabilitate către p:*

$$P[|s_n - p| > \varepsilon] \to 0.$$

Vom demonstra și o convergență tare a frecvenței către p.

3. *Legea tare a numerelor mari. Teorema lui Cantelli. Dacă punem*

$$g_j(\xi) = f_j(\xi) - p \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

unde

$$f_j(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in A, \\ 0, & \xi \in CA \end{cases}$$

și

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1,2,\ldots,n} g_j(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{j=1,2,\ldots,n} f_j - p.$$

Vom avea

$$M_4[\sigma_n] = \frac{1}{n^4} \left[\sum_j M_4[g_j] + 6 \sum_{k \neq h} M[g_k^2 g_h^2] \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n^4} \left[n + 6 \frac{n(n+1)}{2} \right] \leqslant \frac{S}{n^2}.$$

Prin urmare, seria

$$\sum_{n=1,2,\ldots} M_4[\sigma_n]$$

este convergentă.

Dacă aplicăm *inegalitatea generalizată a lui Cebîșev*

$$P(|\sigma_n| \leqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{M_4[\sigma_n]}{\varepsilon^4},$$

inegalitatea lui Boole ne dă

$$P(|\sigma_n| \leqslant \varepsilon,\ |\sigma_{n+1}| \leqslant \varepsilon,\ \ldots,\ |\sigma_{n+p}| \leqslant \varepsilon,\ \ldots) \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \sum_{j=n,n+1,\ldots} P(|\sigma_j| > \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{1}{n^4} \sum_{j=n,n+1,\ldots} M_4[\sigma_j].$$

Deoarece $\sum_{j=n,n+1,\ldots} M_4[\sigma_j]$ tinde către zero cînd n tinde către infinit, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} P(|s_n - p| \leqslant \varepsilon,\ |s_{n+1} - p| \leqslant \varepsilon,\ \ldots) = 1,$$

deci:

Frecvența tinde aproape sigur către probabilitate cînd n tinde către infinit.

Această propoziție constituie *legea tare a numerelor mari.*

În cazul în care probabilitatea nu este constantă în diferitele experiențe, această teoremă ia următoarea formă:

Frecvența este o variabilă propriu stabilă, peste tot.

Demonstrația este similară cu cea a teoremei precedente.

CAPITOLUL IV

REPARTIȚII LIMITĂ

Două tipuri de repartiții sînt proeminente în teoria probabilităților și în aplicațiile ei: repartiția sau, cum se spune adesea, legea lui Gauss și legea lui Poisson.

Evenimentele la care se referă legea lui Gauss sînt localizate într-un spațiu euclidian, ca mulțimi măsurabile ale acestui spațiu. Probabilitatea unui atare eveniment este, în cazul unei singure dimensiuni,

$$P(A) = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \int_A \mathrm{e}^{-\frac{h^2x^2}{2}}\, \mathrm{d}x.$$

Legea lui Poisson localizează evenimentele numai în timp. Enunțul ei se poate prezenta astfel: probabilitatea ca un eveniment să se producă de k ori în intervalul de timp t este

$$P_{k,t} = \mathrm{e}^{-at} \frac{(at)^k}{k!}.$$

Aceste două legi sînt diferite prin natura lor intimă și, firește, servesc la studiul unor categorii de fenomene foarte deosebite între ele.

Dar amîndouă au o importanță caracteristică comună: ele sînt repartiții limită de sume de variabile aleatoare independente.

Hincin a arătat, pentru spațiile cu o dimensiune, legătura dintre aceste două clase de repartiții.

Repartițiile probabilistice ale evenimentelor naturale sînt, în general, rezultate fie din suprapunerea spațială a numeroase evenimente a căror repartiție individuală poate fi — în anumite limite — arbitrară, fie din repetarea în timp a unuia sau mai multor evenimente elementare, cu structură probabilistă simplă, în general discontinuă.

Repartițiile observabile direct pentru evenimentele naturale macroscopice sînt, astfel, limite de repartiții ale unor sume de variabile pentru structura cărora nu se cere decît o anumită uniformitate și care, în experiență, corespund unor variabile simple.

Din expresia care dă legile de repartiție ale variabilelor limită se constată că legea lui Gauss joacă un rol singular; cadrul general este dominat de repartițiile de tip Poisson, a căror suprapunere poate genera orice lege din această categorie.

Grupul de legi de care ne ocupăm a fost descoperit prin analiza unei proprietăți de asemenea comună tuturor, și anume aceea de a fi indefinit divizibile. Sub acest aspect, repartițiile limită capătă o nouă valoare pentru unele aplicații, așa cum va fi lămurit în cele ce urmează.

Problema legilor de probabilitate limită poate purta numele lui Laplace, care i-a acordat un mare loc în preocupările sale. Dar Laplace și continuatorii operei sale, ca Moivre și școala rusă a lui Cebîșev și Liapunov, au gravitat mai cu seamă în jurul condițiilor care conduc, la limită, la legea lui Gauss, influențați fiind de teoria erorilor de observație în care această lege este aplicabilă.

Abia în 1925, cu lucrările lui Paul Levy, și mai tîrziu, ale lui Hincin, de Finetti și Feller, problema legilor limită a fost pusă cu precizie și complet rezolvată.

§ 1. Forma canonică a repartițiilor limită

1. *Precizarea problemei.* Să considerăm un șir de variabile aleatoare $\{x_n\}$, fiecare dintre ele fiind o sumă de variabile independente

$$x_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nl_n},\ l_n \to \infty \text{ cînd } n \to \infty.$$

Pentru ca problema existenței unei limite a variabilei să aibă sens și să nu fie banală, trebuie să presupunem o anumită uniformitate pentru variabilele x_{nj}, cînd $n \to \infty$.

Vom preciza această uniformitate după cum urmează. Dacă $\varphi_{nj}(u)$ este funcția caracteristică a variabilei x_{nj} și punem această funcție sub forma comodă

$$\varphi_{nj}(u) = 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1)\, dF_{nj}(x), \tag{1}$$

$F_{nj}(x)$ fiind funcția de repartiție corespunzătoare, fiind dat un ε și un U, există un $N_{\varepsilon,U}$ astfel că, notînd cu

$$\alpha_{nj}^{(u)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1)\, dF_{nj}^{(x)},$$

să avem

$$|\, \alpha_{nj}^{(u)} \,| < \varepsilon \tag{i}$$

pentru $|\, u \,| < U (j = 1, 2, \ldots, l_n)$ dacă $n > N_{\varepsilon,U}$.

Cu alte cuvinte, x_{nj} tind uniform, în sensul lui Bernoulli, către zero, cînd n tinde către infinit.

2. *Determinarea repartițiilor limită.* Presupunem că x_n are o limită în sensul lui Bernoulli, deci că

$$\varphi_n(u) \to \varphi(u)$$

uniform în orice interval $|\, u \,| < U$.

Funcția caracteristică a variabilei x_n este dată de egalitatea

$$\varphi_n(u) = \varphi_{n1}(u)\, \varphi_{n2}(u) \ldots \varphi_{nl_n}(u);$$

(1) și (i) arată că pentru n suficient de mare nici unul dintre factorii acestui produs nu se anulează cînd $|\, u \,| < U$. Prin urmare, putem scrie,

$$\ln \varphi_n(u) = \sum_j \ln |\, 1 + \alpha_{nj}(u) \,|. \tag{2}$$

Se verifică, fără greutate, că

$$\lim_{n\to\infty} \sum_j \ln(1 + \alpha_{nj}) = \lim_{n\to\infty} \sum_j \alpha_{nj}.$$

Astfel, știind că $\varphi_n(u)$ are ca limită funcția $\varphi(u)$, vom avea

$$\ln \varphi(u) = \lim \sum_j \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1)\, dF_{nj}(x). \tag{3}$$

Pentru a da o formă convenabilă expresiei din membrul al doilea, să considerăm funcția monotonă nedescrescătoare

$$H_n(x) = \sum_j \int_0^x \frac{z^2}{1+z^2}\, dF_{nj}(z), \tag{4}$$

care îngăduie să scriem (3) sub forma nouă

$$\ln \varphi(u) = \lim \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1) \frac{1+x^2}{x^2}\, dH_n(x). \tag{5}$$

Să observăm că

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\, dH_n(x) = \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dF_{nj}(x) = \alpha_n$$

este finită. Rezultă atunci, pentru (5), forma

$$\ln \varphi(u) = i\alpha_n u + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, dH_n(x). \tag{6}$$

Se demonstrează că funcțiile monotone $H_n(x)$ sînt uniform mărginite.

Conform teoremei lui Helly, există atunci un subșir $H_{n_s}(x)$ care converge către o limită $H(x)$, de asemenea monotonă nedescrescătoare, în toate punctele acesteia. Pentru acest șir avem

$$\lim \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, dH_{n_s}(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, dH(x).$$

Deoarece suma din membrul al doilea din (6) are ea însăși o limită, rezultă că și α_n are o limită bine determinată cînd $s \to \infty$ și că, prin urmare, se obține formula lui P. Lévy:

$$\ln \varphi(u) = i\alpha u + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, dH(x),$$

unde α este o constantă reală, iar $H(x)$ o funcție monotonă nedescrescătoare. Dacă $H(x)$ are în punctul $x = 0$ un salt egal cu μ^2, vom avea

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, dH(x) = \frac{1}{2}\mu^2 u^2 + \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right]$$

sau, introducînd funcția $G(x)$, egală cu $H(x)$ pentru $x \leqslant 0$, continuă în $x = 0$ și egală cu $H(x) - \mu^2$ pentru $x > 0$, obținem forma definitivă

$$\ln \varphi(u) = i\alpha u - \frac{1}{2}\mu^2 u^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x). \tag{7}$$

Lăsăm cititorului grija de a arăta că parametrii α și μ^2 sînt unici, iar $G(x)$ este determinată, în afară de o constantă aditivă. Prin urmare, (7) dă o reprezentare canonică funcțiilor caracteristice ale repartițiilor sumă.

Rămîne să arătăm că orice funcție caracteristică astfel reprezentată corespunde unei repartiții limită de sume uniforme în înțelesul fixat mai sus.

Demonstrația acestui fapt se va da în paragraful următor. Vom arăta că orice funcție reprezentată de (7) este funcție caracteristică a unei variabile indefinit divizibile. Vom arăta, de asemenea că orice atare variabilă este o limită în sensul lui Bernoulli de sume în înțelesul precedent și astfel va fi confirmată afirmația noastră.

§ 2. Repartițiile indefinit divizibile

1. Definiție. *O variabilă aleatoare $x = f(\xi)$ este indefinit divizibilă dacă, pentru fiecare n întreg, există n variabile independente $x_{nj} = f_{nj}(\xi)$ avînd aceeași repartiție, a căror sumă este x*

$$x = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn}. \tag{1}$$

Consecința imediată a acestei definiții este următoarea

P r o p o z i ț i e. *Variabilele indefinit divizibile sînt limite de sume de variabile independente în sensul dat la* § 1.

Deci, repartițiile indefinit divizibile sînt repartiții limită în sensul dat la § 1.

2. *Funcția caracteristică* $\varphi(u)$ a unei variabile indefinit divizibile este caracterizată prin următoarea proprietate, echivalentă cu definiția de la 1:

Pentru orice n există o funcție caracteristică $\varphi_n(u)$ astfel că

$$|\varphi_n(u)|^n = \varphi(u). \tag{2}$$

Conform propoziției de mai sus, o variabilă indefinit divizibilă este o variabilă limită. Vom avea deci pentru $\varphi(u)$ reprezentarea (7) din § 1.

Să considerăm acum două numere reale α, μ și o funcție monotonă nedescrescătoare $G(x)$, continuă în origine.

Se verifică imediat că $\varphi(u)$, dat de (7), § 1, este o funcție caracteristică.

Observăm mai întîi că $\varphi(u)$ nu este continuă și că

$$\varphi(u) = e^{i\alpha u}\, e^{-\frac{1}{2}\beta^2 u^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x)}. \tag{3}$$

Primii doi factori sînt funcții caracteristice: $e^{i\alpha u}$ funcția caracteristică a variabilei care ia valoarea α cu probabilitatea 1; $e^{-\frac{1}{2}\beta^2 u^2}$ funcția caracteristică a unei variabile gaussiene cu valoarea medie 0 și cu dispersia β^2. Pentru al treilea factor, pe care-l numim $\psi(u)$, ținînd seamă de definiția integralei Stieltjes, avem

$$\psi(u) = \lim \operatorname{unif} e^{\sum_j \left(e^{iux_j} - 1 - \frac{iux_j}{1+x_j^2}\right)\frac{1+x_j^2}{x_j^2}[G(x_{j+1}) - G(x_j)]} \tag{4}$$

pentru un șir de diviziuni x_j, $j = -\infty, \ldots, +\infty$, a căror normă

$$\delta = \sup (x_{j+1} - x_j)$$

tinde către zero și pentru care intervalul $x_1 - x_{-1} \in \delta$ este simetric față cu originea.

Expresia din membrul al doilea din (3) este un produs de funcții caracteristice de tip Poisson

$$e^{(e^{ix_j u} - 1)\alpha_j}$$

cu funcții de formă degenerată $e^{i\beta_j u}$; prin urmare, este ea însăși o funcție caracteristică, iar limita uniformă a unei funcții caracteristice este o funcție caracteristică. Prin urmare, $\psi(u)$ deci $\varphi(u)$ sînt funcții caracteristice.

Este acum evident că, luînd

$$\varphi_n(u) = [\varphi(u)]^{\frac{1}{n}},$$

adică $\alpha_n = \frac{\alpha}{n}$, $\beta_n = \frac{\beta}{\sqrt{n}}$, $G_n(x) = \frac{1}{n} G(x)$, obținem de asemenea o funcție caracteristică și că

$$[\varphi_n(u)]^n = \varphi(u);$$

deci, $\varphi(u)$ este indefinit divizibilă.

Din (3) se constată imediat că funcțiile caracteristice

$$e^{i\alpha u},\ e^{-\frac{1}{2}\mu^2 u^2},\ e^{a(e^{iux} - 1)},$$

corespunzătoare, respectiv, unei variabile cu o valoare unică aproape sigură, unei variabile gaussiene sau unei distribuții Poisson sînt cuprinse în (3) dacă particularizăm cele trei caracteristici α, β, $G(x)$.

3. *Concluzii.* Deoarece din § 1 rezultă că repartițiile limite de sume sînt indefinit divizibile, iar acestea din urmă sînt ele însele limite de sume, cele două clase sînt identice și expresiile (3) și (4) sînt valabile pentru orice distribuție limită.

Legile lui Gauss și Poisson ocupă printre acestea locul cel mai important. Aceste două legi limită diferă printr-o caracteristică importantă în legătură cu stabilitatea.

Suma a două variabile aleatoare gaussiene independente $x_1 = f_1(\xi)$, $x_2 = f_2(\xi)$ este o variabilă gaussiană.

În adevăr, dacă $M[x_1] = 0$, $M[x_2] = 0$, $M[x_1^2] = \mu_1^2$, $M[x_2^2] = \mu_2^2$, funcțiile caracteristice respective sînt

$$\varphi_1(u) = e^{-\frac{1}{2}\mu_1^2 u^2}, \quad \varphi_2(u) = e^{-\frac{1}{2}\mu_2^2 u^2}$$

iar funcția caracteristică a sumei $x_1 + x_2$ este $\varphi = \varphi_1 \varphi_2$, adică

$$\varphi = e^{-\frac{1}{2}\mu^2 u^2}, \quad \mu^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2.$$

În același timp, însă, suma a două variabile de tip Poisson nu este, în general, o variabilă de același tip.

În adevăr, dacă

$$\varphi_1(u) = e^{a(e^{i\alpha u}-1)}; \quad \varphi_2(u) = e^{b(e^{i\beta u}-1)}, \quad a>0, \quad b>0,$$

funcția caracteristică a sumei variabilelor corespunzătoare este

$$\varphi = \varphi_1\varphi_2 = e^{a(e^{i\alpha u}-1)+b(e^{i\beta u}-1)},$$

care nu poate fi pusă sub forma Poisson decît dacă $\alpha = \beta$.

Distribuțiile normale sînt deci stabile în totalitatea lor. Distribuțiile Poisson sînt stabile numai înăuntrul familiilor care au același parametru.

Existența unei teoreme inverse este însă comună celor două distribuții.

Teorema lui Cramer. *Dacă o variabilă aleatoare gaussiană este suma a două variabile aleatoare independente, fiecare dintre ele este o variabilă gaussiană generalizată, în sensul următor:*

Dacă

$$\varphi_1(u)\,\varphi_2(u) = e^{-\frac{1}{2}\mu^2u^2},$$

atunci

$$\varphi_1(u) = e^{i\alpha u-\frac{1}{2}\mu_1^2u^2}, \quad \varphi_2(u) = e^{-i\alpha u-\frac{1}{2}\mu_2^2u^2}$$

cu $\mu_1^2+\mu_2^2 = \mu^2$ *și* α *un parametru real arbitrar.*

Această teoremă are, în afară de însemnătatea ei teoretică, și una aplicativă, în statistica stelară. O teoremă analoagă pentru repartiția Poisson este

Teorema lui Gnedenko. *Dacă o variabilă aleatoare de tip Poisson este suma a două variabile aleatoare independente, fiecare dintre ele este o variabilă de tip Poisson generalizat.*

Adică, dacă

$$\varphi_1(u)\,\varphi_2(u) = e^{a(e^{i\alpha u}-1)}, \quad a>0,$$

atunci

$$\varphi_1(u) = e^{i\beta u+a_1(e^{i\alpha u}-1)}, \quad \varphi_2(u) = e^{-\beta u+a_2(e^{i\alpha u}-1)},$$

unde β este real și arbitrar, iar $a_1>0$, $a_2>0$, $a_1+a_2 = a$.

4. *Repartiții indefinit divizibile cu mai multe dimensiuni.* Repartiția gaussiană este, prin natura ei, localizată spațial, de aceea forma acestei repartiții pentru un spațiu euclidian cu n dimensiuni sau pentru spații vectoriale mai generale s-a studiat în chip natural. Pentru repartiția Poisson, care este localizată în timp, extensiunile au fost mai puțin bogate. Observînd însă că într-o repartiție Poisson intervine o frecvență reprezentată de un număr întreg și că există evenimente complexe în care componentele au frecvențe diferite, se deschide calea pentru generalizarea repartițiilor Poisson și calea cercetării repartițiilor indefinit divizibile cu mai multe variabile.

Pentru acest capitol se va vedea bibliografia de la cap. VI.

CAPITOLUL V

LEGEA LUI LAPLACE-GAUSS

Legea lui Laplace-Gauss, denumită, în genere, cu numele ultimului, este legea centrală a calculului probabilităților, deși în expresia în care apare ca lege limită este o repartiție singulară.

Problema legii lui Gauss are două formulări deosebite.

Cea dintîi ține de încadrarea acestei legi în problema generală a legilor limită și constă în a cere condițiile necesare și suficiente, pentru variabilele $x_{nj} = f_{nj}$, pentru ca sumele $s_n = \sum_{j=1,2,\ldots,n_k} x_{nj}$ să conveargă, în sensul lui Bernoulli, către o variabilă gaussiană.

Această problemă prezintă un interes teoretic precumpănitor. Formularea condițiilor aparține lui A. Hincin și constă într-o întărire a condițiilor de uniformitate care au servit la definirea clasei tuturor legilor limită.

Condiția necesară și suficientă pentru ca s_n să aibă la limită o repartiție gaussiană este ca

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1,2,\ldots,n_k} P(\{\xi \mid |f_{nj}| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Această condiție simplă ne arată cît de bogat este domeniul în care legea limită este gaussiană și explică rolul important pe care l-a jucat în istoria dezvoltării teoriei probabilităților, precum și aplicațiile numeroase ale acestei legi.

A doua formulare este cea pe care o putem numi clasică. Ea face obiectul părții întîi a acestui capitol. În partea a doua,

vom da condiții pentru o lege a lui Gauss relativă la variabilele cu mai multe dimensiuni și vom examina problema convergenței către legea lui Gauss a sumelor de variabile înlănțuite.

§ 1. Problema clasică în forma generală

1. *Șirul sumelor parțiale.* Se consideră un șir de variabile aleatoare independente $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, funcțiile lor de repartiție $F_n(a)$ și funcțiile caracteristice corespunzătoare $\varphi_n(u)$.

Dacă numim cu $G_n(a)$ funcția de repartiție a sumei

$$s_n = \sum_{l=1,2,\ldots,n} x_l,$$

iar

$$s_n = s_{n-1} + x_n,$$

variabila x_n fiind independentă de s_{n-1}, atunci $G_n(a)$ sînt legate prin relația de compoziție

$$G_n(a) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{n-1}(a - \alpha)\, \mathrm{d}F_n(\alpha). \tag{1}$$

Notînd cu $\psi_n(u)$ funcția caracteristică a variabilei s_n, avem în corespondență cu (1) relația

$$\psi_n(u) = \psi_{n-1}(u)\, \varphi_n(u) = \prod_{j=1,\ldots,n} \varphi_j(u).$$

Șirul s_n este convergent în sensul lui Bernoulli dacă $G_n(a)$ converge către o funcție de repartiție $G(a)$ sau, ceea ce este echivalent, dacă $\psi_n(u)$ converge către o funcție caracteristică $\psi(u)$.

Funcția de repartiție $G(a) = \lim G_n(a)$, ca și $\psi(u) = \lim \psi_n(u)$, nu aparține în general clasei funcțiilor limită definite în capitolul V.

Orice repartiție poate fi obținută ca o limită în acest sens. Pentru a demonstra această afirmație, nu avem decît să considerăm șirul $\{x_n\}$ format astfel

$$x_n = \underset{n\neq k}{f_n(\xi)} = \begin{cases} 1 \text{ pe } E_n' \text{ cu } P(E_n') = 1, \\ \text{alte valori pe } E - E_n' \text{ cu probabilitatea zero,} \end{cases}$$

x_k fiind o variabilă aleatoare cu funcția de repartiție $F_k(a)$.

Vom avea evident

$$\lim_{n\to\infty} G_n(a) = F_k(a), \quad \lim_{n\to\infty} \psi_n(u) = \varphi_k(u),$$

deoarece $\varphi_n(u) = 1$ pentru $n \neq k$.

2. *Normarea sumelor* s_n. Nu convergența acestui șir interesează. Așa cum rezultă din numeroasele probleme puse de experiență, șirurile s_n sînt în general divergente. Pentru ca problema să capete sens, așa cum vom vedea și în cazurile speciale pe care le vom trata, sumele s_n trebuie să fie normate. Cu această completare problema se formulează astfel:

Fiind dat șirul de variabile aleatoare $\{x_n\}$, *să se determine un dublu șir de numere de normare* $\{a_n\}$, $\{\mu_n\}$, *din care ultimele pozitive, astfel ca variabila normată*

$$\sigma_n = \frac{s_n - a_n}{\mu_n}$$

să fie convergentă în sensul lui Bernoulli, deci ca funcția ei caracteristică $\chi(u) = e^{-i\frac{a_n u}{\mu_n}} \psi_n \frac{u}{\mu_n}$ *să conveargă către o funcție caracteristică* $\chi(u)$.

Căutăm condițiile ca $\chi(u)$ să fie o funcție limită în sensul dat la capitolul V.

Notînd

$$x_{nj} = \frac{x_j}{\mu_n} - \frac{a_n}{nb_n},$$

rezultă

$$\sigma_n = \sum_{j=1,2,\ldots,n} x_{nj}.$$

Vom fi în condițiile arătate la capitolul V dacă variabilele x_{nj} tind uniform către zero în sensul lui Bernoulli.

Pentru aceasta, se cere mai mult, cum este evident, și anume ca factorul de normare μ_n să tindă către infinit odată cu n.

Problema astfel pusă a fost rezolvată în întregime de W. Feller, A. Hincin și P. Levy, folosind criteriul de uniformizare al lui Lindeberg.

Rezultatul este că, în general, dacă există convergență, limita, în afară de cazuri de excepție, este gaussiană.

În paragrafele care urmează vom examina această problemă în formele care intervin mai des în aplicații și care sînt fie direct teorema de convergență a lui Liapunov, fie teorema lui Lindeberg.

§ 2. Teoreme de convergență

1. **Teorema lui Moivre-Laplace.** *Dacă fiecare dintre variabilele șirului* $x_n = f_n(\xi)$, $n = 1, 2, \ldots$ *este o variabilă simplă cu valorile 1 și 0 avînd probabilitățile respective* p *și* $q = 1 - p$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left\{\xi \mid \lambda_1 \leqslant \left| \frac{1}{\sqrt{npq}} \left(\sum_{j=1,2,\ldots,n} f_j(\xi) - np \right) \right| < \lambda_2 \right\}\right] = \Phi(\lambda_2) - \Phi(\lambda_1), \tag{1}$$

unde

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx.$$

Demonstrația este implicată în aceea a teoremei lui Liapunov.

Vom observa numai, pentru a stabili o legătură cu teorema numerelor mari, că (1) se mai poate scrie, simplificînd în același timp,

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\lambda_2 \sqrt{\frac{pq}{n}} \leqslant \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1,\ldots,n} x_j - p \right| < \lambda_1 \sqrt{\frac{pq}{n}}\right] = \Phi(\lambda_2) - \Phi(\lambda_1),$$

ceea ce îngăduie a pune, pentru valori mari ale lui n,

$$P\left(x_2 \leqslant \frac{1}{2} \Sigma x_j - p < x_1\right) \approx \Phi\left(\sqrt{\frac{n}{pq}}\, x_2\right) - \Phi\left(\sqrt{\frac{n}{pq}}\, x_2\right), \tag{2}$$

formulă care dă o bună evaluare pentru membrul întîi, așa cum se poate constata fără greutate.

2. **Teorema lui Liapunov.** *Se consideră un șir de variabile aleatoare independente* $\{x_k\}$ *și se presupune că momentele*

$$m_k = M[x_k], \quad \mu_k^2 = M[(x_k - m_k)^2], \quad \rho_k^3 = M[|x_k - m_k|^3]$$

există pentru fiecare k. Dacă notăm

$$m_{(n)} = \sum_{k=1,\dots,n} m_k,\ \mu^2_{(n)} = \sum_{k=1,\dots,n} \mu^2_k,\ \rho^3_{(n)} = \sum_{k=1,2,\dots,n} \rho^3_k,$$

$$s_n = \sum_{k=1,\dots,n} x_k$$

și avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n)}{\mu(n)} = 0,$$

atunci repartiția variabilei

$$\frac{s(n) - m(n)}{\mu(n)}$$

este gaussiană cînd n tinde către infinit.

Această teoremă este implicată de teorema mai generală a lui Lindeberg, după cum vom vedea.

Iată, deocamdată, două aplicații simple ale teoremei lui Liapunov.

a) *Legea limită a frecvenței unei variabile.* Un eveniment A se produce într-o succesiune de experiențe independente cu probabilitățile respective $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ Frecvența evenimentului în experiența de rangul k este variabila x_k, susceptibilă de valorile 1 și 0 cu probabilitățile respective p_k, $q_k = 1 - p_k$.

În acest caz,

$$m_k = p_k,\ \mu^2_k = p_k q_k,\ \rho^3_k = p_k q_k (p_k^2 + q_k^2),$$

$$\mu^2_{(n)} = \sum_k p_k q_k,\ \rho^3_{(n)} = \sum_k p_k q_k (p_k^2 + q_k^2) = \mu^2_n - 2\sum_k p_k^2 q_k^2.$$

Deci,

$$\frac{\rho(n)}{\mu^3_{(n)}} < \frac{1}{\left(\sum_k p_k q_k\right)^2}.$$

Dacă $\sum_k p_k q_k$ este divergentă cînd n tinde către infinit, condiția lui Liapunov este îndeplinită, deci frecvența normată a evenimentului A urmează la limită legea lui Gauss.

Această teoremă este generalizarea imediată a teoremei lui Moivre-Laplace.

b) Dacă variabilele $\{x_k\}$ au aceeași lege de repartiție și există momentele $M[x_k] = m$, $M[(x_k - m)^2] = \mu^2$, $M[|x_k - m|^3] = \rho^3$, atunci variabila

$$\frac{s_n - nm}{\mu\sqrt{n}}$$

este asimptotic gaussiană.

În adevăr, în acest caz

$$m_{(n)} = nm,\ \mu^2_{(n)} = n\mu^2\ \rho^3_{(n)},\ = n\rho^3,$$

deci condiția lui Liapunov este îndeplinită și teorema se aplică.

Să observăm că, pentru demonstrație, se presupune existența momentului de ordinul al treilea, în afară de primele două momente.

Sînt numeroase împrejurările în care nu cunoaștem decît momentele de primele două ordine. În aceste cazuri, se poate aplica:

3. **Teorema lui Lindeberg.** *Presupunem că există primele două momente pentru fiecare dintre variabilele șirului și că $M[x_k] = 0$; notînd*

$$\left.\begin{aligned} \mu^2_k &= M[x_k^2],\ \mu^2_{(n)} = \sum_k \mu^2_k, \\ \lambda^{(\alpha)}_{n,k} &= \frac{1}{\mu^2_{(n)}} \int_{|x|<\alpha\mu_{(n)}} x^2\, \mathrm{d}F_k(x), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

dacă

$$\sum_k \lambda_{n,k}(\alpha) \to 0$$

cînd $n \to \infty$, pentru orice $\alpha > 0$, atunci variabila $\frac{1}{\mu(n)} s_n$ este asimptotic gaussiană.

Vom completa numai acest rezultat cu

Teorema lui Feller, care afirmă că *condiția* (3) *a lui Lindeberg este nu numai suficientă, ci și necesară, pentru normalitatea asimptotică.*

Ne mărginim aici să demonstrăm existența limitei gaussiene în următoarele împrejurări curent întîlnite în fizică. Presupunem că

a) Există o constantă A, astfel încît

$$|f_l(P)| < A. \tag{4}$$

Această mărginire uniformă a variabilelor $f_l(P)$, pentru orice $P \in \Sigma$, este sprijinită pe experiență deoarece mărimile fizice curente atașate unui sistem dat, inclusiv energia, nu depășesc anumite valori care depind de structura sistemului.

b) Există o constantă $B > 0$, astfel că

$$M[(f_l - M(f_l))^2] > B^2. \tag{5}$$

Această ipoteză de uniformitate a componentelor este de asemenea adecvată condițiilor fizice obișnuite.

Vom demonstra următoarea

Teoremă (restrînsă) *Dacă condițiile* a) *și* b) *sînt îndeplinite atunci* $\frac{S_n - M(S_n)}{\mu_{(n)}}$ *este asimptotic gaussiană.*

Notații. Variabilele fiind mărginite, există momente de toate ordinele. Vom folosi momentele de primele trei ordine

$$\left.\begin{aligned} \mu_l^2 &= M[(f_l - M(f_l))^2] \\ \rho_l^3 &= M(|f_l - M(f_l)|^3) \\ \mu_{(N)}^2 &= \sum_l \mu_l^2,\ \rho_{(N)}^3 = \Sigma_l\, \rho_l^3. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Ținînd seamă de (6), găsim imediat

$$\left.\begin{aligned} &\mu_l = k_l A, \quad \frac{B}{A} < k_l < 1 \\ &\rho_l = h_l A, \quad 0 < h_l < 1, \\ &\mu_{(N)} = k_{(N)}\, A\sqrt{N},\ k_{(N)}^2 = \frac{\Sigma k_l^2}{N}, \quad \frac{B}{A} < k_{(N)} < 1 \\ &\rho_{(N)} = h_{(N)}\, A \sqrt[3]{N},\ h_{(N)}^3 = \frac{\Sigma h_l^3}{N}, \quad 0 < h_{(N)} < 1. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Din aceste valori rezultă imediat

$$\frac{\rho_{(N)}}{\mu_{(N)}} = \frac{h_{(N)}}{k_{(N)}} N^{-\frac{1}{2}} < \frac{A}{B} N^{-\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

inegalitate care arată că se poate aplica sumei $G_n(P)$ (§ 1) teorema lui Liapunov pentru $N \to \infty$.

Vom da totuși și demonstrația directă.

Variabilele $G_l(P)$ fiind independente, dacă numim cu $\varphi_l(u)$ funcția caracteristică a variabilei $f_l(P) - M[f_l]$ și cu $\varphi_{(N)}(u)$ funcția caracteristică a variabilei $G_{(N)}(P)$, vom avea

$$\varphi_{(N)}(u) = \Pi \varphi_l\left(\frac{u}{\mu_{(N)}}\right), \tag{9}$$

unde

$$\varphi_l\left(\frac{u}{\mu_{(N)}}\right) = \int_S e^{i\frac{u}{\mu_{(N)}} g_l(P)}\, dP, \tag{10}$$

$\lambda(A)$ fiind probabilitatea respectivă.

Deoarece, pentru orice u real,

$$e^{iu} = 1 + iu - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}\theta u^3 \tag{11}$$

cu

$$0 < |\theta| < 1,$$

vom avea

$$\varphi_l\left(\frac{u}{\mu_{(N)}}\right) = \int_S \left[1 + i\frac{u}{\mu_{(N)}} g_l(P) - \frac{1}{2}\frac{u^2}{\mu_{(N)}^2} g_l^2(P) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\theta \frac{u^3}{\mu_{(N)}^3} g_l^3\right] dP = 1 - \frac{1}{2}\frac{u_l^2}{\mu_{(N)}^2} u^2 +$$

$$+ \frac{1}{3}\theta_l \frac{\rho_l^3}{\mu_{(N)}^3} u^3 = 1 - \omega_{l,N} \tag{12}$$

cu

$$\omega_{l,N} = \frac{1}{2}\frac{\mu_l^2}{\mu_{(N)}^2} u^2 - \frac{1}{3}\theta_l \frac{\rho_l^3}{\mu_{(N)}^3} u^3, \quad |\theta_l| < 1.$$

Să considerăm un Θ oricît de mare, fix, și

$$|u| < \Theta;$$

ținînd seamă de (8), găsim

$$|\omega_{l,N}| < \frac{1}{N}\left(\frac{1}{2}\frac{A^2}{B^2}\Theta^2 + \frac{1}{3}\frac{A^3}{B^3}\frac{\Theta^3}{\sqrt{N}}\right). \qquad (13)$$

Fiind dat $1 > \alpha > 0$, există deci un $N_{\Theta,\alpha}$ astfel că

$$|\omega_{l,N}| < \alpha, \quad N \geqslant N_{\Theta,\alpha}.$$

În aceste condiții,

$$\ln \varphi_{(N)}(u) = \sum \ln \varphi_l\left(\frac{u}{\mu_{(N)}}\right) = \sum \ln (1 - \omega_{l,N}) =$$

$$= -\sum (\omega_{l,N} + \lambda_{l,N}\omega_{l,N}^2)$$

cu

$$0 < \lambda_{l,N} < 1.$$

Avem, mai întîi,

$$\sum \omega_{l,N} = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}\theta'\frac{A^3}{B^3}\frac{u^3}{\sqrt{N}} \qquad (0 < |\theta'| < 1)$$

și apoi

$$\sum_l \lambda_{l,N}\omega_{l,N}^2 = \lambda_N \sum_l \omega_{l,N}^2 \quad (0 < \lambda_N < 1).$$

Dar

$$\lambda_N \sum \omega_{l,N}^2 = \lambda_N \sum\left(\frac{1}{4}\frac{k^4}{k_{(N)}^4}N^{-2}u^2 + \frac{1}{9}\theta_l^2\frac{k_l^6}{k_{(N)}^6}N^{-3}u^3 -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}\theta_l\frac{k_l^2 k_l^3}{k_{(N)}^5}N^{-\frac{5}{2}}u^5\right) = \frac{1}{4}\nu_N'\frac{1}{k_{(N)}^2}N^{-1}u^4 + \frac{1}{9}\nu_N''\frac{k_{(N)}^3}{K_{(N)}^4}N^{-2}u^6 -$$

$$- \frac{1}{3}\nu_N'''\frac{1}{k_{(N)}^3}N^{-\frac{3}{2}}u^5$$

cu

$$0 < \nu_N', \nu_N'', \nu_N''' < 1.$$

Prin urmare,

$$\ln \varphi_{(N)}(u) = -\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}\theta'\frac{A^3}{B^3}N^{-\frac{1}{2}}u^3 - \frac{1}{4}\frac{\nu_N'}{k_{(N)}^2}N^{-1}u^4 +$$

$$+ \frac{1}{3}\frac{\nu_N'''}{k_{(N)}^3}N^{-\frac{3}{2}}u^5 - \frac{1}{9}\frac{\nu_N''}{k_{(N)}^3}N^{-\frac{3}{2}}u^6.$$

Și, în cele din urmă,

$$\ln \varphi_{(N)}(u) = -\frac{1}{2}u^2 + A_N N^{-\frac{1}{2}} \qquad (14)$$

cu

$$A_N = \frac{1}{3}\theta'\frac{A^3}{B^3}u^3 - \frac{1}{4}\frac{\nu_N'}{k_{(N)}^2}N^{-\frac{1}{2}}\mu^4 + \frac{1}{3}\frac{\nu_N'''}{k_{(N)}^3}N^{-1}u^5 -$$

$$- \frac{1}{9}\frac{\nu_N''}{k_{(N)}^5}N^{-1}u^6,$$

$$|A_N| < \frac{1}{3}\frac{A^3}{B^3}\Theta^3 + \frac{1}{4}\frac{A^2}{B^2}N^{-\frac{1}{2}}\Theta^4 + \frac{1}{3}\frac{A^3}{B^3}N^{-1}\Theta^5 + \frac{1}{9}\frac{A^3}{B^3}N^{-1}\Theta^6.$$

Avem deci

$$\varphi_{(N)}(u) = e^{-\frac{1}{2}u^2}e^{A_N N^{-\frac{1}{2}}}. \qquad (15)$$

Dacă N este foarte mare, $\varphi_{(N)}(u)$ este foarte apropiată, pentru u verificînd relația (13), de $e^{-\frac{1}{2}u^2}$, funcție caracteristică a distribuției gaussiene. Rezultă ușor că variabila $G_{(N)}(P)$ este asimptotic gaussiană.

§ 3. O teoremă limită pentru variabile vectoriale

Fie $v_l = v_l(P)$ $(l = 1, 2, \ldots)$ un sistem de vectori definiți pe un cîmp de probabilitate determinat $\{E, \mathcal{K}, P\}$ cu valori în spațiul vectorial euclidian R^p.

Vom pune

$$\omega_l = v_l - M[v_l].$$

Fie $X_{l_1}, X_{l_2}, \ldots, X_{l_p}$ cele p componente ale vectorului $\omega_l(P)$ și

$$\mu_{hk,\,l} = M[X_{lh}X_{lk}]; \quad \rho_{jhk,\,l} = M[|X_{lj}X_{lh}X_{lk}|]].$$
$$(h, k = 1, 2, \ldots, p;\ l = 1, 2, \ldots, N;\ j, h, k = 1, 2, \ldots, p)$$

Vom presupune

$$|X_{lq}| < A \quad (l = 1, 2, \ldots, N;\ q = 1, 2, \ldots, p) \tag{1}$$

și că determinantul $|\mu_{h,k,N}| = d_N$ care va fi definit ulterior și care este pozitiv ca discriminant al unei forme pătratice pozitive nu se apropie de zero. Există, deci, o constantă pozitivă B astfel că

$$d_N > B^{2p}. \tag{2}$$

Vom folosi aceleași notații ca în § 2 al acestui capitol:

$$\left.\begin{aligned} \mu_{hk,\,l} &= k_{hk,\,l}A^2 \quad |k_{hk,\,l}| < 1 \\ \rho_{jhk,\,l} &= h_{jhk,\,l}A^3 \quad |h_{jhk,l}| < 1, \\ \mu_{hk,\,(N)} &= \Sigma\mu_{hk,\,l} = k_{hk,\,(N)}NA^2, \quad |k_{hk,(N)}| < 1 \\ \rho_{jhk,\,(N)} &= \Sigma\rho_{jhk,\,l} = h_{jhk,\,(N)}NA^3, \quad |h_{jhk(N)}| < 1 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Conform definiției,

$$\varphi_l(u) = \varphi_l(u^1, u^2, u^3) = \int_E e^{i\sum_r X_{l,r}u^r}\,dP, \tag{4}$$

unde $u(u^1, u^2, \ldots u^p)$ este un vector avînd componentele $u^1, u^2, \ldots u^p$, E este spațiul și λ probabilitatea corespunzătoare.

Deoarece

$$e^{iX_{l,r}u^r} = 1 + i(X_{l,r}u^r) - \frac{1}{2}(X_{l,r}u^r)^2 + \frac{\theta_l}{3}(X_{l,r}u^r)^3 =$$

$$= 1 + i(X_{l,r}u^r) - \frac{1}{2}(X_{l,h}X_{l,k}u^hu^k) + \frac{\theta_l}{3}(X_{l,j}X_{l,h}X_{l,k}u^ju^hu^k),$$

formula (4) ne dă

$$\varphi_l(u) = 1 - \frac{1}{2}\mu_{hk,\,l}u^hu^k + \frac{1}{3}\theta_l\rho_{jhk,l}u^ju^hu^k, \quad |\theta_l| < 1, \tag{5}$$

unde am suprimat semnul însumării față de indicii $j, h, k = 1, 2, \ldots, p$.

Punem

$$\omega_l(u) = \frac{1}{2}\mu_{h,k,l}u^hu^k - \frac{1}{3}\theta_l\rho_{jhk,\,l}u^ju^hu^k, \tag{6}$$

$$\omega_{(N)}(u) = \Sigma\omega_l = \frac{1}{2}\mu_{hk,(N)}u^hu^k - \frac{1}{3}\theta_l'\rho_{jhk,(N)}u^ju^hu^k. \tag{7}$$

Forma pătratică $\mu_{hk,\,(N)}u^hu^k$ este suma a N forme pătratice strict pozitive după ipotezele noastre, este deci și ea strict pozitivă. Există, prin urmare, o transformare

$$u^r = \alpha^r_{N,s}v^s \tag{8}$$

care aduce forma $\mu_{\ hk,(N)}u^hu^k$ la forma canonică

$$\mu_{hk,\,(N)}u^hu^k \equiv (v^1)^2 + (v^2)^2 + \ldots + (v^p)^2.$$

Dacă notăm cu δ determinantul transformării (8) și punem

$$d_N = |\mu_{hk,\,(N)}|$$

vom avea, conform unei teoreme cunoscute,

$$1 = d_N\delta_N^2. \tag{9}$$

Să observăm, în același timp, că efectuînd transformarea (8) direct în (4), produsul scalar $X_{l,\,r}u^r$ devine

$$X_{l,\,r}u^r = X_{l,\,r}\alpha^r_{N,\,s}v^s = Y_{l,\,s}v^s,$$

dacă punem

$$Y_{l,\,s} = \alpha^r_{N,\,s}X_{l,\,r}, \tag{10}$$

vectorul $\omega_{l,\,N}$, avînd pe $Y_{l,\,s}$, $s = 1, 2, \ldots, p$, drept componente, este transformatul vectorului v_l prin transformarea reciprocă a lui (8):

$$Y_s = \alpha^r_{N,s}X_r. \tag{11}$$

Deoarece din (11) rezultă

$$\sum_1^N{}_l\, Y_{l,\,s} = \alpha^2_{N,\,s}\sum_1^N{}_l\, X_{l,\,r},$$

vectorul $u_N = \sum_l u_{l,\,N}$ se obține din $\omega_N = \Sigma_l\,\omega_l$ prin aceeași transformare.

Vom putea enunța acum teorema limită care se aplică în mecanica statistică pentru sume de mărimi vectoriale.

Dacă punem, folosind notațiile precedente,

$$F_N(\bar{x}) = \text{Prob}\ \{\bar{u}_N < \bar{x}\},$$

unde u_N se obține prin transformarea de normare (11) (normează forma pătratică $\mu_{hk\ (N)} u^h u^k$) din $\omega_{(N)} = \sum_l \omega_l$, iar relația de ordine $u_N < x$ înseamnă că cele p componente ale vectorului sînt respectiv mai mici decît componentele vectorului x, atunci

$$\lim_{N \to \infty} F_N(x) = G(x),$$

$G(x)$ fiind funcția de repartiție p dimensională, normată, a lui Gauss.

Pentru demonstrarea acestei teoreme, prima observație pe care o facem este că expresia funcției caracteristice (4) este aceeași fie că efectuăm asupra componentelor $X_{l,r}$ transformarea (8), fie că efectuăm asupra variabilelor u^r transformarea reciprocă (11). Prin urmare, funcția caracteristică a vectorului $v_{l,N}$ (cu componentele $Y_{l,s}$) este $\varphi_l(\alpha_N u)$.

Deoarece

$$\varphi_{(N)}(v) = \Pi \varphi_l(\alpha_N u), \tag{12}$$

ținînd seamă de (5) și (6)

$$\varphi_{(N)}(v) = \Pi(1 - \omega_l(\alpha_N u)). \tag{13}$$

Potrivit cu (6) și (7) și cu transformările efectuate, vom avea:

$$\sum \omega_l(\alpha_N v) = \frac{1}{2}[(v^1)^2 + \cdots + (v^p)^2] - \frac{1}{3}\theta'_l \rho'_{jhk,\,(N)} v^j v^h v^k,$$

unde

$$\rho'_{jhk,\,(N)} v^j v^h v^k = \rho_{jhk,\,(N)} u^j u^h u^k,$$

în virtutea transformării $u = \alpha_N v$.

Ținînd seamă de notațiile de mai sus, găsim

$$d_N = k_N A^{2p} N^p, \tag{14}$$

unde k_N este determinantul $k_N = |k_{hk,\,(N)}|$.

Potrivit ipotezei noastre, există un C astfel că

$$k_N > C > 0,$$

oricare ar fi N.

Din (14) găsim

$$\delta_N = \frac{1}{k_N} A^{-2p} N^{-\frac{p}{2}}. \tag{15}$$

Coeficienții transformării (8) sînt deci de forma

$$\alpha^r_{N,s} = a^r_{N,s} N^{-\frac{1}{2}} A^{-1},$$

unde $a^r_{N,s}$ sînt uniform limitați,

$$|a^r_{N,s}| < a.$$

Într-adevăr, $\alpha^r_{N,s}$ sînt legați de $\mu_{hk,\,(N)}$ prin relații de forma

$$\mu_{hk,\,(N)} \alpha^h_{N,r} \alpha^k_{N,s} = \delta_{rs} \quad \text{(simbolul lui Kronecker)}.$$

Înlocuind pe $\mu_{hk,\,(N)}$ prin $h_{hk,\,(N)} N A^2$ și punînd

$$\alpha^r_{N,s} = N^{-\frac{1}{2}} A^{-1} a^r_{N,s},$$

rezultă relațiile

$$h_{hk,\,(N)} a^h_{N,r} a^k_{N,s} = \delta_{rs}$$

unde $h_{hk,\,(N)}$ sînt limitați în modul. Deoarece forma pătratică corespunzătoare acestor coeficienți este pozitivă și ireductibilă, relațiile precedente au soluții determinate și mărginite uniform în raport cu N.

Rezultă atunci că

$$\rho_{jhk,\,l} u^j u^h u^k = \rho_{jhk,\,l} \alpha^j_{N,r} \alpha^h_{N,s} \alpha^k_{N,u} v^r v^s v^u =$$

$$= \rho_{jhk,\,l} a^j_{N,r} a^h_{N,s} a^k_{N,u} N^{-\frac{3}{2}} v^r v^s v^u = N^{-\frac{3}{2}} \gamma_{r,s,u,l} v^r v^s v^u.$$

Prin urmare

$$\omega_l(\alpha_N v) = \frac{1}{2} \mu_{hk,\,l} u^h u^k - \frac{N^{-\frac{3}{2}}}{3} \theta_l \gamma_{rsu,\,l} v^r v^s v^u, \tag{16}$$

cu

$$|\gamma_{rsu,\,l}| < \gamma.$$

Cu această formă a lui $\omega_l(\alpha_N v)$, și ținînd seama de faptul că

$$\Sigma\omega_l(\alpha_N v)=\frac{1}{2}\left[(v^1)^2+\cdots+(v^p)^2\right]+N^{-\frac{1}{2}}\delta_{jhk,(N)}v^r v^s v^u,$$

continuăm calculul ca în cazul $p = 1$. Prin urmare,

$$\varphi_N(v) = e^{-\frac{1}{2}[(v_1)^2+\cdots+(v^p)^2]+A_N N^{-\frac{1}{2}}}, \qquad (17)$$

unde A_N este mărginit.

Rezultă

$$\lim_{N\to\infty}\varphi_{(N)}(v) = e^{-\frac{1}{2}[(v_1)^2+\cdots+(v_p)^2]},$$

convergența fiind uniformă în orice domeniu mărginit din spațiul R^p. Teorema este astfel demonstrată.

§ 4. Legi limită pentru frecvența unui eveniment într-un lanț Markov constant

1. *Relația între funcțiile caracteristice ale frecvenței unui eveniment.* Fie $E_1, E_2, \ldots, E_m$ evenimentele a căror succesiune constituie un lanț Markov simplu constant cu probabilitățile de trecere p_{jk}, $j, k = 1, 2, \ldots, m$, satisfăcînd proprietățile

$$p_{jk}\geq 0,\ \sum_k p_{jk} = 1 \quad (j, k = 1, 2, \ldots, m). \qquad (1)$$

Fie $n_1, n_2, \ldots, n_m$ frecvența evenimentelor respective pentru șirurile de n evenimente care încep cu E_h. Vom avea, evident,

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$$

și

$$P_k^{(n)}(n_1, n_2, \ldots, n_m) =$$

$$=\Sigma p_{hj}P_j^{(n-1)}(n_1, n_2, \ldots, n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1}, \ldots, n_m). \qquad (2)$$

Să considerăm ca variabilă aleatoare frecvența unuia dintre evenimente. Pentru simplitatea scrisului, vom presupune că acest eveniment este E_1.

Frecvența evenimentului E_1 este variabila care ia valoarea 1 pentru evenimentul E_1 și valoarea 0 pentru celelalte evenimente.

Funcția caracteristică a abaterii $n_1 - n\theta$ de la valoarea $n\theta$ a acestei variabile este

$$\varphi_h(n, u) = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=1} P_h^{(n)}(n_1, n_2, \ldots, n_m)\, e^{i(n_1-n\theta)u}. \qquad (3)$$

Folosind (2), această relație devine

$$\varphi_h(n, u) = p_{h_1} e^{i(1-\theta)u}\varphi_1(n - 1, u) +$$

$$+\sum_{j=2,3,\ldots,m} p_{hj}\, e^{-i\theta u}\varphi_j(n - 1, u). \qquad (4)$$

Dacă numim cu T transformarea liniară $x' = T_x$, sau explicit

$$x'_h = \sum_k a_{hk}x_k \quad (h, k = 1, 2, \ldots, m) \qquad (5)$$

unde

$$a_{h_1} = p_{h_1} e^{i(1-\theta)u},\ (h = 1, 2, \ldots, m) \qquad a_{hj} = p_{hj} e^{-i\theta u},\ (j = 2, 3, \ldots, m)$$

atunci vectorul $\varphi(n, u)$ de componente $\varphi_1(n, u)$, $\varphi_2(n, u)$, ..., $\varphi_m(n,u)$ se poate scrie

$$\varphi(n, u) = T^n\varphi(1, u) \qquad (6)$$

componentele vectorului $\varphi(1, u)$ fiind

$$\varphi_l(1, u) = p_{l1}e^{i(1-\theta)u} \quad (l = 1, 2, \ldots, m).$$

2. *Valorile proprii ale operatorului* T sînt acele valori ale lui λ pentru care există un vector $Z(z_1, z_2, \ldots, z_m)$, astfel că

$$TZ = \lambda Z. \qquad (7)$$

Ele sînt, prin urmare, cele n rădăcini $\lambda_j(u)$ ale ecuației

$$D(\lambda, u) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \ldots -a_{1m} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \ldots -a_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2}\ \lambda - a_{mm} \end{vmatrix} = 0.$$

Teoremă. *Pentru fiecare* $j = 1, 2, \ldots, m$, avem $|\lambda_j(u)| \leqslant 1$.

Ecuațiile (7) se pot scrie cu ajutorul componentelor vectorului propriu Z corespunzînd rădăcinii λ_j,

$$\sum_k a_{lk} z_k = \lambda_j z_l \quad (l, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Dacă $|z_h|$ este cel mai mare dintre modulele $|z_k|$, vom avea

$$|\lambda_j|\,|zh| \leqslant \sum_k p_{hk} |z_k|,$$

de unde

$$|\lambda_j| \leqslant \sum_j p_{hk} \frac{|z_k|}{|z_h|} \leqslant \sum_k p_{hk} = 1.$$

Teorema este astfel demonstrată.

Cînd $u = 0$, ecuația $D(\lambda, 0) = 0$ are cel puțin o rădăcină egală cu 1. Vom presupune că sistemul de evenimente $E_1, E_2, \ldots, E_m$ este final indecompozabil și că există o singură rădăcină de modul 1. Această rădăcină, pe care o numim $\lambda_1(u)$, este simplă cînd $u = 0$; prin urmare, este simplă și cînd u este suficient de aproape de zero.

3. *Despre iteratele operatorului* T. Să notăm cu A^{hk} minorul elementului $-a_{kh} + \lambda\delta_{kh}$ din determinantul $D(\lambda, u)$. Avem, evident,

$$\Delta(\lambda, u) = \sum_h (-a_{kh} + \lambda\delta_{kh})\, A^{hk}(\lambda). \tag{8}$$

Înlocuind pe λ cu λ_j, rezultă

$$\sum_h a_{kh} A^{hk}(\lambda_j) = \lambda_j A^{kk}(\lambda_j) \quad (k = 1, 2, \ldots m)$$

care reprezintă numai o formă particulară a egalității mai generale

$$\sum a_{kh} A^{hl}(\lambda_j) = \lambda_j A^{kl}(\lambda_j) \quad (k, l = 1, 2, \ldots, m) \tag{9}$$

pentru $j = 1, 2, \ldots, m$.

A doua egalitate, pentru cazul $l \neq k$, rezultă din identitatea

$$\sum (a_{kh} - \lambda\delta_{kh})\, A^{kh}(\lambda) = 0,$$

pentru orice λ, deci și pentru $\lambda = \lambda_j$.

Dacă presupunem că cele m rădăcini sînt distincte, putem scrie identitatea [1]

$$\sum_j \frac{A^{hl}(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)} = \delta^{hl}, \tag{10}$$

unde

$$D'(\lambda_j) = \left[\frac{D(\lambda, u)}{\lambda - \lambda_j}\right]_{\lambda=\lambda_j}.$$

[1] Demonstrația acestei identități se face în modul următor. Fie

$$A(\lambda) = \left\| \frac{A^{kh}}{D(\lambda)} \right\|$$

matricea inversă matricei $a = \| - a_{hk} + \lambda\delta_{hk} \|$. Avem, evident,

$$aA = I, \tag{e$_1$}$$

I fiind matricea unitară. Presupunem că toate rădăcinile ecuației $D(\lambda, u) = 0$ sînt simple. Există atunci o matrice α astfel ca $\alpha^{-1}a\alpha = u$ să fie matricea diagonală:

$$\beta = \| (\lambda - \lambda_j)\, \delta_{jk} \|.$$

Egalitatea (e$_1$) ne dă

$$(\alpha^{-1}a\alpha)\,(\alpha^{-1}A\alpha) = I, \text{ deci } \beta\alpha^{-1}A\alpha = I.$$

Pe de altă parte,

$$\beta^{-1} = \left\| \frac{\delta_{jk}}{\lambda - \lambda_j} \right\|, \text{ deci } A = \alpha\beta^{-1}\alpha^{-1},$$

de unde $(\lambda - \lambda_j)A = \alpha(\lambda - \lambda_j)\beta^{-1}\alpha^{-1}$.

Dar

$$\{(\lambda - \lambda_j)A\}_{\lambda\to\lambda_j} = \left\{ \left\| \frac{A}{\frac{D(\lambda)}{\lambda - \lambda_j}} \right\| \right\}_{\lambda\to\lambda_j} = \left\| \frac{A(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)} \right\|.$$

Dacă notăm cu i_j matricea care are toate elementele nule afară de cel din linia și coloana j care este 1, observăm că $\{(\lambda - \lambda_j)\beta^{-1}\}_{\lambda=\lambda_j} = i_j$. Prin urmare,

$$\left\| \frac{A^{kh}(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)} \right\| = \alpha i_j \alpha^{-1}.$$

Însumînd după j și observînd că $\sum i_j = I$, rezultă

$$\left\| \sum \frac{A^{kh}(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)} \right\| = I.$$

Înmulțind în ambii membri din (10) cu a_{kh}, însumînd în raport cu h și ținînd seamă de (9), găsim

$$a_{kl} = \sum_j \lambda_j \frac{A^{kl}(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)}. \tag{11}$$

Înmulțind în (11) ambii membri cu a_{hk}, însumînd în raport cu k și ținînd seama de (9), obținem

$$\sum_k a_{hk} a_{kl} = \sum_j \lambda_j^2 \frac{A^{hl}(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)}.$$

Continuînd, obținem

$$a_{hl}^{(n)} = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}} a_{hk_1} a_{k_1 k_2}, \ldots, a_{k_{n-1} l} = \sum_j \lambda_j^n \frac{A^{hl}(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)}. \tag{12}$$

De unde

$$\varphi_h = (n, u) = \sum_h a_{hl}^{(n)} = \sum_j \lambda_j^n \frac{\sum_l A^{hl}(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)}. \tag{13}$$

Cînd $u \to \infty$, $\lambda_1(u) \to 1$, iar celelalte rădăcini tind către valori al căror modul este mai mic decît 1, astfel încît pentru u suficient de mic

$$\varphi_h(n, u) = A_h \lambda_1^n(u) + \chi_h(n, u), \tag{14}$$

unde, chiar dacă unele dintre rădăcinile $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ devin egale între ele,

$$\chi_h(n, u) \to 0$$

cînd $n \to \infty$.

În (13) avem

$$A_h(u) = \frac{1}{D'(\lambda_j)} \sum_l A^{hl}(\lambda_1). \tag{15}$$

Se verifică imediat că, din expresia determinantului $D(\lambda, u)$ — calculîndu-l mai întîi prin dezvoltarea sa după elementele coloanei l și apoi după elementele aceleiași coloane, după ce le-am adăugat elementele celorlalte coloane — rezultă

$$A_h(0) = 1. \tag{16}$$

Pe de altă parte, ținînd seama că $\lambda_1(u)$ este rădăcină simplă pentru $u = 0$ și deci că, în vecinătatea acestei valori, $\lambda_1(u)$ este analitică, vom avea

$$\lambda_1(u) = 1 + u\lambda_1'(0) + \frac{1}{2} u^2 \lambda_1''(0) + \cdots$$

Putem scrie, evident,

$$D(\lambda_1, u) = \begin{vmatrix} \lambda_1 e^{i(\theta-1)u} - p_{11} & -p_{12} & -p_{1m} \\ -p_{21} & \lambda_1 e^{i\theta u} - p_{22} & -p_{2m} \\ -p_{m1} & -p_{m2} & -\lambda_1 e^{i\theta u} - p_{mm} \end{vmatrix} = 0. \tag{17}$$

Derivăm în raport cu u și facem $u = 0$. Obținem

$$\lambda_1'(0) = \sum_l P_l - i(1-\theta) P_1 + i\theta \sum_{k=2,\ldots,m} P_l = 0, \tag{18}$$

unde P_l este minorul elementului $\lambda_1 e^{i\theta u} p_{ll}$ după ce facem $u = 0$. Dacă adoptăm pentru θ valoarea determinată

$$\theta = \frac{P_1}{\sum_l P} \tag{19}$$

depinzînd numai de probabilitățile p_{jk} avem după (17), $\lambda_1'(0) = 0$.

Derivăm de două ori în raport cu u în relația (17), în care θ are valoarea dată de (19), și obținem valoarea $\lambda_1''(0)$.

4. *Repartiția limită cînd* $\lambda_1''(0) \neq 0$. Prin împărțirea cu $\sqrt{n}$, normăm abaterea $n_1 - n\theta$. Funcția caracteristică a acestei abateri reduse $\frac{n_1 - n\theta}{\sqrt{n}}$ este

$$\varphi\left(n, \frac{u}{\sqrt{n}}\right) = A_h\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \frac{\lambda_1''(0)}{2} \frac{u^2}{n} + \cdots\right)^n.$$

Cînd $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\left(n, \frac{u}{\sqrt{n}}\right) = e^{\frac{1}{2}\lambda_1''(0) u^2}.$$

Membrul al doilea, limită de funcții caracteristice, are modulul cel mult egal cu 1, pentru orice n. Deci, $\lambda_1''(0) < 0$, dacă bineînțeles condiția $\lambda_1'' \neq 0$ este verificată. De unde

Teoremă. *Frecvența redusă a unui eveniment oarecare dintr-un lanț Markov de evenimente urmează la limită legea lui Gauss, dacă* $\lambda_1''(0) \neq 0$.

5. *Repartiția limită cînd* $\lambda_1''(0) = 0$. Presupunem, ca și în alineatele precedente, că singura rădăcină al cărei modul este 1 este aceea care tinde către 1 cînd u tinde către 0.

Se verifică imediat că, în acest caz, momentul de ordinul al doilea este mărginit, deci $\varphi(n, u)$ reprezintă, cînd n tinde către infinit, funcția caracteristică a unei legi de probabilitate. Aceasta arată că există o rădăcină avînd ca modul unitatea. Aceasta este evident $\lambda_1(u) = 1$.

Din (14) rezultă atunci că funcția caracteristică a abaterii frecvenței $n_1 - n\theta$ este, cînd $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_h(n, u) = \frac{1}{D'(1)} \sum_l A^{1l}(1, u),$$

observînd că $A^{1l}(1, u)$ sînt efectiv funcții de u.

§ 5. Repartițiile lui Gnedenko

1. *Sume de variabile aleatoare independente, cu valori întregi.* Presupunem că toate funcțiile șirului de variabile independente $x_1 = f_1(\xi)$, $x_2 = f_2(\xi)$, ..., $x_n = f_n(\xi)$, ..., au aceeași repartiție:

$$q_l = P[x_n = \alpha + l\delta] \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{1}$$

oricare ar fi n.

Vom presupune cu A. I. Hincin că repartiția (1) are momente absolute de primele cinci ordine

$$M_r = \sum_l |\alpha + l\delta|^r q_l \quad (r = 1, 2, 3, 4, 5),$$

ceea ce înseamnă că funcția caracteristică respectivă

$$\varphi(u) = \sum_{l=0,\pm1,\ldots} q_l e^{i(\alpha + l\delta)u}$$

are derivate de primele cinci ordine

$$\varphi^{(r)}(u) = i^r \sum_l (\alpha + l\delta)^r q_l e^{i(\alpha + l\delta)u}.$$

Suma

$$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

a primelor n variabile va avea și ea valori întregi de forma

$$s_n = n\alpha + L\delta, \quad L = l_1 + l_2 + \ldots + l_n$$

cu $L = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Funcția ei caracteristică este egală cu $[\varphi(u)]^{(n)}$. Prin urmare, dacă punem

$$P_L^{(n)} = P(s_n = n\alpha + L\delta),$$

vom avea

$$P_L^n = \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\delta}}^{\frac{\pi}{\delta}} e^{-iu(n\alpha + L\delta)} [\varphi(u)]^n \, du.$$

O evaluare pe care nu o mai reproducem aici ne dă următorul rezultat

$$P_L^n = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi n\lambda}} e^{-\frac{[n(\alpha - \theta) + \delta L]^2}{2n\lambda}} + \frac{\mu_0 + \mu_1[n(\alpha - \theta) + \delta L]}{n^{\frac{3}{2}}} + \\ + 0\left(\frac{n^{\frac{1}{2}} + [n(\alpha - \theta) + \delta L]^3}{n^{\frac{5}{2}}}\right),$$

unde

$$\theta = M[x_n] = \sum_l (\alpha + \delta l) q_l,$$

$$\lambda = M[x_n - \theta)^2] = \sum_l (\alpha - \theta - \delta l)^2 q_l \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{2}$$

μ_0 și μ_1 fiind constante absolute.

Formule de tipul (2) pot fi de mare utilitate pentru sisteme cuantice în care numărul n al componentelor nu este prea mare, și, prin urmare, nu putem vorbi despre o teoremă limită propriu-zisă și cu atît mai puțin despre o repartiție gaussiană.

2. *Sume de vectori întregi independenți cu coordonate întregi.* Suma

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

a primilor n termeni ai șirului de vectori cu două dimensiuni

$$v_2(x_1, y_1),\ v_2(x_2, y_2),\ \ldots,\ v_n(x_n, y_n),\ \ldots$$

presupuși independenți, avînd aceleași valori, în reprezentare

$$x = \alpha + al + bm,$$

$$y = \beta + cl + dm,$$

$$\delta = ad - bc > 0, \quad (l, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

și aceeași repartiție $P(x_n = \alpha + al + bm,\ y_n = \beta + cl + dm) = p_{lm}$ este de asemenea un vector $S_n(X_n, Y_n)$ ale cărui componente au valori întregi

$$X_n = n\alpha + aL + bM, \quad (L, M = 0, \pm 1, \ldots)$$
$$Y_n = n\beta + cL + dM.$$

Dacă funcția caracteristică comună a vectorilor v_n este

$$\varphi(u, v) = \sum_{lm} p_{l,m}\, e^{i[u(\alpha+al+bm)+v(\beta+cl+dm)]},$$

funcția caracteristică a vectorului S_n este

$$[\varphi(u, v)]^n = \sum_{L,M} p_{LM}^{(n)}\, e^{i[u(n\alpha+aL+bM)+v(n\beta+cL+dM)]}$$

și, prin urmare,

$$P_{LM}^{(n)} = \frac{\delta}{4\pi^2}\int_D e^{-i[u(n\alpha+aL+bM)+v(n\beta+cL+dM)]}[\varphi(u, v)]^n\, du\, dv \qquad (3)$$

unde domeniul de integrare este definit de inegalitățile

$$-\pi < au + cv < \pi,$$

$$-\pi < bu + dv < \pi.$$

Vom pune

$$\theta = M[x_n] = -i\left(\frac{\partial\varphi(u, v)}{\partial u}\right)_{\substack{u=0\\v=0}} = \sum_{l,m}(\alpha + al + bm)\, p_{lm},$$

$$\sigma = M[y_n] = -i\left(\frac{\partial\varphi(u, v)}{\partial v}\right)_{\substack{u=0\\v=0}} = \sum_{l,m}(\beta + cl + dm)\, p_{lm},$$

$$\lambda = M[(x_n - \theta)^2] = \sum_{l,m}(\alpha - \theta + al + bm)^2 p_{lm},$$

$$\mu = M[(y_n - \theta)^2],\ \nu = M[(x_n - \theta)(y_n - \sigma)].$$

Dacă notăm

$$\xi_n = (\alpha - \theta)\, n + aL + bM,$$
$$\eta_n = (\beta - \sigma)\, n + cL + dM,$$

atunci o evaluare asimptotică a formulei (3) ne dă

$$P_{LM}^{(n)} = \frac{\delta}{2n\pi\sqrt{\Delta}}\, e^{-\frac{1}{2n\Delta}\{a\xi_n^2 - 2\nu\xi_n\eta_n + \lambda\eta_n^2\}} + \frac{h + k\xi_n + l\eta_n}{n^2} +$$

$$+ 0\left(\frac{n^{\frac{1}{2}} + |\xi_n|^3 + |\eta_n|^3}{n^3}\right), \qquad (4)$$

unde $\Delta = \lambda\mu - \nu^2 > 0$, h, k, l sînt trei constante.

BIBLIOGRAFIE

P. LAPLACE, *Théorie analytique des probabilités, Oeuvres*, Paris, 1812.

* *Полное собрание сочинений П. Л Чебышева.* Издательство Академии наук СССР, М.Л., 1947.

H. POINCARÉ, *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1912.

S. POISSON, *Lehrbuch der Warscheinlichkeitsrechnung und seine wichtigen Anwendungen*, Braunschweig, 1941.

P. LÉVY, *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1925.

H. CRAMER, *Über eine Eigenschaft der normalen Gesetz*, Math. Zeitschrift, Bd. 41 (1936).

J. V. LINDEBERG, *Eine neue Herleitung der exponenzial Gesetz in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Math. Zeitschrift, Bd. 15 (1922).

P. LÉVY, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, Paris, 1937.
B. de FINETTI, *Sopra le funzioni a incrementi aleatori*, Rendiconti dell'Acad. del Linci, Roma, 1920.
A. I. HINCIN, *Sopra il dominio di attrazione della legge di Gauss*, Giornale Ist. Attuari, 1933.
А. Н. ХИНЧИН, Предельные законы сумм независимых величин, ОНТИ, 1938.
W. FELLER, *Über den zentrale Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Math. Zeitschrift, Bd. 40 (1935) und Bd. 42 (1937).
O. ONICESCU, GH. MIHOC, *Calculul probabilităţilor*, Bucureşti, 1937.
O. ONICESCU, Studii critice şi cercetări, Bucureşti, 1945.
Б. В. ГНЕДЕНКО, КОЛМОГОРОВ Предельные законы для сумм независимых величин, Москва, 1947.
Т. А. САРЫМСАКОВ, Основы теории процессов марков, Москва, 1954.

CAPITOLUL VI

REPARTIŢII POISSON

§ 1. Evenimente rare independente

1. *Studiul repartiţiei cu ajutorul timpului discontinuu. Proces omogen.* Considerăm o desfacere formată din evenimentele $E_n^{k\tau}$, care reprezintă faptul că un anume eveniment elementar se produce de n ori în intervalul de timp $k\tau$ ($\bigcup_{n=0,\,1,\,2,\,\ldots} E_n^{k\tau} = E$; ; $E_n^{k\tau} \cap E_m = \Phi \quad (n \neq m)$).

Vom pune

$$P(E_n^{k\tau}) = p_n^{(k\tau)} (k = 1, 2, \ldots, ; \; n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ceea ce dă, evident,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(k\tau)} = 1.$$

Conform ipotezelor,

$$E_n^{(k+1)\tau} = \bigcup_{r=0}^{n} (E_r^{\tau} \cap E_{n-r}^{k\tau}). \tag{1}$$

Presupunem că evenimentele E_r şi E_{n-r}^{k} corespunzătoare intervalelor succesive τ, $k\tau$ sînt independente. Deci,

$$p_n^{((k+1)\tau)} = \sum_{r=0}^{n} p_r^{(\tau)} p_{n-r}^{\tau}. \tag{2}$$

Prin urmare, dacă introducem funcţia caracteristică

$$\varphi_{k\tau}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(k\tau)} \, e^{inu}, \tag{2}$$

ecuația (2) ne dă imediat

$$\varphi_{k\tau}(u) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(\tau)}\ e^{inu}\right)^k.$$

Presupunem că $t = k\tau$ este dat. Rezultă

$$\varphi_t(u) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n^{\left(\frac{t}{k}\right)}\ e^{inu}\right)^k.$$

Adăugăm următoarea ipoteză

$$p_1^{\left(\frac{t}{k}\right)} = \frac{\omega t}{k} + 0\left(\frac{t}{k}\right), \quad p_2^{\left(\frac{t}{k}\right)} = p_3^{\left(\frac{t}{k}\right)} = \ldots = 0\left(\frac{t}{k}\right)^*,$$

ω fiind fix cînd k variază.

Cu această ipoteză, (4) devine, pentru $k \to \infty$ și t fix,

$$\varphi_t(u) = \lim_{k\to\infty}\left[1 + \frac{\omega t}{k}(e^{iu} - 1)\right]^k = e^{\omega t(e^{iu}-1)}. \tag{5}$$

Am expus acest procedeu care conduce repede la funcția caracteristică a repartiției lui Poisson și deci la probabilitatea

$$p_n(t) = e^{-\omega t}\frac{\omega^n t^n}{n!}$$

ca în intervalul t să se producă n evenimente elementare, deoarece este procedeul originar folosit în această problemă, în genere cunoscut și întrebuințat.

2. *Al doilea procedeu.* Notăm cu $E_m(t)$ evenimentul care constă în producerea în intervalul t a m evenimente elementare și cu $p_m(t) = P(E_m(t))$ probabilitatea corespunzătoare.

Facem următoarele ipoteze

a) independența evenimentelor $E_m(t)$, $E_l(\Delta)$ în intervalele succesive $(0, t)$ și $(t, t + \Delta)$;

b) raritatea evenimentelor

$$p_1(\Delta) = \omega\Delta + O(\Delta),\ p_m(\Delta) = O(\Delta),\ m > 1,$$

$$p_0(\Delta) = 1 - \omega\Delta + O(\Delta).$$

*) Potrivit unei convenții, $O(u)$ este o funcție de u cu proprietatea

$$\lim_{u\to 0}\frac{O(u)}{u} = 0.$$

Din egalitatea

$$E_n(t + \Delta) = \bigcup_r (E_r(\Delta)\, E_{n-r}(t)) \quad (r = 0, 1, \ldots, n)$$

rezultă

$$p_n(t + \Delta) = \sum_{r=0}^{n} p_r(\Delta)\, p_{n-r}(t). \tag{7}$$

Dacă introducem funcția caracteristică

$$\varphi(t, u) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)\, e^{inu}, \tag{8}$$

relația (7) ne arată că

$$\varphi(t + \Delta, u) = \varphi(t,u)\ \varphi(\Delta t, u). \tag{9}$$

Însă, ținînd seama de ipoteza b, obținem

$$\varphi(\Delta t, u) = p_0(\Delta) + p_1(\Delta)\, e^{iu} + 0(\Delta) = 1 + \\ + \omega\Delta(e^{iu} - 1) + 0(\Delta). \tag{10}$$

Prin urmare, (9) ne dă

$$\frac{\varphi(t + \Delta, u) - \varphi(t, u)}{\Delta} = \omega(e^{iu} - 1) + \frac{0(\Delta)}{\Delta},$$

de unde, făcînd $\Delta \to 0$, rezultă ecuația diferențială

$$\frac{\partial\varphi(t, u)}{\partial t} = \omega(e^{iu} - 1)\,\varphi(t, u), \tag{11}$$

a cărei integrală generală are forma

$$\varphi(t, u) = C(u)\, e^{\omega t(e^{iu}-1)}.$$

Din (10) rezultă că $\varphi(0, u) = 1$, de unde $C(u) \equiv 1$, ceea ce dă soluția găsită la §1:

$$\varphi(t, u) = e^{\omega t(e^{iu}-1)}. \tag{12}$$

3. *Ecuațiile diferențiale ale probabilităților* $p_m(t)$. Din (7) făcînd mai întîi $n = 0$, găsim

$$p_0(t + \Delta) = p_0(\Delta)\, p_0(t).$$

Folosind ipoteza b, obținem ecuația

$$\frac{p_0(t+\Delta)-p_0(t)}{\Delta} = -\omega p_0(t),$$

și la limită ecuația

$$\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t} = -\omega p_0(t), \quad t>0,$$

cu condiția inițială, conform cu b, $p_0(0)=1$.

Soluția acestei ecuații este deci

$$p_0(t) = \mathrm{e}^{-\omega t}. \tag{13}$$

Tot (7), pentru $n>0$, ne dă, prin același procedeu, sistemul diferențial

$$\frac{\mathrm{d}p_n(t)}{\mathrm{d}t} = -\omega p_n(t) + \omega p_{n-1}(t), \quad t>0,$$
$$p_n(0) = 0 \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{14}$$

Sistemul de soluții al acestui sistem este

$$p_n(t) = \mathrm{e}^{-\omega t}\frac{\omega^n t^n}{n!} \tag{15}$$

cum se stabilește ușor dacă în (14) facem în prealabil schimbarea

$$p_n(t) = \mathrm{e}^{-\omega t} q_n(t).$$

4. *Proces variabil.* În acest caz trebuie să presupunem că $\omega = \omega(t)$ este *o funcție de* t. În aceste condiții, ecuația diferențială (11) are ca integrală funcția

$$\varphi(t, u) = \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{iu}-1)\int_0^t \omega(s)\,\mathrm{d}s}, \tag{16}$$

iar probabilitățile respective au valoarea

$$p_n(t) = \mathrm{e}^{-\Omega(t)}\frac{\Omega^n(t)}{n!}, \tag{17}$$

unde $\Omega(t) = \int_0^t \omega(s)\,\mathrm{d}s$.

§ 2. Repartiția frecvențelor rare a mai multor evenimente elementare

1. *Condițiile procesului.* Pentru simplificarea scrierii, vom examina mai întîi numai cazul a două evenimente elementare. Evenimentul corespunzător intervalului de timp (t', t'') este $E^{t', t''}_{m_1, m_2}$ [evenimentul e_1 se prezintă de m_1 ori, evenimentul e_2 se prezintă de m_2 ori, în același interval de timp (t', t'')].

Relația fundamentală pentru aceste evenimente este

$$E^{t_0, t+\Delta}_{m_1, m_2} = \bigcup_{\substack{k_1=0,1,\dots,m_1\\ k_2=0,1,\dots,m_2}} (E^{t_0, t}_{k_1, k_2} \cap E^{t, t+\Delta}_{m_1+k_1, m_2+k_2}. \tag{1}$$

De unde, cu notația

$$P(E^{t', t''}_{m_1, m_2}) = p_{m_1, m_2}(t', t''),$$

obținem

$$p^{(t_0, t+\Delta)}_{m_1, m_2} = \sum_{\substack{k_1=0,\dots,m_1\\ k_2=0,\dots,m_2}} p_{k_1, k_2}(t_0, t)\cdot P(E^{t, t+\Delta}_{m_1-k_1, m_2-r_2}/E^{t_0, t}_{k_1 k_2}). \tag{2}$$

Presupunem

$$P(E^{t, t+\Delta}_{h_1, h_2}/E^{t_0, t}_{k_1, k_2}) = P(E^{t, t+\Delta}_{h_1, h_2}); \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} P(E^{t, t+\Delta}_{0,0}) &= 1 - a(t)\,\Delta + \Delta 0(\Delta)\\ P(E^{t, t+\Delta}_{1,0}) &= b(t)\,\Delta + \Delta 0(\Delta)\\ P(E^{t, t+\Delta}_{0,1}) &= c(t)\,\Delta + \Delta 0(\Delta)\\ P(E^{t, t+\Delta}_{1,1}) &= \mathrm{d}(t)\,\Delta + \Delta 0(\Delta) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

și

$$P(E^{t, t+\Delta}_{h,k}) = \Delta 0(\Delta),$$

dacă unul cel puțin dintre indicii h și k este mai mare decît unu.

Observăm, ca și în cazul precedent, că avînd

$$\sum_{h,k=0,1,2,\dots} P(E^{t, t+\Delta}_{h,k}) = 1$$

rezultă

$$a(t) = b(t) + c(t) + d(t), \tag{5}$$

de asemenea,

$$b(t)\geqslant 0,\ c(t)\geqslant 0,\ d(t)\geqslant 0. \tag{6}$$

Vom presupune de asemenea că funcțiile $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ sînt integrabile în intervalul (t_0, T), oricare ar fi T.

2. *Ecuațiile diferențiale ale procesului.* Folosind condițiile (4) și (3) din relația (2), avem la limită, pentru $\Delta \to 0$,

$$\frac{\mathrm{d}p_{m_1,m_2}(t)}{\mathrm{d}t} = -a(t)\,p_{m_1,m_2}(t) + b(t)\,p_{m_1-1,m_2}(t) + c(t)\,p_{m_1,m_2-1}(t) + d(t)\,p_{m_1-1\,m_2-1}(t), \quad (m_1 m_2 = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_{m_1,0}(t)}{\mathrm{d}t} = -a(t)\,p_{m_1 0}(t) + b(t)\,p_{m_1-1,0}(t) \quad (m_1 = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_{0,m_2}(t)}{\mathrm{d}t} = -a(t)\,p_{0,m_2}(t) + c(t)\,p_{0,m_2-1}(t) \quad (m_2 = 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_{0,0}(t)}{\mathrm{d}t} = -a(t)\,p_{0,0}(t). \tag{10}$$

Se demonstrează imediat că există o soluție determinată și unică $p_{m_1,m_2}(t)$ a acestui sistem de ecuații, soluție care verifică condițiile inițiale

$$p_{m_1,m_2}(0) = 0$$

pentru $m_1, m_2 \neq (0, 0)$ și

$$p_{0,0}(0) = 1.$$

Se constată că

$$p_{m_1,m_2}(t) \geqslant 0$$

și că $\sum_{m_1, m_2 = 0, 1, \ldots} p_{m_1,m_2}(t) = 1$. Soluția constituie deci sistemul de probabilități căutat.

3. *Funcția caracteristică.* Prin definiție,

$$\varphi(u_1, u_2; t) = \sum_{m_1 m_2}^{0, 1, \ldots} p_{m_1 m_2}(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_1 u_1 m_1 + \alpha_2 u_2 m_2)} \tag{11}$$

prin derivare în raport cu t,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -a(t) \sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} p_{m,m_2}(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_1 u_1 m_1 + \alpha_2 u_2 m_2)} + b(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1 u_1} \varphi(t) + c(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_2 u_2} \varphi(t) + \mathrm{d}(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)} \varphi(t),$$

adică

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\left[a(t) + b(t)\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1 u_1} + c(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_2 u_2} + \mathrm{d}(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)}] \varphi(t);$$

prin urmare,

$$\varphi(u_1, u_2; t) = \varphi(0)\, \mathrm{e}^{-\int_0^t [a(s) - b(s)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1 u_1} - c(s)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_2 u_2} - \mathrm{d}(s)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)}]\, \mathrm{d}t}.$$

Cum din (11) rezultă că $\varphi(u_1, u_2, 0) = p_{0,0}(0) = 1$ avem în definitiv

$$\varphi(u_1, u_2; t) = \exp\left[-\int_0^t [a(s) - b(s)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1 u_1} - c(s)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_2 u_2} - d(s)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)}]\, \mathrm{d}s\right]. \tag{12}$$

Cu ajutorul acestei formule putem calcula în mod simplu probabilitățile $p_{m_1,m_2}(t)$, care verifică relațiile (7), (8), (9) și (10).

Relația (12) se mai poate scrie, ținînd seamă de (5),

$$\varphi(u_1, u_2; t) = \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1 u_1} - 1)\, \beta(t)}\, \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_2 u_2} - 1)\, \gamma(t)}\, \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)} - 1)\, \delta(t)} \tag{13}$$

cu $\alpha(t) = \int_0^t a(s)\, \mathrm{d}s$ etc.

Cazul mai multor evenimente elementare. Din relația (13) se vede imediat cum se generalizează expresia funcției caracteristice pentru cazul mai multor evenimente elementare:

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_n; t) = \prod_k^m \exp\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_k u_k} - 1\right) \beta_k(t) \prod_{h<k,k} \exp\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_h u_h + \alpha_k u_k)} - 1\right) \beta_{kh}(t) \ldots \exp\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n)} - 1\right) \beta_{12\ldots n}(t), \tag{14}$$

unde am folosit notația $\mathrm{e}^{\alpha} = \exp \alpha$ și

$$\beta_k(t) = \int_{t_0}^t b_k(s)\, \mathrm{d}s,\ \beta_{kh}(t) = \int_t^t b_{kh}(s)\, \mathrm{d}s, \ldots, \beta_{12\ldots n}(t) = \int_{t_0}^t b_{12,\ldots,n}(s)\, \mathrm{d}s.$$

Funcțiile b sînt toate pozitive și mărginite în orice interval t_0, t.

4. *Valorile medii și corelația.* Din (31) rezultă

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)_{u_1=0,\,u_2=0} &= \mathrm{i}\alpha_1(\beta(t)+\delta(t)); \left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)_{u_1=0,\,u_2=0} = \\
&= i\alpha_2(\gamma(t)+\delta(t)) \\
\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}\right)_{u_1=0,\,u_2=0} &= -\alpha_1^2[\beta(t)+\delta(t)] - \alpha_1^2[\beta(t)+\delta(t)]^2 \\
\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}\right)_{u_1=0,\,u_2=0} &= -\alpha_2^2[\gamma(t)+\delta(t)] - \alpha_2^2[\gamma(t)+\delta(t)]^2 \\
\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \delta u_2}\right)_{u_1=0,\,u_2=0} &= -\alpha_1\alpha_2\delta - \alpha_1\alpha_2[\beta(t)+\delta(t)][\gamma(t)+\delta(t)]
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Dacă notăm cu (x_1, x_2) variabila cu două dimensiuni care ia valorile $(\alpha_1 m_1, \alpha_2 m_2)$ $(m_1 = 0, 1, 2, \ldots, m_2 = 0, 1, 2, \ldots)$ vom putea scrie

$$M[x_1] = \alpha_1[\beta(t)+\delta(t)]; \; M[x_2] = \alpha_2[\gamma(t)+\delta(t)] \quad (16)$$

$$M[x_i^2] = \alpha_1^2[\beta(t)+\delta(t)] + \alpha_1^2[\beta(t)+\delta(t)]^2. \quad (17)$$

Deci,

$$\nu_{10} = M[[x_1 - M[x_1]]^2] = \alpha_1^2[\beta(t)+\delta(t)]. \quad (18)$$

În mod analog,

$$\nu_{01} = M[[x_2 - M[x_2]]^2] = \alpha_2^2[\gamma(t)+\delta(t)]. \quad (19)$$

De asemenea,

$$M[x_1x_2] = \alpha_1\alpha_2\delta(t) + \alpha_1\alpha_2[\beta(t)+\delta(t)][\gamma(t)+\delta(t)]. \quad (20)$$

Coeficientul de corelație între aceste două variabile este

$$R = \frac{\delta(t)}{\sqrt{[\beta(t)+\delta(t)][\gamma(t)+\delta(t)]}}. \quad (21)$$

Observații. 1. După cum se vede din formula precedentă, $\delta(t)$ caracterizează corelația între cele două variabile. Dacă $\delta(t) \equiv 0$, ceea ce înseamnă $d(t) \equiv 0$, corelația între x_1 și x_2 este nulă. În acest caz, relația (13) arată că $f(u_1, u_2, t)$ se reduce la

$$f(u_1, u_2; t) = f_1(u_1, t) \cdot f_2(u_2, t) \quad (22)$$

cu

$$f_1(u_1, t) = \exp(e^{i\alpha_1 u_1} - 1)\,\beta(t), \; f_2(u_2, t) = \exp(e^{i\alpha_2 u_2} - 1)\,\gamma(t),$$

deci x_1 și x_2 se comportă ca două variabile independente.

2. *Al doilea caz particular* de reținut este acela în care

$$b(t) = c(t) = 0,$$

deci

$$R(t) = 1.$$

În acest caz, din relația (13) rezultă

$$f(u_1, u_2; t) = \exp(e^{i(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)} - 1)\,\delta(t).$$

Dacă considerăm variabila $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, avem

$$f(u_1, u_2; t) = g(v, t) = \exp(e^{iv} - 1)\,\delta(t);$$

variabilele sînt așa de legate, încît fenomenul se reduce la cel corespunzător unei singure variabile.

Aceste observații asupra cazurilor extreme pot servi în aplicațiile în care se folosește schema de mai sus.

§ 3. O generalizare a procesului Poisson

1. *Definirea procesului.* Presupunem că frecvența unui eveniment elementar, într-un interval $\tau = \frac{t}{k}$, considerată ca variabilă aleatoare, are funcția caracteristică

$$\varphi_\tau(u) = 1 + (\omega\tau + 0(\tau))\,(\psi(u) - 1) \quad (1)$$

unde $\psi(u)$ este o funcție caracteristică.

Funcția caracteristică a frecvenței în intervalul $t = \tau k$ este

$$\varphi_t^{(k)}(u) = [\varphi_\tau(u)]^k = \left[1 + \left[\frac{\omega t}{k} + 0\left(\frac{t}{k}\right)\right](\psi(u) - 1)\right]^k.$$

Dacă $\tau \to 0$, deci $k \to \infty$, astfel ca $t = \tau k$ să rămînă fix, obținem

$$\varphi_t(u) = e^{-\omega t}\, e^{\omega t\, \psi(u)}, \quad (2)$$

care corespunde funcției de repartiție a lui Hincin

$$F(x) = e^{-a} \sum_{k=0,1,\ldots} \frac{\omega^k t^k}{k!}\, \Phi_k(x),$$

unde $\Phi_k(x)$ este definită prin compunerea distribuției $\Phi(x)$, corespunzătoare funcției de repartiție $\psi(u)$, după legea de compoziție

$$\Phi_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{k-1}(\xi)\, d\Phi_1(x - \xi),$$

corespunzătoare adunării variabilelor independente.

După expresia (1) a funcției caracteristice a frecvenței rezultă că numai valoarea zero are o probabilitate care, atunci cînd $\tau \to 0$, rămîne diferită de zero.

2. *Observație.* Este evident că pentru $\psi(u) = e^{iu}$, avem

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0, \\ 1 & x > 1, \end{cases}$$

deci regăsim distribuția clasică a lui Poisson.

Pentru procese variabile în timp, funcția caracteristică limită are forma

$$\varphi_t(u) = e^{-\Omega(t)}\, e^{\Omega(t)\,\psi(u)},$$

unde $\Omega(t)$ este o funcție reală și pozitivă care crește la infinit cu t.

§ 4. Evenimente rare dependente. Cazul unei singure frecvențe

1. *Schema procesului elementar.* Vom nota cu $E_m^{(t_1,t_2)}$ evenimentul care constă în faptul că, în intervalul de timp t_1, t_2, evenimentul elementar se produce de m ori. Vom avea

$$E_m^{0,\,t+\Delta} = \bigcup_{k=0,\,1,\,\ldots,\,m} (E_k^{0,\,t} \cap E_{m-k}^{t,\,t+\Delta}) \quad (t \geqslant 0,\ \Delta \geqslant 0). \tag{1}$$

Notăm

$$P(E_m^{t_1,\,t_2}) = p_m(t_1,\ t_2)$$

și

$$P(E_h^{t,\,t+\Delta} / E_k^{0,\,t}) = p_{kh}(t,\ t+\Delta)$$

lăsînd neînregistrat în această notație momentul inițial 0, pe care-l considerăm fixat o dată pentru totdeauna.

Condițiile procesului elementar de tip Markov sînt următoarele:

$$\left.\begin{aligned} p_{k0}(t,\ t+\Delta) &= 1 - \Delta a_k(t,\ t+\Delta) \\ p_{k1}(t,\ t+\Delta) &= \Delta b_k(t,\ t+\Delta) \\ p_{kh}(t,\ t+\Delta) &= \Delta \cdot 0 \quad (\Delta) \quad (h = 2,\ 3,\ \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

În aceste egalități, funcțiile pozitive $a_k(t,\ t+\Delta)$ și $b_k(t,\ t+\Delta)$ sînt presupuse continue față de argumentul al doilea. Vom nota

$$a_k(t) = \lim_{\Delta \to 0} a_k(t,\ t+\Delta), \quad b_k(t) = \lim_{\Delta \to 0} b_k(t,\ t+\Delta). \tag{3}$$

Se verifică imediat că

$$-\,a_k(t,\ t+\Delta) + b_k(t,\ t+\Delta) = O(\Delta).$$

Prin urmare,

$$b_k(t) = a_k(t). \tag{4}$$

Vom presupune că funcțiile $a_k(t)$ sînt mărginite, deci

$$0 \leqslant a_k\ (t) < a_k \tag{5}$$

în orice interval $(t_0,\ t)$, $t > t_0$.

Cu aceste condiții, relația fundamentală care corespunde lui (1),

$$p_m(t_0,\ t+\Delta) = \sum_0^m p_k(t_0,\ t)\, p_{k,\,m-k}(t,\ t+\Delta), \tag{6}$$

devine

$$\begin{aligned} p_m(t_0,\ t+\Delta) &= p_m(t_0,\ t)\,[1 - \Delta a_m(t,\ t+\Delta)] + \\ &+ p_{m-1}(t_0,\ t)\,\Delta b_{m-1}(t,\ t+\Delta) + \Delta O(\Delta). \end{aligned} \tag{7}$$

Trecînd $p_m(t_0,\ t)$ în membrul întîi, împărțind cu Δ și făcînd $\Delta \to 0$, ceea ce rămîne în membrul al doilea are o limită determinată, deci $\frac{dp_m(t_0,\ t)}{dt}$ există și obținem astfel sistemul de ecuații diferențiale:

$$\frac{dp_m(t_0,\ t)}{dt} = -\,a_m(t)\,p_m(t_0,\ t) + a_{m-1}(t)\,p_{m-1}(t_0,\ t) \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{8}$$

având

$$a_1(t) \equiv 0. \tag{9}$$

Vom scrie acest sistem sub forma

$$\frac{dx_m}{dt} = -\,a_m(t)\,x_m + a_{m-1}(t)\,x_{m-1} \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{10}$$

și vom arăta că el are, în condițiile pe care le vom indica, o soluție determinată pentru orice t și unică, $x_m(t)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, care verifică următoarele condiții inițiale, singurele compatibile cu procesul elementar (2),

$$\left.\begin{aligned} x_m(t_0) &= 0 \quad (m = 1, 2, \ldots) \\ x_0(t_0) &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

2. *Integrarea sistemului* (10). Facem schimbarea sistemului $x_m(t)$ într-un sistem $y_m(t)$, prin relațiile

$$x_m = e^{-\int_{t_0}^{t} a_m(s)\,ds}\, y_m. \tag{12}$$

Obținem sistemul diferențial

$$\frac{dy_m}{dt} = b_{m-1}(t)\, y_{m-1}, \tag{13}$$

unde

$$b_{m-1}(t) = a_{m-1}(t)\; e^{-\int_{t_0}^{t} [a_{m-1}(s) - a_m(s)]\,ds} \qquad (b_1(t) \equiv 0). \tag{14}$$

Odată cu $a_m(t)$, funcțiile $b_m(t)$ sînt și ele integrabile pentru orice t finit. Vom presupune acum că funcțiile $b_m(t)$ sînt uniform mărginite,

$$b_m(t) \leqslant b. \tag{15}$$

Este suficient, pentru aceasta, ca funcțiile $a_m(s)$ să fie necrescătoare cu m,

$$a_m(s) \leqslant a_{m-1}(s). \tag{16}$$

În acest caz,

$$b_m(t) \leqslant a_m(t) \leqslant a(t) \leqslant a.$$

Din (13) rezultă, ținînd seamă de (11),

$$y_m = \int_{t_0}^{t} b_{m-1}(s_1)\,ds_1 \int_{t_0}^{s_1} b_{m-2}(s_2)\,ds_2 \ldots \int_{t_0}^{s_{m-1}} b_0(s_m)\,ds_m. \tag{17}$$

Deci folosind (15), obținem

$$0 \leqslant x_m(t) \leqslant y_m(t) \leqslant \frac{b^m (t - t_0)^m}{m!}. \tag{18}$$

Suma $S(t) = \sum_0^\infty{}_m\, x_m(t)$ este deci absolut și uniform convergentă. Din (10) rezultă că $S'(t) = 0$. Cum, pe de altă parte, $S(0) = 1$, vom avea $S(t) = 1$.

Putem deci pune

$$p_m(t_0, t) = p_m(t) = x_m(t) =$$

$$= e^{-\int_{t_0}^{t} a_m(s)\,ds} \int_{t_0}^{t} b_{m-1}(s_1)\,ds_1 \int_{t_0}^{s_1} b_{m-2}(s_2)\,ds_2 \ldots \int_{t_0}^{s_{m-1}} b_0(s_m)\,ds_m \tag{19}$$

și cu aceasta problema este în întregime rezolvată.

3. *Funcția caracteristică a repartiției precedente* este reprezentată de seria absolut și uniform convergentă

$$\varphi(u, t) = \sum_0^\infty{}_m\, p_m(t)\, e^{imu} \tag{20}$$

care este o funcție periodică cu perioada 2π.

Observăm că

$$p_0(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}.$$

Această funcție descrește necontenit, începînd de la valoarea 1 (pentru $t = t_0$), deoarece $a(s) \geqslant 0$. Deci $\int_{t_0}^{\infty} a(s)\,ds$ crește indefinit. Dacă $\int_{t_0}^{\infty} a(s)\,ds = \alpha$, dar $e^{-\alpha} \leqslant \frac{1}{2}$, există un $t = t_1$ astfel că $p(t_1) = \frac{1}{2}$. Dacă $e^{-\alpha} > \frac{1}{2}$, atunci $p(t) > \frac{1}{2}$ pentru orice t.

Cu aceste notații, putem enunța imediat teorema care urmează.

Teoremă.

$$\varphi(u, t) \neq 0 \tag{21}$$

pentru $t_0 \leqslant t \leqslant t_{\frac{1}{2}}$, *oricare ar fi* u.

Pentru demonstrație vom scrie

$$\varphi(u, t) = p_0(t)\left[1 + \frac{1}{p_0(t)} \sum_1^\infty{}_m\, p_m(t)\, e^{imu}\right]. \tag{22}$$

Observăm imediat că

$$\left|\frac{1}{p_0(t)}\sum_1^\infty{}_m\, p_m(t)\, e^{im\xi}\right| \leqslant \frac{1-p_0(t)}{p_0(t)} < 1 \tag{23}$$

dacă

$$p_0(t) > \frac{1}{2},$$

deci $t < t_{\frac{1}{2}}$. Combinînd (23) cu (21) rezultă că

$$\varphi(u, t) \neq 0$$

dacă $t < t_{\frac{1}{2}}$.

Pentru a arăta că (21) este valabilă și pentru $t = t_{\frac{1}{2}}$ cînd avem $p_0(t_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$, observăm că $p_1(t_{\frac{1}{2}}) < \frac{1}{2}$, deoarece nu putem avea în nici un caz $p_1(t_{\frac{1}{2}}) > \frac{1}{2}$, iar presupunerea $p_1(t_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$ ar atrage $p_2(t_{\frac{1}{2}}) = \ldots = p_m(t_{\frac{1}{2}}) = \ldots = 0$, ceea ce este exclus, dată fiind forma (19) a funcțiilor $p_m(t)$, în afară de cazul în care

$$a_1(t) = 0$$

cînd, potrivit cu (19),

$$0 \equiv p_2(t) = p_3(t) = \ldots$$

Acest caz și altele similare vor fi studiate separat.

Prin urmare, $p_0(t) = \frac{1}{2} > p_1(t_{\frac{1}{2}})$. Observăm atunci că

$$p_0(t_{\frac{1}{2}}) + p_1(t_{\frac{1}{2}})\, e^{iu} \neq 0,$$

deoarece

$$|\, p_0(t_{\frac{1}{2}}) + p_1(t_{\frac{1}{2}})\, e^{iu}\,| \geqslant p_0(t_{\frac{1}{2}}) - p_1(t_{\frac{1}{2}}) > 0. \tag{24}$$

În expresia

$$\varphi(u, t_{\frac{1}{2}}) = [p_0(t_{\frac{1}{2}}) + p_1(t_{\frac{1}{2}})\, e^{iu}]\left[1 + \frac{1}{p_0(t_{\frac{1}{2}})\, e^{iu} p_1(t_{\frac{1}{2}})}\sum_2^\infty{}_m\, p_m\, e^{imu}\right],$$

avem

$$\left|\frac{\sum_2^\infty{}_m\, p_m\, e^{imu}}{p_0(t_{\frac{1}{2}}) + p_1(t_{\frac{1}{2}})\, e^{iu}}\right| < \frac{1-p_0(t_{\frac{1}{2}}) - p_1(t_1)}{p_0(t_{\frac{1}{2}}) - p_1(t_{\frac{1}{2}})} = 1.$$

Inegalitatea fiind strictă, rezultă că

$$\varphi(u, t_{\frac{1}{2}}) \neq 0.$$

Din această proprietate rezultă următoarea:

Teoremă. *Pentru* $t \leqslant t_{\frac{1}{2}}$, *avem*

$$\varphi(u, t) = \frac{\varphi_1(u_1, t)}{\varphi_2(u_2, t)},$$

unde φ_1 *și* φ_2 *sînt două funcții pozitive definite pentru* $t \leqslant t_{\frac{1}{2}}$.

4. *Cazuri particulare.*

1°. $a_1(t) = 0$.

Ecuațiile (8) devin

$$\frac{dp_0}{dt} = -a_0(t)\, p_0(t); \quad \frac{dp_1}{dt} = a_0(t)\, p_0(t); \quad \frac{dp_m}{dt} = 0 \quad (m = 2, 3, \ldots).$$

Deci

$$p_m(t) = p_m(0) = 0 \quad (m = 2, 3, \ldots).$$

Va trebui să avem

$$e^{-\int_{t_0}^t a_0(s)\, ds} + \int_{t_0}^t a_0(s)\, e^{-\int_{t_0}^s a_0(u)\, du}\, ds = 1,$$

ceea ce se verifică ușor.

În acest caz,

$$\varphi(u, t) = p_0(t) + p_1(t) e^{iu},$$

unde $\varphi(u, t) = 0$ numai pentru $t = t_{\frac{1}{2}}$ și $u = 0$ sau π.

2°. $a_0(t) \geqslant 0$, $a_1(t) \geqslant 0$, $a_2(t) = 0$.

Ecuațiile (8) devin

$$\frac{dp_0}{dt} = -a_0 p_0; \quad \frac{dp_1}{dt} = -a_1 p_1 + a_0 p_0; \quad \frac{dp_2}{dt} = a_1 p_1 \tag{25}$$

$$p_3 = p_4 = \cdots \equiv 0,$$

$$p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) = 1.$$

Funcția caracteristică devine

$$\varphi(u, t) = p_0(t) + e^{iu} p_1(t) + e^{2iu} p_2(t).$$

Știm că, pentru $t < t_{\frac{1}{2}}$, avem $f(u, t) \neq 0$.

Se verifică imediat că, pentru $t > t_{\frac{1}{2}}$, există cazuri în care $\varphi(u, t) = 0$.

Avem pentru aceasta ecuațiile

$$p_0 + p_1 \cos u + p_2 \cos 2u = 0; \; p_1 \sin u + p_2 \sin 2u = 0,$$

care dau pentru $u = \pi$ condiția

$$p_1 = p_0 + p_2 = 1 - p_1,$$

deci $p_1 = \frac{1}{2}$, a cărei realizare depinde de funcțiile $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$.

Pentru $\sin u \neq 0$, cele două ecuații se înlocuiesc cu

$$p_1 + 2p_2 \cos u = 0, \; p_0 = p_2,$$

a cărei realizare depinde de asemenea de funcțiile $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$.

3°. Dacă, în cazul de mai sus, a_0, a_1, a_2 sînt constante, soluțiile sistemului (25) sînt

$$p_0(t) = e^{-a_0(t-t_0)}$$

$$p_1(t) = \frac{a_0}{a_1 - a_0}[e^{-a_0(t-t_0)} - e^{-a_1(t-t_0)}],$$

$$p_2(t) = \frac{a_0 a_1}{a_1 - a_0}\left[\frac{1}{a_0}[e^{-a_0(t-t_0)} - 1] - \frac{1}{a_1}(e^{-a_1(t-t_0)} - 1)\right].$$

Aceste expresii simple permit examinarea efectivă a realizării cazurilor găsite mai sus.

5. În general, dacă avem $a_k(t) \equiv 0$, va rezulta din condițiile inițiale că $p_{k+1}(t) \equiv 0$, $p_{k+2}(t) \equiv 0$, ..., prin urmare funcția caracteristică se reduce la un polinom

$$\varphi(\xi, t) = \underset{(p_0 + p_1 + \cdots + p_k = 0)}{p_0(t) + e^{i\alpha\xi} p_1(t) + \cdots + e^{ik\alpha\xi} p_k(t)},$$

Putem da astfel o interpretare simplă și aplicații schemelor care conduc la astfel de polinoame.

§ 5. Cazul mai multor frecvențe

Schema procesului și ecuațiile diferențiale pentru două evenimente elementare. Se concepe ușor un proces de emisiune de mai multe tipuri de particule. Dacă între ele nu există nici o

corelație, procesele se examinează pentru fiecare tip de particulă, independent de celelalte. Vom presupune că există o corelație și că avem de-a face numai cu două tipuri de particule.

Vom avea astfel

$$E_{m,n}^{t_0, t+\Delta} = \bigcup_{\substack{h=0,1,\ldots,m \\ k=0,1,\ldots,n}} [E_{h,k}^{t_0, t} \cap E_{m-h, n-k}^{t, t+\Delta}]. \tag{1}$$

Deci, punînd

$$p_{m,n}(t_0, t) = P[E_{m,n}^{t_0, t}],$$

relația (1) dă

$$p_{m,n}(t_0, t+\Delta) = \sum_{\substack{h=0,1,\ldots,m \\ k=0,1,\ldots,n}} p_{h,k}(t_0, t) P[E_{m-h, n-k}^{t, t+\Delta} / E_{h,k}^{t_0, t}]. \tag{2}$$

Vom da, ca și în paragrafele precedente, regulile procesului elementar:

$$\left.\begin{aligned}
&P[E_{0,0}^{t, t+\Delta} / E_{h,k}^{t_0, t}] = 1 - a_{hk}(t, t+\Delta)\,\Delta, \\
&P[E_{1,0}^{t, t+\Delta} / E_{h,k}^{t_0, t}] = b_{hk}(t, t+\Delta)\,\Delta, \\
&P[E_{0,1}^{t, t+\Delta} / E_{h,k}^{t_0, t}] = c_{hk}(t, t+\Delta)\,\Delta, \\
&P[E_{1,1}^{t, t+\Delta} / E_{h,k}^{t_0, t}] = d_{hk}(t, t+\Delta)\,\Delta, \\
&P[E_{r,s}^{t, t+\Delta} / E_{h,k}^{t_0, t}] = \Delta 0(\Delta) \text{ pentru } r \geqslant 1, \; s > 1; \; r > 1, \; s \geqslant 1
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Se verifică și aici imediat că

$$a_{hk}(t, t+\Delta) = b_{hk}(t, t+\Delta) + c_{hk}(t, t+\Delta) + d_{hk}(t, t+\Delta) + 0(\Delta).$$

Presupunem toate aceste funcții continue de argumentul al doilea, oricare ar fi t, și punem $a_{hk}(t, t) = a_{hk}(t)$ etc., ceea ce ne dă

$$a_{hk}(t) = b_{hk}(t) + c_{hk}(t) + d_{hk}(t). \tag{4}$$

Folosind condițiile (3) în relația (2), divizînd cu Δ și trecînd la limită, obținem sistemul

$$\frac{dp_{m,n}(t)}{dt} = -a_{m,n}(t)\, p_{m,n}(t) + b_{m-1,n}(t) p_{m-1,n}(t) + c_{m,n-1}(t)\, p_{m,n-1}(t) + d_{m-1,n-1}(t)\, p_{m-1,n-1}(t). \tag{5}$$

Se demonstrează, ca mai sus, că acest sistem admite, în condiții care se pot caracteriza ușor urmînd procedeele de mai sus, o soluție unică și determinată $p_{m,n}(t_0, t) = p_{m,n}(t)$, $t > t_0$, (acesta din urmă fixat o dată pentru totdeauna), cu condițiile inițiale $p_{0,0}(t_0, t_0) = 1$, $p_{m,n}(t_0, t_0) = 0$ pentru $m \geqslant 0$, $n > 0$, sau $m > 0$, $n \geqslant 0$.

Funcțiile $p_{m,n}(t)$ corespund corelației și au în aplicații un rol deosebit de important. Dacă toate aceste funcții sînt nule, evenimentele elementare sînt independente între ele în sensul procesului de mai sus.

Dacă presupunem existența unei corelații între evenimentele elementare, va fi în general suficient să presupunem numai că $d_{0,0}(t) \neq 0$.

§ 6. Probabilitățile limită ale unui proces Markov cu evenimente rare. Funcțiile caracteristice ale lui Mihoc

1. *Definirea unui lanț Markov cu evenimente rare.* Fie E_1, E_2, ..., E_m o desfacere a mulțimii E din cîmpul de probabilitate $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ și un proces în lanț Markov simplu definit prin probabilitățile de trecere $p_{jh}(\tau)$, funcții continue de intervalul de timp τ, propriu lanțului.

În afară de condițiile generale

$$p_{jh}(\tau) \geqslant 0, \sum_h p_{jh}(\tau) = 1, \tag{i}$$

mai presupunem că

$$p_{j1}(\tau) = \omega_j \tau + 0(\tau); \; 0 \leqslant \omega_j < 1 \quad (j = 2, 3, \ldots, m) \tag{ii}$$

fără ca toate valorile ω_j să fie nule.

Întrucît ne interesează frecvența evenimentului E_1, considerăm variabila aleatoare care pentru E_1 ia valoarea 1 și pentru celelalte evenimente ia valoarea 0. Această variabilă va putea lua, într-o succesiune de n operații, valorile 0, 1, ... ,n.

Funcția caracteristică respectivă $\varphi_k(n, u)$ verifică relația funcțională

$$\varphi_k(n, u) = p_{k1} e^{iu} \varphi_1(n-1, u) + \sum_{h=2,3,\ldots,m} p_{kh} \varphi_h(n-1, u). \tag{1}$$

Presupunem că ecuația caracteristică $D(\lambda, 0) = 0$ are ca unică rădăcină de modul 1 rădăcina $\lambda = 1$. În acest caz,

$$\varphi_k(n, u) = A_k(u) \lambda_1^n(u) + B_k(n, u), \tag{2}$$

unde $\lambda_1(u)$ este rădăcina ecuației $D(\lambda, u) = 0$, care tinde către 1 cînd u tinde către 0, iar $B_k(n,u)$ tinde către 0 cînd n tinde către infinit, oricare ar fi u.

Ținînd seamă de faptul că $p_{jk} = p_{jk}(\tau)$, $A_k(u)$, $B_k(n, u)$ cît și $\lambda_1(u)$ sînt funcții de τ. Vom face $\tau = \frac{1}{n}$. Cînd $n \to \infty$ găsim, cu Gh. Mihoc

$$\lim_{n\to\infty} A_1(u) = \frac{1 - p_{11}(0)}{1 - e^{iu} p_{11}(0)}, \quad \lim_{k \neq 1} A_k(u) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_1^n(u) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n^1\left(u, \frac{t}{n}\right) = e^{-kt \frac{1-e^{iu}}{1-p_{11}(0)\, e^{iu}}}.$$

Ajungem astfel la funcțiile caracteristice obținute de Koopman pentru cazul unui lanț cu două evenimente,

$$\varphi_1(u) = \frac{1-l}{1-l\, e^{iu}} e^{-kt \frac{1-e^{iu}}{1-l\, e^{iu}}}, \tag{3}$$

$$\varphi_j(u) = e^{-kt \frac{1-e^{iu}}{1-l\, e^{iu}}} \quad (j = 2, 3, \ldots, m) \tag{4}$$

cu $l = p_{11}(0) \leqslant 1$ și $k = \frac{\sum \omega_j c_j}{\sum c_j}$.

Dacă presupunem că, odată cu E_1, sînt rare și evenimentele $E_2, E_3, \ldots, E_h$, ceea ce se exprimă prin condițiile

$$p_{jl}(\tau) = \omega_{jl}\tau + 0(\tau) \quad (l = 1, 2, \ldots, h; \; j = h+1, \; h+2, \ldots, m) \quad h < m, \tag{iii}$$

același procedeu ne conduce [1] la distribuții limită ale căror funcții caracteristice sînt

$$\varphi_1(u) = \frac{1}{1 - l\,e^{iu}}\, e^{-kt\frac{1-e^{iu}}{1-l\,e^{iu}}},$$
$$k = 2, 3, \ldots, h$$

$$\varphi_r(u) = e^{-kt\frac{1-e^{iu}}{1-l\,e^{iu}}},$$
$$(r = h+1, h+2, \ldots, m)$$

unde a, b, c, d, A, B, C, D sînt constante depinzînd de p_{jk} sau derivatele lor cînd $\tau \to 0$.

Pentru distribuțiile limită obținute în cazul lanțurilor multiple trimitem la lucrările lui Gh. Mihoc citate la sfîrșitul acestui capitol.

2. *Asupra naturii distribuțiilor limită.* Distribuțiile precedente sînt rezultatul compunerii distribuțiilor discontinue

$$\psi_1(u) = e^{-kt\frac{1-e^{iu}}{1-l\,e^{iu}}}, \quad \psi_2(u) = \frac{1-l}{1-l\,e^{iu}}$$

și

$$\psi_3(u) = 1 - l + le^{iu}$$

prin urmare, ele sînt însele discontinue și ca atare, eventual, de natură cuantică.

Pentru $t \to \infty$, aceste distribuții *degenerează*. Pentru intervalul $t = 0$ în cazul (3), de exemplu, $\varphi_1(u)$ este o distribuție semnificativă

$$\psi_1(u) = (1 - l)\,(1 + le^{iu} + l^2e^{2iu} + \cdots),$$

iar $\varphi_k(u) = 1$, pentru $k = 2, 3, \ldots$.

Această din urmă valoare corespunde faptului că, dacă la momentul inițial avem unul dintre evenimentele curente, nu putem trece într-un interval foarte mic în evenimentul rar. Frecvența lui își păstrează valoarea zero.

[1] A se vedea GH. MIHOC, *Legea evenimentelor rare pentru lanțurile Markov*, Bul. Științific, Acad. R.P.R., T. 4, 1952.

Dacă însă sîntem în evenimentul rar, într-un cît de mic interval de timp el poate avea, cu probabilități egale, respectiv frecvențele

$$1 - l,\ (1 - l)\,l,\quad (1 - l)\,l^2, \ldots$$

0, 1, 2, ...

În cazul mai multor evenimente rare, frecvența evenimentului E_1 depinde de evenimentul inițial și pentru $t = 0$ se comportă așa cum arată (4).

BIBLIOGRAFIE

R. de MISES, *Uber die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse*, Zeitschrift für angewandte, Math. Bd. 1, 1921.

B. de FINETTI, *Sulla possibilità di valori eccezional per una legge a incrementi aleatori*, Rendiconti dell'Acad. dei Lincei, Bd. 10, 1929.

A. HINCIN, *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Ergebnisse der Math., Springer, Berlin, 1933.

B. D. KOOPMAN, *A Law of smal Numbers în Markov Chains*, Trans. Ann. Mat. Soc., t. 70. 1951.

GH. MIHOC, *Legea evenimentelor rare pentru lanțurile Markov*, Bul. științific Ac. R.P.R. t. 4. 1952.

GH. MIHOC, *Extinderea legii lui Poisson pentru lanțurile Markov, multiple și omogene*, Bul. științific Ac. R.P.R., t. V. 1954.

O. ONICESCU și GH. MIHOC, *Les chaînes de variables aleatoires. Proasymptotiques*, Ac. Română, București, 1934.

A. RÉNYI, *On some Problems Concerning Poisson Processes*, Publ. mat. Budapest, t. 2, nr. 1, 1951.

CAPITOLUL VII

PROCESE STOCHASTICE DE PROPAGARE ÎN TIMP CONTINUU. TEORIA ANALITICĂ

§ 1. Procese cu un număr finit sau numărabil de stări

1. *Ecuația funcțională fundamentală.* Un lanț Markov este un proces discontinuu, determinat de probabilitățile elementare $p_{jk}(n, n+1)$ pentru $n = 1, 2, \ldots, \infty$. Probabilitățile de trecere $p_{jk}(l, n)$, $n \geqslant 1$, verifică relațiile

$$p_{jk}(l, n) = \sum_h p_{jh}(l, u)\, p_{hk}(u, n) \tag{1}$$

pentru orice u întreg verificînd relațiile

$$l \leqslant u \leqslant n.$$

Cu ajutorul probabilităților elementare și a relațiilor (1) se construiesc oricare dintre probabilitățile $p_{jk}(m, n)$.

Procesul continuu, cu probabilitatea $p_{jk}(s, t)$, $s \leqslant t (j, k = 1, 2, \ldots, m)$, reprezentînd probabilitatea de trecere de la evenimentul $E_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ în momentul s la evenimentul $E_k (k = 1, 2, \ldots, m)$ în momentul ulterior t, este caracterizat, principial, prin relația funcțională

$$p_{jk}(s, t) = \sum_h p_{jh}(s, u)\, p_{hk}(u, t), \tag{2}$$

unde $(j, h, k = 1, 2, \ldots, m)$, $s \leqslant u \leqslant t$, și prin probabilitățile elementare

$$p_{jk}(s, s + \Delta) = \delta_{jk} + \Delta a_{jk}(s, \Delta). \tag{3}$$

În această din urmă relație,

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0 & k \neq j, \\ 1 & k = j. \end{cases} \tag{4}$$

Funcțiile $a_{jk}(s, \Delta)$ sînt continue în s și Δ pentru $s \leqslant u \leqslant T$, iar pentru Δ în vecinătatea pozitivă a lui $\Delta = 0$, și satisfac în plus inegalitățile

$$a_{jk} \begin{cases} \geqslant 0 & k \neq j \\ \leqslant 0 & k = j \end{cases}; \quad \sum_k a_{jk}(s, t) = 0 \quad (j, k = 1, 2, \ldots, m). \tag{5}$$

Aceste inegalități corespund faptului că $p_{jk}(s, t)$ constituie un sistem de probabilități complet

$$0 \leqslant p_{jk}(s, t) \leqslant 1; \quad \sum_k p_{jk}(s, t) = 1. \tag{6}$$

Reamintim, în sfîrșit, că evenimentele $E_1, E_2, \ldots, E_m$ constituie o desfacere a evenimentului total E.

2. *Ecuațiile diferențiale ale lui Kolmogorov.* Din relația (3) rezultă, în particular,

$$p_{jk}(s, s) = \delta_{jk}.$$

Relația (2) se poate scrie

$$p_{jk}(s, t + \Delta) = \sum_h p_{jh}(s, t)\, p_{hk}(t, t + \Delta).$$

Avem, în același timp,

$$p_{jk}(s, t) = \sum_h p_{jh}(s, t)\, p_{hk}(t, t).$$

Din aceste două egalități, folosind relația (3), obținem

$$p_{jk}(s, t + \Delta) - p_{jk}(s, t) = \Delta \sum_h p_{jh}(s, t)\, a_{hk}(t, \Delta).$$

Deoarece $a_{hk}(t, \Delta)$ este continuă față cu Δ, dacă punem

$$a_{hk}(t, 0) = a_{hk}(t)$$

putem divide cu Δ și trece la limită pentru $\Delta \to 0$, ceea ce ne conduce la ecuațiile

$$\frac{\partial p_{jk}(s, t)}{\partial t} = \sum_h p_{jh}(s, t)\, a_{hk}(t), \quad s < t. \tag{7}$$

Funcțiile $p_{jk}(s, t)$ sînt deci soluțiile sistemului diferențial al lui Kolmogorov

$$\frac{\mathrm{d}\, \Pi_k(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_h \Pi_h(t)\, a_{hk}(t), \quad t > s, \tag{8}$$

cu condițiile limită

$$\Pi_k(s) = \delta_{jk} \quad (j, h, k = 1, 2, \ldots, m). \tag{8'}$$

De asemenea, din (2) și (3), obținem

$$p_{jk}(s + \Delta, t) - p_{jk}(s, t) = -\Delta \sum_h a_{jh}(s, \Delta)\, p_{hk}(s + \Delta, t).$$

De unde, dacă presupunem continuitatea funcțiilor $p_{hk}(s, t)$ față de variabila s, rezultă derivabilitatea acestor funcții față de s, și anume sistemul diferențial

$$\frac{\partial p_{jk}(s, t)}{\partial s} = -\sum_h a_{jh}(s)\, p_{hk}(s, t).$$

Funcțiile $p_{jk}(s, t)$ sînt, prin urmare, și soluțiile sistemului al doilea diferențial al lui Kolmogorov,

$$\frac{\mathrm{d}\theta_j(s)}{\mathrm{d}s} = -\sum_h a_{jh}(s)\, \theta_h(s), \quad s < t, \tag{9}$$

cu condițiile limită

$$\theta_j(t) = \delta_{jk}. \tag{9'}$$

Putem deci enunța următoarea

Teoremă. *Un proces stochastic continuu $p_{jk}(s, t)$, care verifică relațiile* (2) *și* (3) *într-un interval $T_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, satisface, în același interval, ca funcție de t, sistemul* (8), (8'), *iar ca funcție de s, sistemul* (9), (9').

3. *Integrarea sistemelor* (8) și (9). În ipoteza continuității funcțiilor $a_{hk}(t)$, din relațiile (8) și (8') rezultă prin integrare

$$\Pi_k(t) = \Pi_k(s) + \int_s^t \sum_h \Pi_h(u_1)\, a_{hk}(u_1)\, \mathrm{d}u_1.$$

Înlocuind sub integrala din membrul al doilea funcțiile $\Pi_h(u_1)$ date de aceeași relație, trecem la

$$\Pi_k(t) = \Pi_k(s) + \sum_{h_1} \Pi_{h_1}(s) \int_s^t a_{h_1 k}(u_1)\, \mathrm{d}u_1 +$$

$$+ \sum_{h_1 h_2} \int_s^t \mathrm{d}u_1 \int_s^{u_1} \Pi_{h_2}(u_2)\, a_{h_2 h_1}(u_2)\, a_{h_1 h}(u_1)\, \mathrm{d}u_2.$$

Continuînd în acest mod, găsim prin n iterații succesive

$$\Pi_k(t) = \Pi_k(s) + \sum_{h_1} \Pi_{h_1}(s) \int_s^t a_{h_1 k}(u_1)\, \mathrm{d}u_1 +$$

$$+ \sum_{h_1 h_2} \Pi_{h_2}(s) \int_s^t \mathrm{d}u_1 \int_s^{u_1} a_{h_2 h_1}(u_2) a_{h,k}(u_1)\, \mathrm{d}u_2 + \ldots +$$

$$+ \sum_{h_1, h_2, \ldots, h_n} \Pi_{h_n}(s) \int_s^t \mathrm{d}u_1 \int_s^{u_2} \mathrm{d}u_2 \ldots \int_s^{u_{n-1}} a_{h_n h_{n-s}}(u_n)\, a_{h_{n-1} h_{n-1}}(u_{n-1}) \ldots$$

$$\ldots a_{h_1 k}(u_1)\, \mathrm{d}u_n + R_n. \tag{10}$$

Ținînd seamă de (8'), dezvoltarea (10) devine

$$\Pi_k(t) = \delta_{jk} + \int_s^t a_{jk}(u_1)\, \mathrm{d}u_1 + \sum_{h_1} \int_s^t \mathrm{d}u_1 \int_s^{u_1} a_{jh_1}(u_2)\, a_{h_1 k}(u_1)\, \mathrm{d}u_2 + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}} \int_s^t \mathrm{d}u_1 \ldots \int_s^{u_{n-1}} a_{jh_{n-1}}(u_n)\, a_{h_{n-1} h_{n-2}}(u_{n-1}) \ldots$$

$$\ldots a_{h_1 k}(u_1)\, \mathrm{d}u_n + R_{nk}. \tag{11}$$

Pentru a putea discuta complet soluțiile sistemelor (8) și (9) vom presupune

$$|a_{ij}(t)| \leqslant A, \quad T \leqslant s \leqslant t \leqslant T. \tag{12}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m)$$

Din (4) rezultă

$$\sum_{h \neq j} a_{jk}(t) = -a_{jj}(t) \leqslant A,$$

deci

$$\sum_k |a_{jk}(t)| < 2A.$$

Prin urmare,

$$\sum_{h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}} |a_{jh_{n-1}}(u_n)|\, |a_{h_{n-1} h_{n-2}}(a_{n-1})| \ldots |a_{h_1 k}(u_1)| \leqslant 2^n A^n. \tag{13}$$

Deci termenul de rangul n din dezvoltarea (11) este majorat de

$$\frac{2^n A^n (t - s)^n}{n!}.$$

Seria care se obține în (11), continuînd dezvoltarea, este deci absolut și — cum se vede lesne — uniform convergentă pentru t, verificînd condiția dată de relația (12).

Se constată imediat, direct, că soluția dată de această serie verifică sistemul (8), (8').

Continuitatea funcțiilor $a_{jk}(t)$ într-un interval (s, T) este pentru aceasta suficientă.

Procedînd în același mod pentru sistemul diferențial (9), (9') obținem seria absolut și uniform convergentă în intervalul (s, T),

$$\theta_j(s) = \delta_{jk} + \int_s^t a_{jk}(u_1)\,\mathrm{d}u_1 + \sum_{h_1}\int_s^t a_{jh_1}(u_1)\,a_{h_1k}(u_2)\,\mathrm{d}u_2 + \ldots$$

Se verifică imediat că $\theta_j(s)$ satisfac sistemul (9), (9').

Se observă, în același timp, că în dezvoltările (11) și (12) termenii respectivi sînt egali. Prin urmare,

$$\theta_j(s) \equiv \Pi_k(t) = p_{jk}(s, t).$$

Se mai poate observa pe dezvoltările (11) și (14), cel puțin în condițiile (12) considerate aici și dealtfel ori de cîte ori aceste dezvoltări sînt absolut și uniform convergente, că $\Pi_k(t)$, considerată ca funcție de s, verifică sistemul (9), (9'), este deci identică cu $\theta_j(s)$ și reciproc. Cele două funcții sînt deci identice.

4. *Determinarea procesului prin sistemul diferențial* (8), (8') sau (9), (9'). Sîntem acum în măsură să demonstrăm următoarea

Teoremă. *Fiind dat sistemul de funcții* $a_{jk}(u)$ $(j, k = 1, 2, \ldots, m)$ *continue într-un interval* (T_0, T) *și verificînd condițiile* (5), *sistemul* (8), (8') *sau* (9), (9') *determină un proces continuu* $p_{kj}(s, t)(j, k = 1, 2, \ldots, m)$ *pentru* $T_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Pentru demonstrare trebuie să arătăm că soluția $p_{jk}(s, t) = \Pi_k(t)$ dată de (11) pentru sistemul (8), (8') verifică relațiile (6) și în același timp relațiile Chapman (1).

Începem cu acestea din urmă.

Am arătat că, punînd $p_{jk}(s, t) = \Pi_k(t)$, aceste mărimi considerate ca funcții de s verifică sistemul (9), (9').

Fie atunci funcția

$$P_{jk}(s, u, t) = \sum_h p_{jh}(s, u)\,p_{hk}(u, t). \qquad (15)$$
$$(s \leqslant u \leqslant t)$$

Derivînd în ambii membri în raport cu u, obținem

$$\frac{\partial P_{jk}(s, u, t)}{\partial u} = \sum_h \frac{\partial p_{jh}(s, u)}{\partial u}\,p_{hk}(u, t) + \sum_h p_{jh}(s, u)\,\frac{\partial p_{hk}(u, t)}{\partial u}.$$

Înlocuind cele două derivate din membrul al doilea prin expresiile lor date de (8) și (9), obținem zero, deci $P_{jk}(s, u, t)$ nu depinde de u; funcția (15) devine

$$P_{jk}(s, t) = \sum_h p_{jh}(s, u)\,p_{hk}(u, t). \qquad (16)$$

Făcînd aici $u = t$, rezultă

$$P_{jk}(s, t) = \sum_h p_{jh}(s, t)\,p_{hk}(t, t) = p_{jk}(s, t).$$

Deci, înlocuind în (15), obținem

$$p_{jk}(s, t) = \sum_h p_{jh}(s, u)\,p_{hk}(u, t).$$

Relația caracteristică procesului este astfel verificată.

Din sistemul (8), însumînd în raport cu k și ținînd seamă de (6), rezultă

$$\frac{\mathrm{d}\sum_k \Pi_k(t)}{\mathrm{d}t} = 0,$$

deci, ținînd seamă de (8'),

$$\sum_k \Pi_k(t) = \sum_k \Pi_k(s) = 1.$$

Rămîne să arătăm că $\Pi_k(t) \geqslant 0$.

Să dividem intervalul (s, t) în n părți egale, prin punctele de diviziune $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Relația (16) ne va da

$$p_{jk}(s, t) = \sum_{h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}} p_{jh_1}(s, u_1)\,p_{h_1h_2}(u_1, u_2)\ldots p_{h_{n-1}k}(u_{n-1}, t), \qquad (17)$$

oricît de mare ar fi n.

Pe de altă parte, din (11) rezultă, prin aplicarea teoremei mediei, dacă $u_{j+1} - u_j$ este suficient de mic

$$p_{h_jh_{j+1}}(u_j, u_{j+1}) = \delta_{h_jh_{j+1}} + (u_{j+1} - u_j)\,a_{jk}(u_j') \geqslant 0.$$

Rezultă că putem alege pe n suficient de mare pentru ca termenii sumei din membrul al doilea din (17) să fie pozitivi sau nuli; prin urmare,

$$p_{jk}(s, t) \geqslant 0.$$

Cu aceasta demonstrația este terminată.

5. *Proces omogen.* Dacă procesul este omogen, deci $p_{jk}(s, t)$ depinde numai de intervalul $t - s$, adică

$$p_{jk}(s, t) = p_{jk}(t - s) \quad (j, k = 1, 2, \ldots, m)$$

funcțiile $a_{jk}(u)$ sînt constante și reciproc. Dacă aceste funcții sînt constante, procesul este omogen. În acest caz, dezvoltarea (11) devine

$$\Pi_k(t) = \delta_{jk} + A_{jk}^{(1)} \frac{t - s}{1!} + A_{jk}^{(2)} \frac{(t - s)^2}{2!} + \ldots + A_{jk}^{(n)} \frac{(t - s)^n}{n!} + \ldots \tag{18}$$

unde

$$A_{jk}^{(n)} = \sum_{h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}} a_{jh_{n-1}} a_{h_{n-1}h_{n-2}} \ldots a_{h_1 k},$$

cu mărginirea dată de (13) care învederează convergența absolută a seriei (18).

O serie identică se obține din (14).

6. *Funcțiile $a_{jk}(u)$ și procesele de tip Feller.* În general, nu putem atribui un sens fizic direct funcțiilor $a_{jk}(u)$. În cazul proceselor de tip Feller, care se mai numesc și pur discontinue, putem preciza un astfel de sens, care rezultă din interpretarea unor fenomene de radiație cărora le corespund aceste procese.

Pentru procesele pur discontinue, avem

$$a_{jk}(u) = \rho_j(u)\,(\Pi_{jk}(u) - \delta_{jk}) \quad (j, k = 1, 2, \ldots, m)$$

unde $\Pi_{jk}(j, k = 1, 2, \ldots, m)$, $\Pi_{jk} \geqslant 0$, $\sum_k \Pi_{jk} = 1$ este probabilitatea de salt discontinuu la momentul u din starea j în starea k, iar $\rho_j(u)$ este intensitatea acestui fenomen.

Funcțiile $\Pi_{jk}(u)$ și $\rho_j(u)$ se presupun continue, iar $\rho_j(u) \geqslant 0$ prin însăși semnificația ei. Este evident suficient ca în intervalul procesului să avem

$$\rho_j(u) \leqslant \rho \tag{19}$$

pentru ca convergența să fie asigurată. Condiția nu este evident necesară și există împrejurări fizice în care procesul este determinat fără ca această condiție să fie îndeplinită.

7. *Procesele cu o mulțime numărabilă de stări.* Pentru aceste procese, atît relațiile (1) și (3) cît și sistemele (8) sau (9) își păstrează valabilitatea făcînd $m = \infty$. De asemenea, își păstrează valabilitatea forma (11) sau (14) a soluțiilor respective cu condiția ca seriile să fie convergente. Dacă condiția (12) este îndeplinită sau, pentru procesele de tip Feller, condiția (19) este îndeplinită, vom avea evident convergență. Seriile sînt suficient de repede convergente pentru a fi utilizabile în practică.

În lucrarea lui N. Arley se găsesc numeroase aplicații la teoria radiației cosmice a acestor procese, considerîndu-se și cazuri în care există convergență fără ca $\rho_j(u)$ să fie mărginite.

§ 2. Procesele continue cu o dimensiune. Procesele lui W. Feller

1. *Ecuația funcțională și procesul elementar.* Dacă notăm cu $P(s, x; t, X)$ probabilitatea de trecere de la evenimentul elementar reprezentat de punctul de abscisă x la momentul s, la evenimentul reprezentat de mulțimea măsurabilă X la momentul ulterior t, această probabilitate corespunde unui proces de propagare (generalizarea procesului Markov) simplă dacă verifică ecuația Chapman-Kolmogorov

$$P(s, x; t, X) = \int_R P(s, x; u, \mathrm{d}y)\, P(u, y; t, X) \tag{1}$$

pentru orice u cuprins între s și t.

În această integrală, $P(s, x; u, dy)$ are sensul precis al variației unei funcții de repartiție $dF(s, x; u, y)$, unde am pus

$$F(s, x; t, y) = P(s, x, t, Y), \tag{2}$$

Y fiind intervalul $[0, y)$ deschis la dreapta. Integrala este deci de tipul Stieltjes.

Funcția $P(s, x; t, X)$ este continuă în raport cu x și este funcție total aditivă față de mulțimea X; ea este o probabilitate,

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant P(s, x; t, X) = 1;\ P(s, x, t, \varphi) = 0, \\ P(s, x; t, R) = 1. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Procesul elementar are, în acest caz, forma

$$P(s, x; s + \Delta, X) = \delta(x, X) + \Delta a(s, x; X, \Delta), \tag{4}$$

unde

$$\delta(x, X) = \begin{cases} 1 & x \in X, \\ 0 & x \in CX. \end{cases} \tag{i}$$

Funcția

$$a(s, x; Y, \Delta)$$

este pentru orice Δ o funcție continuă de s și x, total aditivă de X și, ținînd seama de (3),

$$a(s, x; X, \Delta) = \begin{cases} \leqslant 0 & x \in X, \\ \geqslant 0 & x \in CX, \end{cases} \tag{ii}$$

$$a(s, x; R, \Delta) = 0.$$

2. *Procesele pentru care funcția* $a(s, x; X, \Delta)$ *este continuă în* D. În acest caz, vom pune

$$a(s, x; X, 0) = a(s, x; X).$$

Această funcție este, ca oricare $a(s, x; X, \Delta)$, continuă în s și x, total aditivă în X și verifică inegalitățile (ii).

Din (1) și (2) rezultă

$$P(s, x; t + \Delta, X) - P(s, x; t, X) = \Delta \int_R P(s, x; u, dy a(t, y; X, \Delta).$$

De unde, divizînd cu Δ și făcînd $\Delta \to 0$, găsim ecuația integrodiferențială

$$\frac{\partial P(s, x; t, X)}{\partial t} = \int_R P(s, x; t, dy)\, a(t, y, X). \tag{5}$$

Prin urmare, probabilitatea $P(s, x; t, X)$ este soluția sistemului

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Pi(t, X)}{\partial t} = \displaystyle\int_R \Pi(t, dy)\, a(t, y, X), \quad t > s, \\ \Pi(s, X) = \delta(x, X). \end{array}\right\} \tag{6}$$

De asemenea, din (1) și (2) rezultă:

$$P(s + \Delta, x; t, X) - P(s, x; t, X) =$$

$$= -\Delta \int_R a(s, x; dy, \Delta)\, P(s + \Delta, y; t, X), \tag{7}$$

ceea ce dă

$$\frac{\partial P(s, x; t, X)}{\partial s} = -\int_R a(s, x; dy)\, P(s, y; t, X).$$

Deci, $P(s, x; t, X)$ este soluția sistemului

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \theta(s, x)}{\partial s} = -\displaystyle\int_R a(s, x, dy)\, \theta(s, y), \quad s < t \\ \theta(t, x) = \delta(x, X). \end{array}\right\} \tag{8}$$

Soluția sistemului (6) este dată de seria

$$\Pi(t, X) = \delta(x, X) + \int_s^t a(u_1, x, X)\, du_1 +$$

$$+ \int_s^t du_1 \int_s^{u_1} du_2 \int_R a(u_2, x, dy_1)\, a(u_1 y_1, X) + \ldots \tag{9}$$

dacă aceasta este absolut convergentă.

În ipoteza

$$|a(u, x, X)| < A, \tag{10}$$

seria (9) ca și seria corespunzătoare sistemului (8)

$$\theta(s, x) = \delta(x, X) + \int_s^t a(u_1, x, X)\, du_1 +$$

$$+ \int_s^t du_1 \int_{u_1}^t du_2 \int_R a(u_1, x, dy_1)\, a(u_2, y_1, X) + \ldots \tag{11}$$

sînt absolut convergente.

În aceste cazuri, cele două serii reprezintă aceeași funcție

$$\Pi(t, X) = \theta(s, x) = P(s, x; t, X).$$

Putem acum demonstra următoarea

Teoremă. *O funcție $a(u, x, X)$ verificînd condițiile* (i), (ii) *și* (10) *sau altă condiție mai largă pentru care cele două serii sînt absolut convergente determină un proces $P(s, x; t, X)$.*

Demonstrația urmează exact același drum ca și în cazul finit.

Proces omogen. În acest caz,

$$P(s, x; t, X) = P(t - s; x, X).$$

Rezultă că funcția a nu depinde de timp

$$a \equiv a(x, X).$$

Seria (9) devine

$$P(t - s, x, X) = \delta(x, X) + A^{(1)}(x, X)\frac{t - s}{1} +$$

$$+ A^{(2)}(x, X)\frac{(t - s)^2}{2!} + \ldots, \tag{12}$$

unde

$$A^{(1)}(x, X) = a(x, X); \quad A^{(2)}(x, X) = \int_R a(x, dy_1)\, a(y_1, X),$$

$$A^{(n)}(x, X) = \int_{R^{(n-1)}} a(x, dy_1)\, a(y_1, dy_2) \ldots a(y_{n-1}, X). \tag{13}$$

Ținînd seama că

$$\int_R a(x, dy) = a(x, R) = 0,$$

dacă numim cu R_1 mulțimea pe care $a(x, dy)$ este pozitivă și cu R_2 mulțimea pe care ea este negativă, rezultă

$$\int_R |a(x, dy)| = 2\left|\int_{R_1} a(x, dy)\right| = 2|a(x, R_1)|. \tag{14}$$

Aceasta caracterizează o anumită discontinuitate a procesului, deoarece nu am putea avea

$$a(x, R_1) = \int_{R_1} a(x, dy) = 0$$

pentru fiecare x. Aceasta ar duce după sine $A^{(n)} \equiv 0$, deci $P = \text{const}$.

Există deci puncte x pentru care $a(x, R_1) \neq 0$. Ipoteza (10) se reduce la presupunerea că

$$|a(x, R_1)| < A.$$

În acest caz, evident,

$$|A^{(n)}| \leqslant (2A)^n,$$

seria (12) este absolut convergentă și procesul este bine determinat.

Aceste observații capătă o semnificație mai intuitivă în cazul proceselor total discontinue ale lui W. Feller, în care

$$a(x, X) = \rho(x)[\Pi(x, X) - \delta(x, X)].$$

În acest caz,

$$a(x, R_1) = \rho(x)[\Pi(x, R_1) - 1].$$

Deoarece

$$\Pi(x, R) = 1,$$

este natural ca $\Pi(x, R_1) < 1$, deci $a(x, x) \neq 0$.

Condiția de mărginire se reduce la

$$\rho(x) < A,$$

condiție, dealtfel, de ajuns de limitativă.

3. *Procesele lui Kolmogorov.* Presupunem că funcția $a(s, x; ; X, \Delta)$ nu este continuă în raport cu Δ, dar satisface următoarele condiții de regularitate,

$$\alpha_\Delta(s, x) = \int_R (y - x)\, a(s, x; \mathrm{d}y, \Delta) \underset{\Delta \to 0}{\to} \alpha(s, x) \tag{j}$$

$$\beta_\Delta(s, x) = \int_R (y - x)^2\, a(s, x; \mathrm{d}y, \Delta) \underset{\Delta \to 0}{\to} \beta(s, x) \tag{j'}$$

$$\int_{|y-x|>\tau} (y - x)^2\, a(s, x; \mathrm{d}y, \Delta) \underset{\Delta \to 0}{\to} 0 \tag{j''}$$

pentru orice τ pozitiv.

În relația (7), presupunînd că $P(s, y; t, X)$ are primele două derivate continue și uniform mărginite de o constantă M în raport cu y, vom putea scrie

$$P(s + \Delta, y; t, X) = P(s + \Delta, x; t, X) + \frac{y - x}{1} \frac{\partial P}{\partial x} + \\ + \frac{(y - x)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)_{y = x + \theta(y - x)}. \tag{15}$$

$$0 < \theta < 1.$$

Prin urmare,

$$\frac{1}{\Delta}[P(s + \Delta, x; t, X) - P(s, x; t, X)] = \alpha_\Delta(s, x) \frac{\partial P}{\partial x} + \\ + \frac{1}{2}\beta_\Delta(s, x) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\int_R a(s, x, \mathrm{d}y)(y - x)\left[\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)_{y = x + \theta(y - x)} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right]. \tag{16}$$

Integrala din membrul al doilea se poate descompune într-o sumă de două integrale, dintre care una extinsă la mulțimea măsurabilă R^1, pe care $(y - x) \leqslant \tau$, după ce am ales pe τ suficient de mic pentru ca

$$\left|\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)_{y = x + \theta\tau} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right| < \varepsilon,$$

ε fiind dat.

Vom avea deci

$$\int_R a(s, x; \mathrm{d}y, \Delta)(y - x)^2 \left[\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)_{y = x + \theta(y - x)} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right] = \\ = \int_{|y-x| \leqslant \tau} + \int_{|y-x|>\tau}.$$

Însă, ținînd seamă de alegerea lui τ,

$$\left|\int_{|y-x| \leqslant \tau}\right| < \varepsilon \int a(s, x; \mathrm{d}y, \Delta)(y - x)^2 = \varepsilon\beta_\Delta(s, x),$$

iar

$$\left|\int_{|y-x|>\tau}\right| \leqslant 2M \int_{|y-x|>\tau} (y - x)^2\, a(s, x; \mathrm{d}y, \Delta).$$

Prin urmare, ținînd seamă de (jj) și (jjj),

$$\lim_{\Delta \to 0}\left|\int_R\right| < \varepsilon\beta(s, x)$$

oricare ar fi ε. De unde

$$\lim \int_R = 0.$$

Revenind la (16), putem face $\Delta \to 0$ și obținem relația diferențială

$$\frac{\partial P(s, x; t, X)}{\partial s} = -\alpha(s, x) \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{2}\beta(s, x) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad s < t. \tag{17}$$

Vom presupune în cele ce urmează că X este intervalul deschis la dreapta $[-\infty, y)$, $P(t, x; t, X) = \delta(x, X)$ și deci

$$P(s, x; t, X) = F(s, x; t, y),$$

și că există o densitate de repartiție

$$\rho(s, x; t, y) = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

În acest caz, ecuația (17) se poate scrie și pentru densitatea $\rho(t, y)$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial s} = -\alpha(s, x) \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{2}\beta(s, x) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad s < t. \tag{18}$$

Densitatea de repartiție $\rho(s, x; t, y)$ este atunci soluția ecuației cu derivate parțiale

$$\frac{\partial \varphi(s, x)}{\partial s} = -\alpha(s, x)\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2}\beta(s, x)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad s < t, \tag{19}$$

care verifică condițiile limită: $s = t$,

$$\int_X \rho(t, x; t, y) = \delta(x, X). \tag{19'}$$

Relația funcțională fundamentală (1) se poate transcrie pentru densitatea $\rho(s, x; t, y)$ dacă există

$$\rho(s, x; t, y) = \int_R \rho(s, x; u, z)\, \rho(u, z; t, y)\, dz. \tag{20}$$

Derivînd în ambii membri ai acestei egalități în raport cu z și ținînd seama de (18), obținem

$$0 = \int_R \frac{\partial \rho(s, x; u, z)}{\partial u}\, \rho(u, z; t, y) dz -$$

$$-\int_R \rho(s, x; u, z)\, \alpha(u, z)\, \frac{\partial \rho(u, z; t, y)}{\partial z}\, dz - \int \rho\beta \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} dz.$$

Integrînd prin părți și observînd că ρ și $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ sînt nuli pentru $y = \pm \infty$, obținem

$$\int_R \left[\frac{\partial \rho(s, x; u, z)}{\partial u} + \frac{\partial[\alpha(u, z)\rho]}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\beta(u, z)\rho)}{\partial z^2}\right] \rho(u, z; t, y)\, dz = 0,$$

de unde, integrînd în raport cu y pe mulțimea X și înlocuind paranteza cu $\Phi(s, x; u, z)$, avem

$$\int_R \Phi(s, x; u, z)\, P(u, z; t, X)\, dz = 0.$$

Dacă facem $u = t$, această egalitate se transformă în

$$\int_R \Phi(s, z; t, z)\, \delta(z, X)\, dz = 0.$$

Dacă X este un interval elementar y, $y + dy$, egalitatea precedentă dă $\Phi(s, x; t, y) = 0$, deci $\rho(s, x; t, y)$ verifică ecuația

$$\frac{\partial \rho(s, x; t, y)}{\partial t} = -\frac{\partial(\alpha(t, y)\rho)}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\beta(t, y)\rho)}{\partial y^2};$$

$\rho(s, x; t, y)$ este, prin urmare, soluția ecuației Fokker-Planck, adjuncta ecuației (19)

$$\frac{\partial \psi(t, y)}{\partial t} = -\frac{\partial(\alpha(t, y)\psi)}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\beta(t, y)\psi)}{\partial y^2}, \quad t > s, \tag{21}$$

cu condiția la limită

$$\int_X \psi(t, y)\, dy = \delta(x, X) \tag{21'}$$

pentru orice X.

4. *Procesul de difuzie. Mișcarea browniană.*

Procesul aleator $P(s, x; t, X)$, a cărui densitate verifică (19) sau (21), corespunde, așa cum se recunoaște pe identitatea de ecuații, cu procesul de difuzie sau de propagare a căldurii care este reprezentat de o ecuație de tip (21).

De aici deducem și posibilitatea reprezentării unui proces de difuzie ca un proces stochastic înlănțuit.

Mișcarea browniană inerțială, adică mișcarea considerată în lipsa unor forțe exterioare, este de asemenea susceptibilă de interpretarea (21) ca un proces stochastic.

Pentru a da o nouă formă mai completă procesului aleator $P(s, x; t, X)$, adăugăm și termenul care rezultă din primul tip de propagare așa cum este dat de ecuația (6), după ce introducem densitatea de repartiție. Va trebui să presupunem $a(t, z, dy) = b(t, z, y)\, dy$ și relația (6) devine

$$\frac{\partial \rho(s, x; t, y)}{\partial t} = \int_R \rho(s, x; t, z)\, b(t, z, y)\, dz.$$

Ecuația de propagare va lua forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\alpha(t, y)\rho)}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\beta(t, y)\rho)}{\partial y^2} + \int_R \rho(s, x; t, z)\, b(t, z, y)\, dz.$$

5. *Ecuațiile de propagare în spațiu* se obțin prin procedee asemănătoare. Dăm direct aceste ecuații, în care folosim pentru prescurtare și scrierea vectorială $y(y_1, y_2, y_3)$ etc.

$$\frac{\partial \rho(s, x; t, y)}{\partial t} = -\sum_{j=1,2,3} \frac{\partial(\alpha_j(t, y)\rho)}{\partial y_j} + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1,2,3} \frac{\partial^2(\beta_{jk}(t, y)\rho)}{\partial y_j\, \partial y_k} +$$

$$+\int_{R^3} \rho(s, x; t, z)\, b(t, z, y)\, dz_1\, dz_2\, dz_3.$$

6. Pentru mișcarea browniană, în care intervin și forțe de rezistență precum și perturbații aleatoare, trebuie numai să adăugăm termeni aleatori care depind de împrejurările specifice.

7. *Integrarea sistemului* (21), (21′). Vom considera cazul particular în care α și β sînt constante. Deoarece $\beta > 0$, vom pune $\beta = k^2$. Sistemul devine

$$\frac{\partial \psi(t, y)}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad t > s, \tag{22}$$

$$\int_X \psi(s, y)\, dy = \delta(x, X). \tag{22′}$$

Vom folosi pentru integrare transformata Fourier a funcției ψ,

$$\psi(t, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy\eta} \chi(t, \eta)\, d\eta. \tag{23}$$

Înlocuind în (22), obținem

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy\eta} \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} + \left(i\alpha\eta + \frac{1}{2} k^2\eta^2 \right) \chi \right) d\eta = 0.$$

Este dar necesar și suficient ca χ să verifice ecuația

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -\left(i\alpha\eta + \frac{1}{2} k^2\eta^2 \right) \chi,$$

a cărei soluție este

$$\chi(t, \eta) = \chi(s, \eta) e^{-\left(i\alpha\eta + \frac{1}{2} k^2\eta^2 \right)(t-s)}. \tag{24}$$

Aplicînd în (23) formula de inversiune, obținem

$$\chi(t, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\eta} \psi(t, y)\, dy.$$

Aplicînd ecuația (22′) pentru $t = s$, găsim

$$\chi(s, \eta) = \frac{1}{2\pi} e^{-is\eta},$$

prin urmare

$$\chi(t, \eta) = \frac{1}{2\pi} e^{-is\eta - \left(i\alpha\eta + \frac{1}{2} k^2\eta^2 \right)(t-s)}$$

care dă, în (23),

$$\psi(t, y) = \rho(s, x; t, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[y - x + \alpha(t-s)]\eta - \frac{1}{2} k^2 (t-s)\eta^2}\, d\eta.$$

Deci

$$\rho(s, x; t, y) = \frac{1}{k\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{[y - x + \alpha(t-s)]^2}{2k^2(t-s)}}. \tag{25}$$

Obținem astfel densitatea unui proces omogen și în timp și în spațiu.

Această funcție verifică și ecuația (19).

În cazul particular $\alpha = 0$, ecuația este

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad t > s,$$

iar soluția care verifică ecuația (22′) este

$$\rho(s, x; t, y) = \frac{1}{k\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2k^2(t-s)}}.$$

§ 3. Evoluția unei mărimi asociată unui proces Markov omogen

1. *Ecuația funcțională Smoluhovski-Hostinski.* Fie V o parte conexă mărginită a unei varietăți analitice dintr-un spațiu euclidian. Vom nota cu $p, q, \ldots$ diferitele puncte din V. Fie $\rho(p)$ o funcție integrabilă și pozitivă pe V și

$$\int_V \rho(p)\, dp = 1.$$

Presupunem că $\rho(p)$ este densitatea de repartiție a unui proces Markov omogen, prin urmare ρ este în același timp funcție de intervalul de timp t al procesului și de poziția inițială q.

Relația caracteristică procesului ia, în acest caz, forma

$$\rho(q, p, t_1 + t_2) = \int_V \rho(q, r, t_1)\, \rho(r, p, t_2)\, dr, \tag{1}$$

pe care o vom numi Smoluhovski-Hostinski.

2. *Convergența valorii medii cînd* $t \to \infty$. Efectul procesului asupra evoluției mărimii $F(p)$ se manifestă prin alura valorii medii a acestei mărimi. Studiul său este ajutat de următoarea

Teoremă ergodică. *Dacă valoarea medie*

$$\bar{F}(q, t) = \int_V \rho(q, p, t)\, F(p)\, dp \tag{2}$$

există pentru orice q *din* V *și orice* $t \geqslant 0$, *presupunînd că este îndeplinită și condiția* (1), *atunci*

$$\lim_{t \to \infty} \bar{F}(q, t) = \bar{F}$$

există și este independentă de q.

Pentru demonstrație să observăm că din (2) și (1) rezultă

$$\bar{F}(q, t + \tau) = \int_V \rho(q, p, t + \tau)\, F(p)\, dp = \int_V \rho(q, r, \tau)\, \bar{F}(r, t)\, dr. \tag{3}$$

Atunci

$$\bar{F}(q', t + \tau) - \bar{F}(q'', t + \tau) = \int_V (\rho(q', r, \tau) - \rho(q'', r, \tau))\, F(r, t) dr \tag{4}$$

pentru orice pereche de puncte q', q'' din V.

Vom considera acele puncte q' și q'' pentru care

$$\left.\begin{aligned} \bar{F}(q', t + \tau) &\geqslant \bar{F}(q, t + \tau) \\ \bar{F}(q'', t + \tau) &\leqslant \bar{F}(q, t + \tau) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

pentru toate punctele q din V, în afară, eventual, de o mulțime de puncte de măsură nulă.

Să notăm cu V' mulțimea de puncte r pe care $\rho(q', r, \tau) - \rho(q'', r, \tau)$ este pozitivă și cu V'' mulțimea pe care această diferență este negativă sau nulă; vom pune

$$\beta'(r) = \rho(q', r, \tau) - \rho(q'', r, \tau) \quad \text{pentru } r \in V',$$

$$\beta''(r) = \rho(q'', r, \tau) - \rho(q', r, \tau) \quad \text{pentru } r \in V''.$$

Este evident că

$$\int_{V'} \beta'(r)\, dr = \int_{V''} \beta''(r)\, dr = h_{q', q''}.$$

Să arătăm mai întîi că $h_{q', q''} < 1$. Într-adevăr, dacă am presupune că $h_{q', q''} = 1$, ar rezulta că

$$\rho(q', r, \tau) \geqslant \rho(q'', r, \tau)$$

aproape peste tot. Dar atunci egalitatea

$$\int_V \rho(q', r, \tau)\, dr = \int_V \rho(q'', r, \tau)\, dr = 1$$

arată că

$$\rho(q', r, \tau) = \rho(q'', r, \tau)$$

aproape peste tot, oricare ar fi q' și q'', ceea ce înseamnă că $\rho(q, r, \tau)$ nu depinde efectiv de q, contrar ipotezelor.

Valoarea lui $h_{q', q''}$ se mai poate scrie $h_{q', q''} = P(q', V', \tau) - P(q'', V', \tau) = P(q', V'', \tau) - P(q'', V'', \tau) = 1 - [P(q', V', \tau) + P(q'', V'', \tau)]$.

Vom presupune că, oricare ar fi desfacerea $V = V' \cup V''$ $(V' \cap V'' = \varnothing)$ și oricare ar fi ε, există $\tau < \varepsilon$ pentru care

$$\inf [P(q', V', \tau) + P(q'', V', \tau)] = h > 0.$$

Cu notațiile de mai sus (4) se poate scrie

$$\bar{F}(q', t + \tau) - \bar{F}(q'', t + \tau) = \int_{V'} \beta'(r)\, \bar{F}(r, t)\, dr - \int_{V''} \beta''(r) \bar{F}(r, t) dr.$$

Membrul al doilea este mai mic decît

$$F(K', t) h_{q', q''} - F(K'', t) h_{q', q''}, \tag{6}$$

unde K' și K'' verifică inegalități de tipul (5) pentru timpul t.

Dacă notăm

$$\Delta_t = \bar{F}(K', t) - \bar{F}(K'', t),$$

atunci din (6) și observația care o urmează rezultă

$$\Delta_{t+\tau} \leqslant h\, \Delta_t.$$

Dacă luăm $t = (n-1)\,\tau$, egalitatea precedentă dă

$$\Delta_{n\tau} \leqslant h^n \Delta_\tau.$$

Prin urmare, avînd $h < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_{n\tau} = 0$. De unde, în general,

$$\lim_{t\to\infty} \Delta_t = 0,$$

ceea ce arată că există limita unică, determinată,

$$\lim_{t\to\infty} \bar{F}(q, t) = \bar{F}, \tag{7}$$

independentă de q, indicată de teoremă.

3. *Evoluția unui proces definit de funcția* $A(p, q, t)$. Valoarea medie respectivă este

$$\bar{A}(q, r, t, \tau) = \int_V \rho(q, p, t)\, A(p, r, \tau)\, \mathrm{d}p. \tag{8}$$

La limită se obține în condiția (i) o funcție $A(r, \tau)$,

$$\lim_{t\to\infty} A(q, r, t, \tau) = A(r, t). \tag{9}$$

În cazul particular $A(p, r, \tau) = \rho(p, r, \tau)$ vom avea $A(q, r, t, \tau) = \rho(q, r, t + \tau)$, prin urmare cînd $t \to \infty$ limita nu mai depinde de τ și avem

$$\lim_{t\to\infty} \rho(q, r, t) = R(r), \tag{10}$$

cu proprietățile evidente

$$R(r) \geqslant 0, \quad \int_V R(r)\, \mathrm{d}r = 1.$$

Prin urmare, în ecuația

$$\rho(q, r, t + \tau) = \int_V \rho(q, p, t)\, \rho(p, r, \tau)\, \mathrm{d}p$$

putem face $t \to \infty$ și obținem

$$R(r) = \int_V R(p)\, \rho(p, r, \tau)\, \mathrm{d}p \tag{11}$$

pentru orice τ, unde $R(r)$ este dat de (10) și reprezintă o soluție stabilă a ecuației funcționale a lui Smoluhovski-Hostinski.

4. *Ecuațiile evoluției mărimii* $\bar{F}(q, t)$. Vom deosebi în acest studiu două cazuri:

1°. Presupunem

$$\int_A \rho(q, r, \tau)\, \mathrm{d}r = \delta(q, A) + \tau \int_A \omega(q, r)\, \mathrm{d}r + 0(\tau) \tag{12}$$

pentru orice mulțime măsurabilă A din V.

În aceste condiții, relația (3) ne dă

$$\frac{\bar{F}(q, t + \tau) - \bar{F}(q, t)}{\tau} = \int_V \omega(q, r)\, \bar{F}(r, t)\, \mathrm{d}r + \frac{0(\tau)}{\tau}.$$

Cînd τ tinde către zero, obținem ecuația integrodiferențială

$$\frac{\partial \bar{F}(q, t)}{\partial t} = \int_V \omega(q, r)\, \bar{F}(r, t)\, \mathrm{d}r, \quad t > 0, \tag{13}$$

cu condiția inițială

$$\bar{F}(q, 0) = F(q), \tag{14}$$

unde $F(q)$ este funcția originală.

Din (12) rezultă că

$$\int_A \omega(q, r)\, \mathrm{d}r \begin{cases} \leqslant 0 & \text{dacă } q \in A, \\ \geqslant 0 & \text{dacă } q \in V - A. \end{cases}$$

În particular,

$$\int_A \omega(q, r)\, \mathrm{d}r + \int_{V-A} \omega(q, r)\, \mathrm{d}r = 0.$$

Oricît de restrîns este domeniul A din V, dacă $q \in A$, avem deci

$$\int_V |\omega(q, r)|\, dr \leqslant 2 \int_A |\omega(q, r)|\, dr.$$

Vom presupune că există ω astfel că, oricare ar fi $q \in V$, există A oricît de restrîns, astfel ca

$$\int_A |\omega(q, r)|\, dr < \omega.$$

Rezultă că avem întotdeauna

$$\int_V |\omega(q, r)|\, dr \leqslant \omega.$$

În aceste condiții, soluția sistemului (13) este

$$\bar{F}(q, t) = F(q) + t \int_V \omega(q, r_1) F(r_1)\, dr_1 +$$

$$+ \frac{t^2}{1 \cdot 2} \int_V dr_1 \int_V \omega(q, r_1)\, \omega(r_1, r_2) F(r_2)\, dr_2 + \ldots,$$

a cărei convergență, pentru orice t, este evidentă.

2°. Fie

$$\int_A \rho(q, r, \tau)\, dr = \bar{0}\ (q, A) + \tau \int_A \omega(q, r, \tau)\, dr,$$

cu următoarele presupuneri:

V este un domeniu din spațiul euclidian cu m dimensiuni R^m.

Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sînt coordonatele punctului p, $y_1, y_2, \ldots, y_m$, coordonatele punctului q și $z_1, z_2, \ldots, z_m$ coordonatele punctului r, presupunem îndeplinite condițiile

$$\int_V (x_j - z_j)\, \omega(q, r, \tau)\, dr \underset{\tau \to 0}{\to} a_j(q),$$

$$\int_V (x_j - z_j)(x_k - z_k)\, \omega(q, r, \tau)\, dr \underset{\tau \to 0}{\to} b_j k(q),$$

$$\int_V (x_j - z_j)\, (x_k - z_k)\, \omega(q, r, \tau)\, dr \to 0,$$

$$\Sigma\, (x_j - z_j)^2 \geqslant \Delta^2,$$

pentru orice Δ.

În aceste condiții, dacă $\bar{F}(q, t)$ admite derivate de primele două ordine continue și uniform mărginite în V, atunci ea verifică ecuația lui Kolmogorov (§2), așa cum rezultă din însăși similitudinea de condiții.

§ 4. Procese aleatoare în lanț continuu cu legături complete

1. *Ecuațiile diferențiale ale procesului.* Notăm cu $1, 2, \ldots, m$ un sistem complet și finit de evenimente măsurabile din cîmpul $\{E, \mathfrak{K}, P\}$.

Pentru orice diviziune a timpului în intervale egale cu Δ se definește un lanț discontinuu cu legături complete dacă se dau probabilitățile de trecere:

$$p_{hk} \equiv \varphi_{hk}(p_1(t), p_2(t), \ldots, p_m(t);\ t, t + \Delta),$$
$$(h, k = 1, 2, \ldots, m)$$

$p_l(t)$ $(l = 1, 2, \ldots, m)$ fiind probabilitatea stării l la momentul t, așa cum s-a prezentat în desfășurarea procesului pînă la acel moment.

În vederea trecerii la un proces continuu în timp, vom presupune:

$$\varphi_{hk} \equiv \delta_{hk} + \Delta \psi_{hk}(p_1, p_2, \ldots, p_m;\ t, \Delta), \tag{1}$$

unde δ_{hk} este simbolul lui Kronecker, iar funcțiile ψ_{hk} împlinesc următoarele condiții:

$$\psi_{hk} \geqslant 0,\ \ \psi_{hh} \leqslant 0,\ \ \sum_{k = 1, 2, \ldots, m} \psi_{hk} = 0; \tag{i}$$

$$\psi_{hk}(p_1, p_2, \ldots, p_m;\ t, \Delta) \tag{ii}$$

sînt definite pentru $0 \leqslant p_l \leqslant 1$ $(l = 1, 2, \ldots, m)$ t și Δ finite oarecare, continue față de amîndouă aceste din urmă argumente în același timp;

$$f_{hk}(p_1, p_2, \ldots, p_m, t) = \psi_{hk}(p_1, p_2, \ldots, p_m;\ t, 0) \tag{iii}$$

sînt funcții continue și mărginite de toate argumentele din domeniul considerat și satisfac unele condiții de tip Lipschitz.

Observăm că (i) sînt valabile și pentru f_{hk} și că din aceste condiții rezultă

$$f_{hk} \leqslant -f_{hh} (h \neq k, \quad h, \ k = 1, 2, \ldots, m). \tag{2}$$

Procesul de lanț cu legături complete este definit, cu ajutorul probabilităților (1), de relațiile funcționale:

$$p_k(t + \Delta) \underset{k = 1, 2, \ldots, m}{=} \sum_{h = 1, 2, \ldots, m} p_h(t) \, \varphi_{hk}(p_1(t), p_2(t), \ldots, p_m(t); t, t + \Delta). \tag{3}$$

Acestea devin pentru expresia (2) a probabilităților φ_{hk}:

$$\frac{p_k(t + h) - p_k(t)}{\Delta} = \sum_{h = 1, 2, \ldots, m} p_k \psi_{hk}(p_1, p_2, \ldots, p_m; t, \Delta).$$
$$k = 1, 2, \ldots, m$$

Deoarece membrul al doilea al acestor egalități are o limită determinată dacă facem $\Delta \to 0$, membrul întîi va avea de asemenea o limită.

Obținem astfel pentru determinarea probabilităților $p_k(t)$ sistemul de ecuații diferențiale:

$$\frac{\mathrm{d}p_k(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{h = 1, 2, \ldots, m} p_k f_{hk}(p_1, p_2, \ldots, p_m; t); \quad t > s, \tag{J}$$

la care adăugăm condițiile la limită $t = s$,

$$p_k(s) = \delta_{lk} \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{4}$$

În condițiile enunțate mai sus, soluțiile $p_k(t)$ sînt bine și unic determinate de sistemul (J) și condițiile (4).

În cazul particular în care funcțiile $f_{hk} \equiv g_{hk}(t)$ nu depind de $p_1, p_2, \ldots, p_m$, sistemul (J) este identic cu primul sistem al lui Kolmogorov pentru lanțuri Markov continue relative la o mulțime finită de evenimente.

Dacă funcțiile f_{hk} nu depind explicit de timp, lanțul este, după terminologia folosită pentru procesele Markov, omogen.

Pentru a afirma că sistemul (J) cu condițiile la limită (4) corespunde unui proces stochastic, este necesar să demonstrăm că:

Sistemul de soluții $p_1(t), \ldots, p_m(t)$ al sistemului (J), (4) satisface relațiile

$$p_k(t) \geqslant 0, \quad \sum_{k = 1, 2, \ldots, m} p_k(t) = 1. \tag{5}$$

Deoarece din (i) și (iii) rezultă $\sum_{h = 1, 2, \ldots, m} f_{hk} = 0$, sistemul (J) ne dă

$$\sum_{k = 1, 2, \ldots, m} \frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Deci, ținînd seama și de (4),

$$\Sigma \, p_k = \Sigma \, \delta_{kl} = 1.$$

A doua relație din (5) este astfel demonstrată.

Pentru a demonstra prima relație, să presupunem întîi că funcțiile f_{hk} satisfac relațiile mai tari

$$f_{hk} > 0, \ f_{hh} < 0, \quad h, k = 1, 2, \ldots, m. \tag{j}$$
$$h \neq k$$

În acest caz, (J) și (4) ne arată că pentru $t = s$, avem

$$\left(\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}\right)_{t = s} = (f_{lk})_{t = s}.$$

Prin urmare,

$$\left(\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}\right)_{t = s} \begin{cases} > 0, & k \neq l, \\ < 0, & k = l, \end{cases}$$

în corespondență cu $p_k = 0$, $k \neq l$ și $p_l = 1$.

Fie acum o valoare t_0 astfel ca $p_h(t) \geqslant 0$, $h = 1, \ldots, m$ pentru $t \leqslant t_0$ și $p_k(t_0) = 0$.

Din (J) rezultă

$$\left(\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}\right)_{t = t_0} = \left(\sum_{h \neq k} p_h f_{hk}\right)_{t = t_0}.$$

Cum egalitatea din (J) ne arată că nu toți p_h, $h \neq k$, sînt nuli, rezultă din (J) că

$$\left(\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}\right)_{t = t_0} > 0.$$

Ca urmare, nici una dintre soluțiile sistemului (J), (4), unde coeficienții verifică și relațiile (J) în loc de (i), nu este negativă și nici mai mare decît 1.

Revenim la un sistem f_{hh}, în care unele dintre funcții pot fi nule pentru anumite valori ale variabilelor.

Funcțiile

$$f^{\alpha}_{hk} = f_{hk} + \alpha \,;\, f^{\alpha}_{hh} = f_{hh} - (m-1)\,\alpha, \quad \alpha > 0 \qquad (h \neq k;\ h, k = 1, 2, \ldots, m)$$

formează un sistem verificînd condițiile (J) și (iii) pentru orice α pozitiv finit. Potrivit unei teoreme cunoscute, soluția sistemului (J), (4) corespunzătoare unui α finit, oarecare, tinde, cînd $\alpha \to 0$, către soluția sistemului (J), (4) pentru $\alpha = 0$. Cum pentru orice α, $p^{\alpha}_{k}(t) \geqslant 0$, vom avea și $p_k(t) = p^{0}_{k}(t) \geqslant 0$, afirmația este demonstrată.

2. *Procesul aleator liniar asociat ecuațiilor* (J). Dacă lanțul definit mai sus se reduce la un lanț Markov, probabilitățile $p_{lk}(s, t)$, soluții ale sistemului (J), (4), verifică relațiile funcționale

$$p_{lk}(s, t) = \sum_{h = 1, 2, \ldots, m} p_{lh}(s, u)\, p_{hk}(u, t) \quad (l, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Vom arăta că aceste relații se înlocuiesc, în cazul general al lanțurilor cu legături complete, prin altele de forma

$$p_{lk}(s, t) = \sum p_{lh}(s, u)\, \Pi_{hk}(s, u, t), \quad s \leqslant u \leqslant t, \qquad (k)$$

unde $\Pi_{lhk}(s, u, t)$ este un sistem de probabilități condiționate, ale cărui proprietăți, pentru l și s fixe, sînt acele corespunzătoare unui lanț Markov.

Să considerăm soluția sistemului (J), (4) pe care o vom scrie

$$p_k(t) \equiv p_{lk}(s, t) \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

trecînd sub tăcere, pentru simplificarea scrierii, indicele fix l și momentul fix s. Cu aceste funcții, continue împreună cu derivatele lor de ordinul întîi, $f_{hk}(p_1(t), p_2(t), \ldots, p_m(t);\ t)$ devin funcții continue de timp,

$$f_{hk}(p_1, p_2, \ldots, p_m;\ t) = g_{hk}(t), \qquad (6)$$

care verifică condiții corespunzătoare condițiilor (i), (iii), astfel că ecuațiile diferențiale liniare,

$$\frac{\mathrm{d}X_k}{\mathrm{d}t} = \sum_{h = 1, 2, \ldots, m} X_h g_{hk}(t) \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \qquad (J)$$

admit o soluție determinată continuă împreună cu derivata sa de ordinul întîi, pentru condițiile inițiale

$$[X_h(t)]_{t = u} = \delta_{hk}. \qquad (7)$$

Ținînd seama de faptul că g_{hk} îndeplinesc condițiile (i):

$$g_{hk} \geqslant 0, \quad g_{hh} \leqslant 0, \quad \sum_{k = 1, 2, \ldots, m} g_{hk} = 0, \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, m)$$

rezultă că soluțiile pe care le vom numi $\Pi_{hk}(u, t)$, $u \leqslant t$, ale sistemului (7) sînt probabilități

$$\Pi_{hk}(u, t) \geqslant 0, \quad \sum_{k = 1, 2, \ldots, m} \Pi_{hk}(u, t) = 1,$$

și verifică o relație a lui Chapman

$$\Pi_{hk}(u, t) = \sum_{l = 1, 2, \ldots, m} \Pi_{hl}(u, v)\, \Pi_{lk}(v, t), \qquad (8)$$
$$(u \leqslant v \leqslant t) \quad (h, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Derivînd în raport cu v în ambii membri ai acestor egalități, obținem

$$0 = \sum_{l = 1, 2, \ldots, m} \left[\frac{\partial \Pi_{hl}(u, v)}{\partial v}\, \Pi_{hk}(v, t) + \Pi_{hl}(u, v)\, \frac{\partial \Pi_{rk}(v, t)}{\partial v} \right].$$

Folosind sistemul (J), obținem

$$0 = \sum_{l = 1, 2, \ldots, m} \Pi_{hl}(u, v) \left[\frac{\partial \Pi_{lk}(v, t)}{\partial v} + \sum_{r = 1, 2, \ldots, m} g_{lr}(v)\, \Pi_{rk}(v, t) \right].$$

Facem în această relație $v = u$ și ținem seama de (7); rezultă pentru fiecare h un al doilea sistem de ecuații

$$\frac{\partial \Pi_{hk}(u, t)}{\partial u} + \sum_{r = 1, 2, \ldots, m} g_{hr}(u)\, \Pi_{hk}(u, t) = 0, \quad u < t. \qquad (J')$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m).$$

Pentru a demonstra proprietatea (k), considerăm funcțiile

$$g_k(u, t) = \sum_h p_h(u)\, \Pi_{hk}(u, t). \qquad (9)$$

Derivînd în raport cu u, obținem

$$\frac{\partial g_h}{\partial u} = \sum_h \frac{\partial p_h(u)}{\partial u}\, \Pi_{hk}(u, t) + \sum_h p_h(u)\, \frac{\partial \Pi_{hk}(u, t)}{\partial u}$$

ținînd seama de (J) și (J'), obținem în membrul al doilea zero; deci, $g_k(u, t) = g_k(t)$ nu depinde de u.

Dacă în (9) facem $u = t$, avem

$$g_k(t) = \sum_h p_h(t)\,\delta_{hk} = p_h(t),$$

deci (9) devine

$$p_k(t) = \sum_h p_h(u)\,\Pi_{hk}(u, t). \tag{10}$$

Revenind la indicele și la timpul lăsat la o parte, punem în (10) $p_k(t) = p_{lk}(s, t)$, deci $\Pi_{hk}(u, t) = \Pi_{lhk}(s, u, t)$ și obținem relațiile funcționale (k).

Procesul în lanț cu legături complete are deci un lanț Markov ca lanț liniar asociat.

Observație. Relațiile (k) pot servi pentru stabilirea proprietăților (5) ale funcțiilor $p_k(t)$. În adevăr, dacă facem în aceste relații $u = s$, avem $p_{lh}(s, s) = \delta_{lh}$, deci

$$p_{lk}(s, t) = \sum_{h = 1, 2, \ldots, m} \delta_{lh}\Pi_{lhk}(s, s, t) = \Pi_{llh}(s, s, t).$$

Însă funcțiile $\Pi_{llk}(s, t)$, ca soluții ale sistemului (J), (7), sînt probabilități

$$\Pi_{llk}(s, t) \geqslant 0, \quad \sum_{k = 1, 2, \ldots, m} \Pi_{llk} = 1,$$

deci $p_{lk}(s, t)$ verifică relațiile (5).

Lanț cu legături complete stîng. Lanțul definit mai sus se poate numi lanț la dreapta sau drept. Lanțurile discontinue definite de noi împreună cu Gh. Mihoc sînt stîngi. Se poate caracteriza un lanț continuu cu legături complete la stînga prin ecuațiile diferențiale

$$\frac{\mathrm{d}p_h(s)}{\mathrm{d}s} = -\sum_{l = 1, 2, \ldots, m} f_{hl}(p_1(s), p_2(s), \ldots, p_m(s), s)\,p_l(s), \tag{J''}$$

$$p_h(t) = \delta_{hk}.$$

Spre deosebire de cazul Markov, cele două lanțuri, deși generate de același sistem f_{hl}, nu sînt identice.

3. *Sistem lacunar.* Dacă funcțiile f_{hk}, în afară de condițiile (ii) și (iii), verifică inegalitățile

$$f_{hk} \geqslant 0 \quad (h \neq k), \qquad f_{hk} \leqslant 0 \quad (h, k = 1, 2, \ldots, m), \qquad \sum_{k = 1, 2, \ldots, m} f_{hk} \leqslant 0,$$

sistemul (J) descrie în chip incomplet procesul de lanț și va fi numit sistem lacunar.

Vom completa sistemul (J) cu o nouă ecuație, cuprinzînd o nouă funcție p_{m+1}:

$$\frac{\mathrm{d}p_{m+1}}{\mathrm{d}t} = \sum_h p_h f_{h, m+1}(p_1, p_2, \ldots, p_m; t),$$

unde

$$f_{h, m+1} = -\sum_{k = 1, 2, \ldots, m} f_{hk} \quad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Sistemul (J'), format din (J), și ecuația de mai sus îndeplinesc condițiile impuse acestui sistem pentru ca $p_1(t)$, $p_2(t)$, ..., $p_m(t)$, $p_{m+1}(t)$, determinate prin condițiile inițiale

$$p_h(s) \geqslant 0 \quad \sum_{k = 1, 2, \ldots, m, m+1} p_h(s) = 1,$$

să verifice aceste condiții pentru orice t.

Rezultă atunci că sistemul lacunar (J) determină de asemenea un sistem de probabilități $p_1(t)$, $p_2(t)$, ..., $p_m(t)$ cu condițiile

$$p_h(t) \geqslant 0 \quad \sum_{h = 1, 2, \ldots, m} p_h(t) \leqslant 1,$$

dacă aceste condiții sînt verificate pentru $t = s$. Putem vorbi, în acest caz, dacă trecem la o interpretare intuitivă, de o stare $\omega = m + 1$, a cărei probabilitate este

$$p_\omega(t) = 1 - \sum_{h = 1, 2, \ldots, m} p_h(t)$$

și care ar putea fi dispariția unuia oarecare dintre elementele ale căror stări sînt descrise de proces.

În trecere de la (1) sau (3) la (J), izolarea unui sistem lacunar se realizează dacă $\lim_{\Delta \to 0} \psi_{mk} = f_{mk} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Fenomenul este mai relevant în cazul unei mulțimi infinite de stări.

4. *Proprietăți ergodice globale și individuale.* Un aspect al proprietăților ergodice ale unui lanț se pune în lumină prin studiul invarianților integrali asociați sistemului diferențial (J).

Vom examina problema mai întîi în general, fără a ne limita la condițiile inițiale care dau caracterul de probabilități celor n funcții care-l verifică.

Fie deci sistemul

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_h x_h f_{hk}(x_1, x_2, \ldots, x_m; t), \qquad (J)$$

$$(h = 1, 2, \ldots, m).$$

Vom presupune că derivatele de ordinul întîi ale funcțiilor f_{hk} există și sînt continue într-un domeniu D. Integrala

$$I = \int_V F(x_1, x_2, \ldots, x_m; t)\, dx_1\, dx_2, \ldots, dx_m, \qquad (11)$$

unde domeniul V este interior lui D, este invariantă pentru ecuațiile (J) dacă F verifică ecuația

$$\frac{dF}{dt} + F\left(\sum_{l=1,2,\ldots,m} f_{ll} + \sum_{l,k=1,2,\ldots,m} x_h \frac{\partial f_{hl}}{\partial x_l}\right) = 0. \qquad (12)$$

În cazul particular care corespunde lanțului Markov, ecuația devine

$$\frac{dF}{dt} + F\left(\sum_{l=1,2,\ldots,m} f_{ll}\right) = 0. \qquad (13)$$

Știm că $f_{ll}(t) \leqslant 0$ și că nu putem avea $f_{ll}(t) = 0$ pentru orice l. Prin urmare, putem scrie

$$\sum_l f_{ll}(t) = -\omega^2(t) < 0.$$

Rezultă

$$F_t = F_s\, e^{\int_s^t \omega^2(u)\, du}. \qquad (14)$$

Din (11) avem atunci, notînd cu $V(t)$ volumul domeniului V la momentul t,

$$V(t) = V(s)\, e^{-\int_s^t \omega^2(u)\, du}; \qquad (15)$$

$V(t)$ descrește indefinit cînd t tinde către infinit. Dacă (J) corespunde unui lanț omogen, $\omega(t) = \omega$ este constant, prin urmare:

$$V(t) = V(s)\, e^{-(t-s)\omega^2}; \qquad (16)$$

$V(t)$ tinde către zero cînd t tinde către infinit. Numai dacă $\int_s^t \omega^2(u)\, du$ este convergentă nu avem concentrarea asimptotică puternică exprimată de formula (16).

În cazul general, este de reținut o împrejurare care nu se poate ivi pentru lanțurile Markov, în care ω nu poate fi nul. Dacă presupunem că

$$\sum_l f_{ll} + \sum_{l,h} x_h \frac{\partial f_{hl}}{\partial x_l} = \alpha, \qquad (17)$$

α fiind constantă, rezultă

$$V(t) = V(s) e^{(t-s)\alpha}. \qquad (18)$$

Dacă $\alpha > 0$, volumul crește indefinit, punctele se dispersează. Dacă $\alpha < 0$, volumul tinde către zero ca și în cazul lanțului Markov. În sfîrșit, dacă $\alpha = 0$, volumul rămîne invariant ca în cazul sistemelor dinamice. În acest caz, fenomenele ergodice de examinat sînt analoage cu acele ale traiectoriilor dinamice.

Exemplu

$$f_{hl} = \sum_r a_{hl}^r x_r + a_{hl}$$

cu

$$a_{hl}^r > 0, \quad a_{hl} > 0, \quad h \neq l,$$

$$a_{ll}^r < 0, \quad a_{ll} < 0,$$

Condiția (17) ne dă

$$\alpha = \sum a_{ll} \leqslant 0,$$

$$\sum_l (a_{ll}^h + a_{hl}^l) = 0.$$

Deci, dacă toți a_{ll} sînt nuli, volumul este un invariant. Dacă nu sînt toți nuli, orice volum tinde către zero cînd t tinde către infinit.

Rezultatele considerate pînă aici nu se pot transpune imediat la procesul stochastic asociat sistemului (J), (4), deoarece acest proces are loc numai în hiperplanul

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1 \qquad (19)$$

și în acest hiperplan, în domeniul închis Δ_{m-1}, caracterizat de inegalitățile

$$0 \leqslant x_k \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} \leqslant 1, \qquad (20)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Vom considera atunci, în loc de (J), sistemul obținut înlocuind pe x_m cu $1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{m-1}$ și suprimînd ultima ecuație care este dependentă de primele:

$$\frac{dx_l}{dt} = \sum_{h=1,2,\ldots,m} x_h f_{hl} \quad (l = 1, 2, \ldots, m-1). \qquad (J_1)$$

Pentru ca

$$I_{m-1} = \int_{V_{m-1}} F(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})\, dx_1 dx_2 \ldots dx_{m-1}$$

să fie un invariant al sistemului I, V_{m-1} fiind un domeniu din Δ_{m-1}, este necesar și suficient ca F să fie o soluție a ecuației

$$\frac{dF}{dt} + F\left[\sum_{h=1,2,\ldots,m-1} (f_{ll} - f_{ml}) + \sum_{\substack{h=1,2,\ldots,m \\ l=1,2,\ldots,m}} x_h\left(\frac{\partial f_{hl}}{\partial x_l} - \frac{\partial f_{hl}}{\partial x_m}\right)\right] = 0.$$

Ținînd seama de (i), această ecuație se reduce la (12), în care presupunem

$$x_m = 1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{m-1}.$$

Considerațiile dezvoltate în legătură cu (12) sînt deci valabile și pentru procesul stochastic asociat sistemului (J).

Adăugăm numai că, relațiile (5) fiind verificate oricare ar fi t, vom avea

$$V_{m-s}(t) \subset \Delta_{m-1},$$

dacă relația este satisfăcută la momentul inițial $t = s$.

Sistemul (J_1), corespunzător lanțului Markov continuu, se poate scrie

$$\frac{df_l}{dt} = \sum_{h=1,2,\ldots,m-1} p_h(f_{hl} - f_{ml}) + f_{ml}.$$
$$(l = 1, 2, \ldots, m-1). \qquad (J_1')$$

Dacă numim cu F matricea $||f_{hl} - f_{ml}||$, cu $\bar{f}$ vectorul de componente $f_{ml} (l = 1, 2, \ldots, m-1)$, cu τ matricea soluție a ecuației omogene

$$\frac{d\tau}{dt} = \tau f, \quad \tau(s) = \zeta,$$

soluția generală a ecuației (J_1') se poate scrie

$$p(t) = \tau(t)\left(\bar{p}(s) + \int_s^t \bar{f}(u)\,\tau^{-1}(u)\,du\right).$$

Condiția necesară pentru ergodicitate a soluției $\bar{p}(t)$ — independența asimptotică de datele inițiale — este prin urmare

$$\tau(t) \to 0$$
$$t \to \infty.$$

Dar, pentru ca această condiție să fie îndeplinită, este necesar și suficient ca pentru cel puțin un l să avem

$$\int_s^t f_{ll} \to \infty$$
$$t \to \infty.$$

Dar aceasta este, evident, și o condiție necesară și suficientă pentru ergodicitatea globală.

Ergodicitatea globală, exprimată prin condiția $V(t) \to 0$ cînd $t \to \infty$, este deci necesară pentru ca eventuala limită asimptotică a lui $p(t)$ să nu depindă de $p(s)$. Avem în mod sigur

$$\lim_{t\to\infty} \bar{p}(t) = \lim_{t\to\infty} \tau(t) \int_s^t \bar{f}(u)\,\tau^{-1}(u)\,du,$$

dacă ultima limită există.

Exemplu. Dacă sistemul are două stări, 1 și 2, și dacă punem

$$f_{21} = g(t), \quad -f_{11}(t) = g(t), \quad f_{21} \geqslant 0, \quad g(t) \geqslant 0,$$

sistemul (J_1') devine

$$\dot{p}_1 + [f(t) + g(t)]\,p_1 - g(t) = 0.$$

Condiția de ergodicitate globală este

$$\int_s^t [f(u) - g(u)]\,du \to \infty, \quad t \to \infty.$$

Aceasta fiind îndeplinită, găsim

$$\lim p_1(t) = \lim \frac{g(t)}{g(t) + f(t)}, \quad t \to \infty.$$

dacă limitele pentru $f(t)$ și $g(t)$, cînd $t \to \infty$, există și $g(\infty) \neq 0$. În acest caz, evident,

$$\lim p_2(t) = \lim \frac{f(t)}{f(t) + g(t)}.$$

Proprietățile ergodice ale lanțului cu legături complete (J) se pot cerceta, cel puțin în anumite cazuri, cu ajutorul lanțului Markov asociat (J_1), (7) și a relației (10).

În adevăr, dacă $p_{lk}(s, t)$ tinde către o limită cînd $t \to \infty$ și dacă această limită este independentă de condițiile inițiale, vom avea

$$\lim_{t\to\infty} p_{lk}(s, t) = \lim_{t\to\infty} \Pi_{llk}(s, s, t) = p_k.$$

O condiție pentru ergodicitatea lanțului Markov corespunzător probabilităților $\Pi_{lhk}(s, u, t)$, pentru un l și un s dați, este ca să existe h_0 și k_0 astfel ca

$$f_{h_0k_0} \geqslant \alpha > 0, \text{ oricare ar fi } t,$$

deoarece, în acest caz,

$$f_{h_0k_0} \leqslant -\alpha; \int_s^t f_{h_0k_0}(u)\,du \to \infty \text{ cînd } t \to \infty.$$

Aceasta este, dealtfel, împreună cu mărginirea funcțiilor ψ_{hk} și a derivatelor lor de ordinul întîi față de fiecare dintre argumente, o condiție suficientă pentru ca lanțul discontinuu cu legături complete generat de (1) să fie ergodic [(1), (2), (3), (7)]. Pentru un proces finit de tip Feller (6), în care avem

$$f_{hk}(p_1, p_2, \ldots, p_m; t) =$$

$$= \varphi_h(p_1, p_2, \ldots, p_m; t)\,[\varrho_{hk}(p_1, p_2, \ldots, p_m; t) - \delta_{hk}],$$

unde $\varphi_h \geqslant 0$, φ_{hk} este un sistem de probabilități, este evident suficient ca să existe un h_0 astfel ca

$$\varphi_{h_0} > \alpha > 0$$

pentru orice valori ale argumentelor.

5. *Lanțul de soluții ale sistemelor de ecuații diferențiale.* Un sistem

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{h=1,2,\ldots,m} x_h f_{hk}(x_1, x_2, \ldots, x_m; t) \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \quad (21)$$

în care f_{hk} sînt funcții mărginite și continue de toate argumentele într-un domeniu $D \times [T_1, T_2]$ din $R^n \times R$ satisfăcînd în

plus, în acest domeniu, o condiție de tip Lipschitz, are o integrală

$$x_k(t) = h_k(t, s; a_1, a_2, \ldots, a_m) \quad (k = 1, 2, \ldots, m), \quad (22)$$

continuă împreună cu derivata de ordinul întîi, aparținînd domeniului D pentru $t \in [T_1, T_2]$ dacă $a_1, a_2, \ldots, a_m$, reprezentînd poziția la momentul s, aparțin lui D și $s \in [T_1, T_2]$.

Introducînd în $f_{hk}(x_1, x_2, \ldots, x_m; t)$ valorile (22), vom obține funcțiile

$$g_{hk}(f) = f_{hk}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t); t), \quad (h, k = 1, 2, \ldots, m) \quad (23)$$

mărginite și continue pentru $t \in [T_1, T_2]$.

Fie acum sistemul liniar

$$\frac{dY_k}{dt} = \sum_{h=1,2,\ldots,m} Y_h g_{hk}(t) \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \quad (24)$$

și sistemul de m soluții $Y_{lk}(u, t)$ $(k = 1, 2, \ldots, m;\ l = 1, 2, \ldots, m)$ corespunzînd condițiilor inițiale

$$Y_{lk}(u, u) = \delta_{lk}. \quad (25)$$

Dacă notăm cu $X(u, t)$ matricea $\| Y_{lk}(u, t) \|$, această matrice este soluția determinată și unică $(u, t \in [T_1, T_2])$ a ecuației scrisă sub formă matricială

$$\frac{dY}{dt} = Y(u, t)\, g(t), \quad (g(t) = \| g_{hk}(t) \|) \quad (26)$$

care, pentru $t = u$, este egală cu matricea unitate

$$I = \| \delta_{hk} \|.$$

Să considerăm în același timp cu (26) ecuația asociată

$$\frac{dZ(u, t)}{du} = -\, g(u)\, Z(u, t), \quad Z(t, t) = I \quad (27)$$

și să arătăm că soluția $Z(u, t)$ este identică cu precedenta,

$$Z(u, t) = Y(u, t).$$

În cazul particular în care matricea g nu depinde de t, soluțiile celor două ecuații au aceeași expresie, și anume

$$Y(u, t) = Z(u, t) = I + \sum_1^\infty{}_r \frac{(t-u)^r}{r!} g_r,$$

presupunînd că membrul al doilea este convergent. Dacă $g(t)$ nu este constantă, avem

$$Y(u, t) = I + \int_u^t g(v_1)\, dv_1 + \int_u^t dv_1 \int_u^{v_1} g(v_1)\, g(v_2)\, dv_2 + \cdots$$

$$\cdots + \int_u^t dv_1 \int_u^{v_1} dv_2 \int_u^{v_2} g(v_1)\, g(v_2)\, g(v_3)\, dv_3 + \cdots$$

și

$$Z(u, t) = I + \int_u^t g(v_1)\, dv_1 + \int_u^t dv_1 \int_{v_1}^t g(v_1)\, g(v_2)\, dv_2 + \cdots$$

Să observăm imediat că integralele multiple respective sînt egale, de unde teorema enunțată.

Vom nota cu $X(u, t)$ această matrice soluție în același timp a ecuațiilor (24) și (27). Se verifică imediat că aceste matrice sînt legate prin relația lui Chapman[1]

$$X(u, t) = X(u, v)\, X(v, t);\ u, v, t \in [T_1, T_2]. \tag{28}$$

Reluînd problema ecuației (21), presupunem că domeniul D cuprinde toate cele m puncte $(\delta_{lk},\ k = 1, 2, \ldots, m;\ l = 1, 2, \ldots, m)$ și notăm cu $x(s, t)$ soluția pentru care $x_{lk}(s, s) = \delta_{lk}$ pentru orice $l = 1, 2, \ldots, m$.

Pentru fiecare dintre aceste soluții obținem o matrice

$$X_l(s, u, t).$$

Demonstrăm imediat că

$$x_{lk}(s, t) = \sum_{h=1, 2, \ldots, m} x_{lh}(s, u)\ X_{lhk}(s, u, t). \tag{29}$$

Relația dintre soluțiile ecuației liniare asociate sistemului (21) și soluțiile acestui sistem poate fi foarte utilă pentru studiul acestor soluții, mai ales că (29) ne conduce, dacă facem $u = s$, la egalitățile

$$x_{lk}(s, t) = X_{llk}(s, s, t).$$

[1] Se arată mai întîi că derivata membrului al doilea în raport cu v este nulă, ținînd seama de (24) și (27). Scriind $H(u, t) = X(u, v)\, X(v, t)$, dacă facem $v = u$, rezultă $H(u, t) = X(u, t)$, deoarece $X(u, u) = I$.

§ 5. Teorema de existență pentru procese aleatoare în lanț continuu cu legături complete

Să considerăm sistemul de ecuații care definesc procesele aleatoare în lanț continuu cu legături complete

$$\frac{dp_k}{dt} = \sum_{j=1}^{m} p_j Q_{jk}(p_1, p_2, \ldots, p_m; t), \quad t > s, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{m} p_k(t) = 1,\ p_k(s) = \delta_{ik} \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

unde funcțiile $Q_{j,k}(x_1, \ldots, x_m; t)$ mărginite și continue în variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_m$ și t în domeniul $D = \left\{ x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, m,\ \sum_{j=1}^{m} x_j = 1 \text{ și } t \geqslant s \right\}$ verifică, pe lîngă condițiile suficiente pentru ca soluția sistemului (1) să existe și să fie continue, următoarele inegalități

$$Q_{j,k}(x_1, \ldots, x_m; t) \geqslant 0 \text{ pentru } j \neq k, \tag{2}$$

$$Q_{jj}(x_1, \ldots, x_m; t) \leqslant 0 \text{ pentru } j = 1, 2, \ldots, m$$

în domeniul D.

Operațiile care conduc la ecuațiile (1) sînt suficiente pentru a pune în evidență că soluția $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_m(t)$ care are proprietatea

$$p_j(t) \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{m} p_j(t) = 1 \tag{3}$$

poate fi interpretată ca un sistem complet de probabilități a unui proces aleator cu timp continuu definit pe un cîmp de probabilități care se poate construi.

Demonstrarea existenței acestui proces este imediată. Ea rezultă folosind același procedeu prin care se arată că soluția sistemului (1) verifică condițiile (3). Într-adevăr, dacă înlocuim în $Q_{jk}(p_1(t), p_2(t), \ldots, p_m(t); t)$ pe $p_1(t), \ldots, p_m(t)$ prin funcțiile care verifică (1) și dacă notăm

$$Q_{jk}(p_1(t), \ldots, p_m(t); t) = R_{jk}(t), \tag{4}$$

cantitățile $R_{jk}(t)$ verifică de asemenea relațiile (2), adică

$$R_{jk}(t) \geqslant 0\,;\quad j \neq k,\quad R_{jj}(t) \leqslant 0,\quad \sum_{k=1}^{m} R_{jk}(t) = 0 \tag{5}$$

și prin urmare ecuațiile (1) capătă forma

$$\frac{\mathrm{d}p_k(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{m} p_j R_{jk}(t)\,;\ p_k(s) = \delta_{jk}\,;\quad k = 1, 2 \ldots m. \tag{6}$$

Ecuațiile (6) au evident aceeași soluție cu ecuațiile (1). Dar ecuațiile (6) reprezintă sistemul de ecuații ale lui Kolmogorov atașate unui proces Markov cu un număr finit de stări. Pentru un astfel de proces o teoremă de existență a fost demonstrată (v. lucrarea lui Kai Lai Chung, *Markov chains with stationary transition probabilities*, p. 7, teorema 1).

Există prin urmare un cîmp de probabilități și un proces aleator definit pe acest cîmp, avînd drept probabilități de trecere soluțiile sistemului (1).

BIBLIOGRAFIE

În afară de bibliografia generală care se găsește la sfîrșitul cap. XIV.

A. KOLMOGOROV, *Über die Analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Math. Ann., t. 104, 1931.

IDEM, *Zur Theorie der stätigen zufälligen Prozesse*, Math. Ann., 108, 1933.

IDEM, *Zur Theorie der Markoffschen Ketten*, Math. Ann., 112, 1936.

W. FELLER, *On the integroddifferential equations of purely discontinous Markov processes*, Trans. of the Ann. Math. Soc., t. 54, 1943.

A. HINCIN, *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrehnung*, Ergebnisse der Math., Springer, Berlin, 1933.

J. BARS, *Les functions aléatoires et leurs interprétation mécanique*, Revue Scientifique, ianuarie 1945.

O. ONICESCU, Procese aleatoare în lanț continuu cu legături complete. Revista Universității București, 1954.

R. RODEANU, *O teoremă privind comportarea asimptotică a lanțurilor continue în timp*, Revista Universității, nr. 8, București, 1955.

CAPITOLUL VIII

PROBABILIZAREA EVENIMENTELOR ÎN MECANICA STATISTICĂ

Obiectele mecanicii statistice sînt mărimile scalare sau vectoriale asociate unui sistem mecanic format dintr-un număr foarte mare de componente.

Aceste mărimi se prezintă, din punct de vedere matematic, ca variabile sau funcții aleatoare ale unui cîmp de probabilitate.

Constituirea adecvată a acestui cîmp este primul obiectiv al mecanicii statistice.

Mulțimea E a evenimentelor elementare constituie, în mecanica statistică clasică, spațiul fazelor al lui W. Gibbs. Evenimentele sînt mulțimile măsurabile ale acestui spațiu cu $2n$ dimensiuni, dacă n este numărul gradelor de libertate. Măsura Lebesgue a acestor mulțimi este invariantă, potrivit teoremei lui Liouville. Ea are deci o semnificație fizică și poate constitui o bază pentru constituirea unui cîmp de probabilitate. Vom arăta cum se formează cîmpul de probabilitate canonic sau cîmpurile microcanonice, după terminologia lui Gibbs.

Cîmpurile constituite pe spațiul fazelor nu reflectează, în general, evoluția în timp a sistemelor, deoarece în ele timpul nu intervine explicit.

Teorema ergodică a lui Birkhof ne poate lăsa să credem că introducerea timpului în mecanica statistică este inutilă, deoarece media în timp a unei mărimi mecanice asociată cîmpului tinde — în anumite condiții — către media sa spațială.

Condițiile de aplicare ale teoremei ergodice ne arată, însă, că limitele ei sînt mai restrînse decît apar la prima vedere, deoarece, în evoluția unui sistem mecanic cu un număr mare de

componente, intervin interacțiunile cu schimb de energie între componente, ceea ce adaugă la proprietățile mecanice ale sistemului proprietăți al căror enunț are caracteristici pur statistice.

De aceea, este necesar să luăm în considerare *spațiul fază-timp* cu $2n + 1$ dimensiuni, cea de a $2n + 1$-a dimensiune corespunzînd timpului. Secțiunea pentru fiecare t dat în acest spațiu S_{2n+1} este spațiul fază, oglindind starea sistemului la momentul t.

În acest spațiu fază-timp își găsesc semnificație două mărimi fizice deosebit de importante:

1) *numărul interacțiunilor* (violente) cu schimb de energie, dintre componentele sistemului, într-un interval de timp (t_1, t_2), pe care-l vom reprezenta prin $H(t_1, t_2)$;

2) *numărul componentelor* care intră în interacțiune în intervalul (t_1, t_2) pe care-l vom reprezenta prin $K(t_1, t_2)$.

Pentru numeroase sisteme avem $K(t_1, t_2) = 2H(t_1, t_2)$, întrucît componentele intră în interacțiune, în general, cîte două și interacțiunea durează un timp neglijabil.

Există însă împrejurări în care interacțiunile sînt multiple; în acest caz, funcțiile K și H trebuie să fie determinate fiecare în parte. Circumstanțele sînt mai complicate dacă prin interacțiuni se produc aglomerări sau disocieri de componente, în care caz cele două funcții nu sînt suficiente pentru descrierea evoluției sistemului.

În cele ce urmează ne vom ocupa numai de sistemele cele mai simple.

Deosebirea esențială între mecanica statistică clasică și cea cuantică constă în structura geometrică a spațiului fazelor.

Acest spațiu este continuu în mecanica clasică, dar discontinuu, în sensul în care urmează să fie precizat, în mecanica cuantică.

Timpul, în construirea spațiului fază-timp, poate fi considerat în ambele mecanici ca o variabilă continuă sau discontinuă, după împrejurări. Va trebui, în genere, să deosebim timpul proceselor mecanice individuale ale diferitelor componente, între două interacțiuni, timp continuu și în mecanica cuantică, de timpul care figurează în funcțiile H sau K și care poate fi, în genere, tratat ca discontinuu, ca timp spectral.

Înainte de a cerceta construirea cîmpurilor de probabilitate ale mecanicii statistice clasice, vom examina cîteva dintre problemele de repartiție care nu au așteptat precizia actuală a teoriei probabilităților pentru a căpăta o rezolvare. Cea dintîi problemă este aceea a repartiției vitezelor unui gaz. Ea a constituit piatra de încercare a diferitelor edificii ale teoriei cinetice, la început, ale mecanicii statistice clasice la urmă, precum și modelul statisticilor lui Einstein și Fermi, pe care, deși aparțin mecanicilor statistice cuantice, le vom prezenta odată cu teoria lui Maxwell-Boltzmann.

§ 1. Legea de repartiție a energiei într-un gaz

1. **Teorema lui Maxwell.** Demonstrația originală a lui Maxwell pentru legea de repartiție a vitezelor moleculelor unui gaz ideal, compus dintr-un singur fel de molecule, în echilibru termic într-un recipient, urmărește să organizeze direct spațiul euclidian al vitezelor moleculare (vitezele diferitelor molecule) cu un cîmp de probabilitate. Cîmpul de evenimente este constituit din mulțimile boreliene ale acestui spațiu, cuprinzînd în particular intervalele spațiale. Pentru construirea probabilității, se face mai întîi ipoteza simplificatoare că distribuția este continuă și că avem o densitate de repartiție.

Presupunem deci că Ω fiind un domeniu măsurabil din spațiul R^3 al vitezelor, probabilitatea ca o viteză $V(u, v, w)$ a unei molecule a gazului să se găsească în Ω este

$$P = \int_\Omega f(u, v, w)\, du\, dv\, dw. \tag{1}$$

Funcția $f(u, v, w)$ trebuie să îndeplinească condițiile de a fi pozitivă, integrabilă și

$$\int_{R^3} f(u, v, w)\, du\, dv\, dw = 1. \tag{2}$$

În limbajul obișnuit fizicienilor vom spune, conform definiției de mai sus a funcției f, că nP este numărul de molecule ale căror viteze sînt reprezentate în Ω.

Determinarea densității de repartiție f este bazată pe următoarele ipoteze:

1°. Densitatea de probabilitate ca o moleculă a gazului să aibă viteza v depinde numai de valoarea acestei viteze și se va nota $f(u^2 + v^2 + w^2)$, dacă u, v, w sînt cele trei componente rectangulare ale vectorului V.

2°. Densitatea de probabilitate ca o moleculă a gazului să aibă o componentă a vitezei într-o direcție fixă, oarecare, depinde numai de mărimea α a acestei componente și este de forma $af(\alpha^2)$, unde a **nu** depinde de α.

3°. Cele trei componente u, v, w ale vitezei V a moleculei sînt variabile aleatoare independente între ele.

Din 3° rezultă că densitatea de probabilitate a moleculelor cu viteza V este $a^3 f(u^2) f(v^2) f(w^2)$.

Comparînd cu expresia dată în 1° pentru aceeași mărime, obținem ecuația funcțională

$$f(u^2 + v^2 + w^2) = a^3 f(u^2) f(v^2) f(w^2). \tag{3}$$

Pentru demonstrația propriu-zisă a teoremei lui Maxwell rămîne numai să arătăm că unica densitate de repartiție care verifică această ecuație este cea gaussiană.

Dacă punem $f(u) = a^{-\frac{3}{2}} \varphi(u)$, găsim ecuația funcțională

$$\varphi(u^2)\, \varphi(v^2)\, \varphi(w^2) = \varphi(u^2 + v^2 + w^2), \tag{4}$$

care are ca singură soluție regulată în întreg spațiul, nulă la infinit, funcția

$$\varphi(u^2) = e^{-k^2 u^2}.$$

Prin urmare, densitatea de repartiție a moleculelor cu viteza u, v, w este

$$f(u^2 + v^2 + w^2) = h e^{-K^2(u^2+v^2+w^2)} \tag{5}$$

unde K și h sînt legate între ele prin condiția (2).

2. **Teorema lui Steinhaus.** O restrîngere a ipotezelor 1°, 2° și 3° se realizează cu ajutorul următoarei teoreme a lui Steinhaus, a cărei demonstrație o lăsăm cititorului.

Fie $u(\alpha)$, $v(\alpha)$, $w(\alpha)$ componentele carteziene ale unui vector, funcții de parametrul $\alpha (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$. Presupunem că acest vector este aproape pretutindeni regulat. Presupunem de asemenea că componenta sa $lu(\alpha) + mv(\alpha) + nw(\alpha)$ după direcția cu cosinușii directori l, m, n are o distribuție care nu depinde de acești cosinuși.

Condiția necesară și suficientă pentru independența variabilelor aleatoare $u(\alpha)$, $v(\alpha)$, $w(\alpha)$ este ca aceste variabile să fie gaussiene.

3. **Teorema lui Boltzmann.** Teorema lui Boltzmann asupra densității de repartiție după viteză a moleculelor unui gaz, închis într-un recipient A menținut la temperatură exterioară constantă, se referă nu numai la starea de echilibru statistic considerată de Maxwell, ci și la evoluția gazului pînă la realizarea acestei stări. Dacă notăm cu $f(u, v, w, t)$ densitatea de repartiție la momentul t, starea gazului este caracterizată, după Boltzmann, de funcția

$$H(t) = \int_{R^3} f \ln f \, du\, dv\, dw. \tag{6}$$

Această teoremă are următorul enunț: *$H(t)$ este o funcție monotonă necrescătoare de t; valoarea ei minimă corespunde regimului staționar și este realizată de o repartiție gaussiană.*

Demonstrația care urmează se referă numai la a doua parte a teoremei. Nu există o demonstrație satisfăcătoare pentru prima parte. În orice caz, interesul acestei prime părți transcende calculul probabilităților și deci nu își găsește locul aici.

Pentru a construi cîmpul de probabilitate, vom observa că mișcarea fiecărei molecule este rectilinie și uniformă între două ciocniri, iar în timpul unei ciocniri se face cu conservarea cantității de mișcare. Reamintim că analiza noastră se referă la un gaz monoatomic ideal. Masele diferitelor molecule sînt egale.

Să considerăm spațiul euclidian cu $3n$ dimensiuni R_{3n} și un punct P avînd coordonatele

$$u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \ldots, w_n$$

unde u_i, v_i, w_i sînt cele trei componente ale vitezei unei molecule determinate $M_i (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Dacă la un moment dat nu are loc nici o ciocnire, toate coordonatele punctului P rămîn constante.

Dacă, la un alt moment, are loc o ciocnire între componentele vitezelor după ciocnire și cele dinainte de ciocnire, ale celor două molecule care se ciocnesc, au loc relații pe care nu le reproducem

aici; aceste relații se pot încadra într-o transformare canonică, al cărei determinant funcțional este, așa cum vom vedea, egal cu unitatea.

Deci, în toate cazurile, ecuațiile mișcării punctului reprezentativ P pot fi interpretate ca o transformare a spațiului în el însuși, cu determinant funcțional egal cu unitatea, deci cu conservarea volumului.

Fie o mulțime boreliană din R_{3n} care se transformă, prin efectul mișcării, într-o mulțime boreliană cu conservarea măsurii Lebesgue corespunzătoare.

Dacă pentru moleculele gazului considerat avem

$$|u_i|, |v_i|, |w_i| \leqslant l,$$

atunci hipercubul Ω_l cu $3n$ dimensiuni

$$|u_1| \leqslant l, |v_1| \leqslant l, |w_1| \leqslant l, \ldots, |w_n| \leqslant l$$

poate fi considerat ca fiind cîmpul evenimentelor elementare ale sistemului: mulțimile boreliene sînt evenimentele, iar măsura Lebesgue a unei mulțimi raportată la $(2l)^{3n}$ este probabilitatea corespunzătoare.

Să dividem cubul w_l

$$|u_i| \leqslant l, |v_i| \leqslant l, |w_i| \leqslant l$$

în N^3 cuburi sau celule egale, cu latura $\frac{2l}{N}$, și să numerotăm aceste cuburi de la 1 la N^3. Vectorii (u, v, w) corespunzînd unuia dintre aceste cuburi diferă foarte puțin între ei, dacă **N** este suficient de mare,

$$P = p_{l,N} \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_\nu!} \tag{7}$$

cu condiția

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_\nu = n. \tag{8}$$

Să adăugăm și condiția că energia sistemului este dată

$$n_1 e_1 + n_2 e_2 + \ldots + n_\nu e_\nu = E, \tag{9}$$

unde e_i este energia cinetică corespunzătoare fiecărei molecule din celula C.

Determinarea repartiției stabile. Folosim în acest scop următorul principiu:

Repartiția stabilă este acea repartiție care corespunde celui mai mare număr de modele, adică aceea care corespunde probabilității P maxime.

Repartiția stabilă corespunde deci acelor numere $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$, care realizează minimul produsului $\Pi = n_1! n_2! \ldots n_\nu!$ sau, ceea ce este totuna, minimul expresiei

$$\ln \Pi = \sum_1^\nu{}_j \ln (n_j!),$$

ținînd seama de condițiile (8) și (9).

În ipoteza pe care o presupunem verificată, că $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ sînt mari, formula lui Stirling

$$k! = k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k} \left(1 + \frac{\theta}{|2k|}\right), \qquad 0 < \theta < 1,$$

prin urmare

$$\ln k! = \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln k - k + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \ln \left(1 + \frac{\theta}{|2k|}\right)$$

ne dă

$$\ln \Pi = \sum_1^\nu{}_j \left(n_j + \frac{1}{2}\right) \ln n_j - \sum_1^\nu{}_j n_j + \frac{\nu}{2} \ln 2\pi +$$

$$+ \sum_1^\nu{}_j \ln \left(1 + \frac{\theta_j}{|2n_j|}\right),$$

unde vom trata pe n_j ca numere continue, mari, supuse condițiilor (5) și (6).

Al doilea și al treilea termen din această egalitate sînt constanți, iar ultimul are o valoare neglijabilă față de primul, care el însuși este comparabil cu

$$I = \sum_1^\nu{}_j n_j \ln n_j,$$

al cărui minim ne va da distribuția stabilă.

Vom avea deci condițiile

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^\nu{}_j \ln n_j \, dn_j = 0, \\ \sum_1^\nu{}_j \, dn_j = 0, \quad \sum_1^\nu{}_j e_j dn_j = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

care arată că există două constante a și b pentru care

$$a + be_j + \ln n_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, \nu,$$

adică

$$n_j = Ce^{-be_j}, \tag{11}$$

unde n_j este numărul moleculelor care au energia cinetică e_j). Cum acest număr descrește dacă energia crește indefinit, b este pozitiv și vom avea

$$n_j = Ce^{-\frac{1}{2\lambda^2}(u_j^2 + v_j^2 + w_j^2)}. \tag{12}$$

Urmînd calea obișnuită pentru a trece de la discontinuu la continuu, vom presupune diviziunile din ce în ce mai fine, iar, la limită, densitatea $f_j = \frac{n_j}{n}$ de repartiție a moleculelor cu viteza (u, v, w) va fi

$$f(u, v, w) = Ce^{-\frac{1}{2\lambda^2}(u^2+v^2+w^2)}. \tag{13}$$

Cele două condiții care dau valorile constantelor C și λ sînt

$$\iiint_{R^3} Ce^{-\frac{1}{2\lambda^2}(u^2+v^2+w^2)} \, dudvdw = 1$$

și

$$\frac{1}{2} n \iiint_{R^3} (u^2 + v^2 + w^2) \, Ce^{-\frac{1}{2\lambda^2}(u^2+v^2+w^2)} \, dudvdw = E,$$

care reprezintă ecuația energiei.

Prima integrală se mai poate scrie

$$C\int_R e^{-\frac{1}{2\lambda^2}u^2} du \int_R e^{-\frac{1}{2\lambda^2}v^2} dv \int_R e^{-\frac{1}{2\lambda^2}w^2} dw = 1,$$

de unde relația

$$C\lambda^3 \sqrt{8\pi^3} = 1. \tag{14}$$

A doua integrală, după introducerea coordonatelor polare

$$u = r \sin\theta \cos\varphi, \qquad v = r \sin\theta \sin\varphi, \qquad w = r\cos\theta,$$

devine

$$\frac{1}{2} nC \int_0^\infty r^4 e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 r^2} dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = E, \tag{15}$$

deci

$$3\sqrt{8\pi^3 n} \, C\lambda^5 = E.$$

Relațiile (14) și (15) dau

$$\lambda^2 = \frac{E}{3n} = \frac{1}{3} e, \tag{16}$$

unde $e = \frac{E}{n}$ = energia medie a unei molecule și $C = \frac{\sqrt{3^3}}{\sqrt{8\pi^3 e^3}}$.

Cu aceste valori pentru λ și C, repartiția (13) este complet determinată. Potrivit principiului enunțat mai sus, aceasta este repartiția stabilă a sistemului molecular considerat.

Revenind la legea de repartiție (11), pe care o vom scrie $n_j = Le^{\frac{\varphi - e_j}{\theta}}$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ găsim că $\theta = 2\lambda^2 = \frac{2}{3} e$ și în același timp rezultă *echipartiția energiei* între diferitele molecule sau componente.

Reamintim că această repartiție se obține căutînd minimul expresiei I, pe care o mai putem scrie

$$I = n \sum_1^\nu{}_j f_j \ln f_j + n \ln n,$$

n fiind o constantă. Această expresie este minimă în același timp cu

$$J = \sum_1^n {}_j f_j \ln f_j,$$

a cărei formă limită este dată de funcția H a lui Boltzmann.

Putem deci considera că repartiția stabilă a moleculelor, după viteze, este cea care face minimă pe $H(t)$ și este în același timp repartiție gaussiană.

§ 2. Legea de repartiție a lui Planck

1. *Problema de repartiție a lui Planck.* Cîmpul electromagnetic produs într-o încăpere aproape vidă V cu pereți care reflectă vibrațiile electrice, izolată energetic de exterior, este echivalent cu un sistem de oscilatori mecanici localizați, avînd ecuații de forma

$$\frac{d^2r}{dt^2} + 4\pi^2\nu^2 r = 0.$$

Energia oscilatorului este cuantică; ea are o valoare $nh\nu$, unde ν este frecvența, $h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}$ erg·s este constanta lui Planck, iar n este un întreg.

Energia totală este $E = \sum_j n_j h\nu$, unde n_j este numărul de cuante de energie a oscilatorului r_j și are o valoare fixă, dată.

Problema este de a găsi repartizarea numerelor n_j între oscilatorii cu diverse frecvențe, pentru regimul de stabilitate statistică a sistemului.

Pentru a răspunde la această problemă vom construi cîmpul de probabilitate respectiv.

Evenimentele elementare ale cîmpului de probabilitate sînt sistemele de complexe (r_i, n_i) $(i = 1, 2, ..., N)$ unde N este numărul total al oscilatorilor. Două evenimente elementare diferă prin repartițiile diferite ale numerelor n_j de cuante de energie între diverși oscilatori.

Presupunem, ca o ipoteză de bază, că fiecare dintre aceste evenimente elementare are aceeași probabilitate p, egală cu inversul numărului total al evenimentelor elementare.

2. *Repartiția energiei între oscilatori. Principiul de probabilitate maximă.* Repartiția energiei între oscilatorii din V nu este arbitrară. Vom determina această repartiție pentru regimul de stabilitate.

Dacă numim cu g_k numărul oscilatorilor cu frecvența ν cuprinsă în intervalul I_k:

$$k\Delta \leqslant \nu < (k+1)\,\Delta,$$

și cu n_k numărul total al cuantelor de energie care corespund intervalului de frecvență I_k, fie X_k numărul complexelor corespunzătoare intervalului I_k.

Facem $k = 1, 2, ..., N$, pentru a epuiza intervalul frecvențelor posibile. Numărul total al complexelor din E care corespund repartițiilor a n_k cuante de energie între g_k oscilatori pentru $k = 1, 2, ..., N$ este $\prod_{k=1}^{N} X_k$, iar probabilitatea mulțimii constituită din aceste elemente este

$$P = p \prod_{k=1}^{N} X_k. \tag{1}$$

La repartiția stabilă din incintă se ajunge prin aplicarea unui principiu de maximum al probabilității P, principiu de origine termodinamică:

Repartiția stabilă este repartiția cea mai probabilă, sau repartiția căreia îi corespunde în E mulțimea cea mai numeroasă.

3. *Determinarea legii de repartiție.* X_k reprezintă numărul modurilor în care n_k cuante de energie se pot distribui între g_k oscilatori, știind că unui oscilator îi pot reveni mai multe cuante în același timp. X_k este dat, prin urmare, de formula combinărilor cu repetiție

$$X_k = \frac{(n_k + g_k - 1)!}{n_k!\,(g_k - 1)!}$$

sau, ținînd seamă că numerele g_k sînt mari,

$$X_k = \frac{(n_k + g_k)!}{n_k!\,g_k!}.$$

Folosind formula lui Stirling

$$X_k \cong \frac{n_k + g_k}{\sqrt{2\pi}\, n_k^{n_k+\frac{1}{2}}\, g_k^{g_k+\frac{1}{2}}},$$

din (1) rezultă

$$\ln P = \ln \frac{p}{(\sqrt{2\pi})^2} + \sum_{k=1}^{N} (n_k+g_k) \ln (n_k+g_k) - n_k \ln n_k - g_k \ln g_k, \quad (2)$$

după ce am neglijat, față de g_k și n_k, termenul $\frac{1}{2}$ de la exponent.

Maximul probabilității va fi realizat odată cu maximul membrului al doilea din (2), considerînd diversele valori posibile pentru n_k, condiționate de relația

$$\sum_{k=1}^{N} n_k h\nu = E,$$

E fiind energia totală fixă a sistemului de oscilatori.

Trebuie pentru aceasta ca

$$\sum_{k=1}^{N} (\ln (n_k + g_k) - \ln n_k)\, \delta n_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{N} h\nu \delta n_k = 0.$$

Există deci o valoare μ pentru care

$$\ln \frac{n_k + g_k}{n_k} = \mu h\nu$$

sau, cu notații mai adecvate, punînd n_ν în loc de n_k,

$$n_\nu = g_\nu \frac{1}{e^{\mu h\nu} - 1}. \quad (3)$$

Ținînd seamă că energia corespunzătoare frecvențelor din intervalul I_k este, cu noile notații,

$$E_\nu = h\nu n_\nu$$

și că, după o formulă cunoscută,

$$g_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}, \quad (4)$$

din (3) și (4) rezultă formula lui Planck de repartiție a energiei după frecvență,

$$E_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

unde am pus $\mu = \frac{1}{kT}$, T fiind temperatura absolută, iar k constanta lui Boltzmann. Procedee analoage se pot folosi pentru a prezenta repartițiile lui Einstein și Fermi.

§ 3. Fundamentarea probabilistică a mecanicii statistice

1. *Invarianții mișcării unui sistem dinamic.* Construirea probabilităților pentru un sistem dinamic oarecare se realizează cu ajutorul invarianților mișcării lui. Acești invarianți sînt, precum vom vedea în cele ce urmează, anumite varietăți din spațiul fazelor precum și măsura definită pe ele.

Fie Σ un sistem dinamic conservativ cu m grade de libertate; $q^1, q^2, \ldots, q^m$, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ coordonatele generale de poziție și momentele sale determinate pentru fiecare valoare a lui t și P punctul avînd aceste numere drept coordonate carteziene în spațiul S — euclidian cu $2m$ dimensiuni — al fazelor, pe care-l asociem sistemului Σ.

Dacă funcția de stare (hamiltonianul) $H(P) = H(q^1, q^2, \ldots, q^m; p_1, p_2, \ldots, p_m)$ îndeplinește anumite condiții de regularitate în tot spațiul S, funcția vectorială $P(t)$ care descrie mișcarea punctului reprezentativ P al lui Σ în S este soluția

$$P(t) = F(P_{t_0};\ t - t_0), \quad (1)$$

determinată și unică, a sistemului

$$\frac{dP}{dt} = \Phi(P); \quad (P(t))_{t=t_0} = P_{t_0}, \quad (2)$$

unde $\frac{dP}{dt} = \Phi(P)$ reprezintă sistemul canonic

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{dq^i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad (3)$$

iar P_{t_0} este un punct dat, arbitrar, în S.

Proprietățile individuale ale mișcării (1) rezultă imediat considerînd pe (1) ca o transformare depinzînd de un parametru.

Punînd pentru uniformitate $P(t) = P_t$ relațiile (1) și (2) ne dau inegalitățile

$$P_{t_1} = F(P_{t_0}\ ;\ t_1 - t_0);\ P_{t_2} = F(P_{t_1}\ ;\ t_2 - t_1) = F(P_{t_0}\ ;\ t_2 - t_0),$$

care arată cum se compun mișcările succesive; de asemenea

$$P_{t_0} = F(P_t\ ;\ t_0 - t),$$

care reprezintă reversibilitatea mișcării, și, în sfîrșit,

$$P_{t_0} = F(P_{t_0}\ ;\ 0),$$

care identifică condiția inițială. Faptul că mișcările formează un grup de-a lungul unei traiectorii determinate rezultă de altfel imediat din definiția acestei mișcări. Ceea ce trebuie în special reținut este faptul că grupul operează în același timp asupra întregului spațiu S, a cărui mișcare, pe care o vom numi curgere, interesează cu deosebire mecanica statistică.
Alegînd momentul inițial, dealtfel arbitrar, $t_0 = 0$, vom reprezenta curgerea prin grupul continuu de transformări

$$P_t = F(P_0\ ;\ t) \tag{4}$$

ale spațiului S în el însuși.

2. *Invarianții geometrici ai curgerii. Sisteme ergodice.* Două tipuri de varietăți invariante se prezintă imediat.

a) Traiectoria unui punct oarecare din F rămîne identică cu ea însăși în tot procesul curgerii; ea este deci o varietate de dimensiune 1 invariantă.

Observăm că două traiectorii care au un punct comun sînt identice. Putem deci spune că spațiul S se descompune într-o mulțime de traiectorii invariante, disjuncte, reprezentînd liniile de curgere ale fluidului respectiv.

Determinarea structurii acestei mulțimi a traiectoriilor este o problemă deosebit de importantă pentru stabilirea proprietăților curgerii spațiului S.

b) Varietățile de energie constantă $H(q^1, q^2, \ldots, q^m; p_1, p_2, \ldots, p_m) = E$.

Ecuațiile (3) ne arată că H, presupusă că nu depinde explicit de timp, este constantă în timpul mișcării,

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum_1^m{}_i \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} + \sum_1^m{}_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} =$$

$$= \sum_1^m{}_i \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_1^m{}_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} = 0.$$

Valoarea constantă a lui H reprezintă energia sistemului. Toate punctele P din spațiul S, pentru care

$$H(P) = E,$$

corespund sistemelor cu aceeași energie.

Deoarece un sistem își păstrează energia în timpul mișcării, traiectoria punctului P respectiv rămîne pe aceeași varietate $H(P) = H(P_0)$ de energie constantă. Această varietate are $2n - 1$ dimensiuni.

Vom presupune în cele ce urmează că *nu există și alte integrale prime uniforme în afară de integrala energiei.* Prin urmare, nu avem varietăți uniforme invariante de dimensiunea $2m - 1$ în afară de acele de energie constantă.

Sistemele avînd această proprietate sînt ergodice.

3. *Componentele unui sistem dinamic.* Știm că, în lipsă de interacțiune între două sisteme dinamice Σ_1 și Σ_2 avînd ca hamiltonieni $H_1(P_1)$ și $H_2(P_2)$, sistemul constituit din ele are hamiltonianul $H_1(P_1) + H_2(P_2)$. Spațiul fazelor S este produsul cartezian al spațiilor S_1 și S_2. Vom scrie

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

și vom numi sistemele Σ_1 și Σ_2, presupuse ca fiind fără interacțiune între ele, componente ale sistemului Σ.

Desigur că în acest caz avem varietatea invariantă $H = H_1 + H_2 = E$ de $2m - 1$ dimensiuni. Însă, în același timp, avem în timpul mișcării $H_1 = E_1$ și $H_2 = E_2$ (cu $E_1 + E_2 = E$), ca varietăți invariante de dimensiunile $2m_1 - 1$, respectiv, $2m_2 - 1$. Traiectoriile punctelor respective P_1 și P_2 sînt situate pe aceste varietăți. Dar traiectoria punctului $P(P_1, P_2)$ se află pe varietatea $H = E$.

Mai general, este suficient ca $H = H_1 + H_2 + \ldots + H_n$, energiile H_i avînd variabile separate, pentru ca să numim siste-

mele corespunzătoare componente ale sistemului Σ. În general, componentele sînt în interacțiune și, în timpul mișcării, energiile separate H_i pot varia fără ca H să varieze.

Exemple de componente ale unui sistem. Un gaz constituit din molecule identice, perfect elastice, ținut la temperatură exterioară constantă, închis într-un recipient cu pereții interiori lucii și perfect elastici, este un sistem cu atîtea componente cîte molecule există. Dacă mai presupunem că forțele exterioare care acționează asupra moleculelor sînt neglijabile, atunci

$$H = \sum_1^N{}_i H_i, \quad H_i = \frac{1}{2} m(u_i^2 + v_i^2 + w_i^2).$$

Un alt exemplu este o moleculă liberă sau sub influența unei forțe elastice. În acest din urmă caz

$$H = \frac{1}{2} m(\dot{x}_i^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + k^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = H_1 + H_2 + H_3,$$

unde

$$H_i = \frac{1}{2} m\dot{x}_i^2 + k^2 x_i^2 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

În primul caz, componentele erau sisteme fizice autonome. În al doilea caz, ele pot fi doar interpretate ca atare.

Problema care rămîne de examinat este următoarea: Se poate descompune o varietate $H = E$ în două sau mai multe părți disjuncte cu aceeași dimensiune $2m - 1$, invariante pentru grupul de transformări (4) în sensul că traiectoria corespunzătoare unui punct într-una din aceste părți rămîne în întregime în această parte?

Această problemă va fi examinată mai departe.

4. *Măsură invariantă în spațiul fazelor.*

Teorema I. *Fie A o mulțime măsurabilă Lebesgue în spațiul S al fazelor sistemului Σ și $m(A)$ măsura ei; dacă A_t este transformata acestei mulțimi prin* (4), *atunci*

$$m(A_t) = m(A).$$

Este suficient, pentru a demonstra această teoremă a lui Liouville, să arătăm că volumele se conservă, deci este suficient să demonstrăm că determinantul funcțional al transformării (4) este $+1$.

Pentru a simplifica demonstrația, vom schimba notațiile. Fie

$$\frac{dx^i}{dt} = A^i(x^1, x^2, \ldots, x^{2m}) \quad (i = 1, 2, \ldots, 2m) \tag{5}$$

sistemul canonic și

$$x^i = F^i(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^{2m}; \ t) \tag{6}$$

soluția sa. Sistemul (6) este o altă formă a transformării (4) pentru fiecare t. Fie

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x_0^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x_0^1} & \cdots & \frac{\partial x^{2m}}{\partial x_0^1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial x_0^{2m}} & \frac{\partial x^2}{\partial x_0^{2m}} & \cdots & \frac{\partial x^{2m}}{\partial x_0^{2m}} \end{vmatrix}$$

determinantul funcțional al transformării la un moment dat t. Vom avea

$$\frac{dD}{dt} = \sum_1^{2m}{}_i D_i,$$

unde D_i este determinantul care se obține din D dacă derivăm în raport cu t elementele coloanei i. Ținînd seamă că se poate inversa ordinul de derivare și avînd în vedere și ecuațiile diferențiale date (5), avem

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x_0^k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_0^k}\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial A^i}{\partial x_0^k} = \sum_1^{2m}{}_l \frac{\partial A^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial x_0^k};$$

deci,

$$D_i = \sum_1^{2m}{}_l \frac{\partial A^i}{\partial x^l} D_{il},$$

unde D_{il} se obține din D înlocuind coloana i cu coloana l, ceea ce dă $D_{il} = 0$ pentru $l \neq i$ și $D_{ii} = D$. Prin urmare,

$$D_i = D \sum_1^{2m}{}_i \frac{\partial A^i}{\partial x^i},$$

de unde

$$\frac{dD_i}{dt} = D \sum_{1}^{2m}{}_i \frac{\partial A^i}{\partial x^i}.$$

Pentru sistemul (3) se verifică imediat că

$$\sum_{1}^{2m}{}_i \frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0,$$

ceea ce dă rezultatul $D = \text{const}$. Cum pentru $t = 0$ transformarea (4) este identică, rezultă $D = 1$.

Teorema lui Liouville este demonstrată.

A doua teoremă generală asupra extensiunii în fază, numele obișnuit în mecanica statistică pentru $m(A)$, este următoarea:

Teorema II. *$m(A)$ este invariantă pentru orice transformare canonică.*

Teorema lui Liouville este numai un caz particular al acestei teoreme, deoarece transformarea (4) este canonică.

O transformare

$$P(q^1, q^2, ..., q^m;\ p_1, p_2, ..., p_m) \to Q(r^1, r^2, ..., r^m;\ s_1, s_2, ..., s_m)$$

a spațiului fazelor în el însuși este canonică dacă conservă ecuațiile canonice, sau, ceea ce este echivalent, dacă $K(Q)$ fiind o funcțiune de punctul Q convenabil aleasă, expresia

$$\sum_{1}^{m}{}_i p_i \delta q^i - H\delta t - \left(\sum_{1}^{m}{}_i s_i dr^i - K\delta t\right) = \delta V(q^1, ..., q^m; r^1, ..., r^m, t) \tag{7}$$

este o diferențială totală exactă.

Rezultă

$$\frac{\partial V}{\partial q^i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial r^i} = s_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \tag{8}$$

$$K - H = \frac{\partial V}{\partial t}. \tag{9}$$

Vom scrie, prescurtat, în calculul ce urmează,

$$\frac{\partial V}{\partial q^i} = A_i, \quad \frac{\partial V}{\partial r^i} = B_i.$$

Din (8) rezultă

$$\frac{\partial A^i}{\partial q^l} + \sum_{1}^{m}{}_h \frac{\partial A_i}{\partial r^h} \cdot \frac{\partial r^h}{\partial q^l} = 0; \quad \sum_{1}^{m}{}_h \frac{\partial A_i}{\partial r^h} \frac{\partial r^h}{\partial p_l} = \delta_{il},$$

$$\delta_{il} = \begin{cases} 0, & i \neq l, \\ 1, & i = l, \end{cases}$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial q^l} + \sum_{1}^{m}{}_h \frac{\partial B_i}{\partial r^h} \frac{\partial r^h}{\partial q^l} = -\frac{\partial s_i}{\partial q^l}; \quad \sum_{1}^{m}{}_h \frac{\partial B_i}{\partial r^h} \frac{\partial r^h}{\partial p_l} = -\frac{\partial s_i}{\partial p_l},$$

$$i, l = 1, 2, ..., m.$$

Dacă înlocuim în determinantul funcțional al transformări

$$\Delta = \frac{D(r^1, ..., r^m;\ s_1, ..., s_m)}{D(q^1, ..., q^m;\ p_1, ..., p_m)}$$

derivatele $\frac{\partial s_i}{\partial q^l}$ și $\frac{\partial s_i}{\partial p_l}$ $(i, l = 1, 2, ..., m)$ prin expresiile lor de mai sus, acest determinant se reduce imediat la produsul

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial r^1}{\partial p_1} & \frac{\partial r^2}{\partial p_1} & \frac{\partial r^m}{\partial p_1} \\ \frac{\partial r^1}{\partial p_2} & \frac{\partial r^2}{\partial p_2} & \frac{\partial r^m}{\partial p_2} \\ \frac{\partial r^1}{\partial p_m} & \frac{\partial r^2}{\partial p_m} & \frac{\partial r^m}{\partial p_m} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial q^1} & \frac{\partial B_m}{\partial q^1} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial B_1}{\partial q^m} & \frac{\partial B_m}{\partial q^m} \end{vmatrix} = 1,$$

ținînd seama de relațiile precedente — grupul al doilea din prima linie — și de faptul că

$$\frac{\partial B_i}{\partial q^k} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^i \partial q^k} = \frac{\partial A_k}{\partial r^i}.$$

Teorema II este astfel demonstrată.

5. *Analogia hidrodinamică. Ecuația lui Jacobi.* Ecuațiile (8) și (9) se pot interpreta în mod convenabil pentru a preciza analogia cu un fluid a deplasării spațiului fazelor în el însuși.

Să considerăm un sistem de $2m$ parametri $r^i = \alpha_i$; $s_i = \beta_i$, $i = 1, 2, ..., m$, și să alegem funcția de stare $k \equiv 0$.

Dacă ținem seamă de (8), ecuația (9) se poate scrie

$$H\left(q^1, q^2, \ldots, q^m, \frac{\partial V}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q^m}\right) + \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \qquad (10)$$

V fiind o funcție de m parametri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ care verifică această ecuație (o integrală completă) $V = V(q^1, q^2, \ldots, q^m; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, t)$. Soluția sistemului se obține scriind

$$\frac{\partial V}{\partial q^i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

sistem care dă cele $2m$ variabile (q^i, p_i) $(i = 1, 2, \ldots, m)$ în funcție de t și de parametrii α_i, β_i.

Pe de altă parte, dacă considerăm în spațiul $H = E$ un fluid incompresibil și irotațional, cu presiunea interioară nulă, viteza derivă dintr-un potențial și ecuația de mișcare este de forma (10).

6. *Cîmpul de probabilitate pe S. Sisteme canonice. Distribuție canonică.* Vom presupune că sistemul Σ este canonic. Aceasta înseamnă, prin definiție, că integrala

$$\psi(\alpha) = \int_S e^{-\alpha H}\, dS \qquad (11)$$

există pentru orice $\alpha > 0$ *).

Observăm, în același timp, că pentru orice mulțime măsurabilă A din S, integrala

$$I_\Delta = \int_\Delta e^{-\alpha H}\, dS$$

este un invariant pentru ecuațiile (4), deoarece, pe baza acestor ecuații,

$$\int_\Delta e^{-\alpha H}\, dS = \int_{\Delta_0} e^{-\alpha H_0}\, dS_0.$$

Putem considera deci ca probabilitate a mulțimii A valoarea

$$M(A) = \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_A e^{-\alpha H}\, dS, \ldots \qquad (12)$$

care îndeplinește condițiile generale ale unei probabilități.

*) Admitem că energia sistemului, ale cărei valori sînt date de H, are numai valori pozitive. Dacă presupunem că energia unui sistem are un minim finit, ne putem aranja, alegînd constanta arbitrară de care dispunem pentru energia potențială, ca acest minim să fie zero.

Faptul că am determinat pe S un cîmp de probabilitate numai cînd sistemul este canonic nu reprezintă o adevărată restricție decît din punct de vedere matematic, deoarece obiectele cele mai interesante ale mecanicii statistice sînt chiar aceste sisteme, pe care W. Gibbs le-a denumit canonice.

7. *Valori medii. Valoarea medie a energiei.* Fie $f(P)$ o funcție măsurabilă de fază. Ea definește pentru cîmpul de probabilitate o variabilă aleatoare. Dacă integrala

$$\bar{f} = \int_S \frac{1}{\psi(\alpha)} e^{-\alpha H(P)} f(P)\, dP \qquad (13)$$

există, ea definește valoarea medie a variabilei $f(P)$. În particular, dacă $f(P)$ este funcția caracteristică a unei mulțimi măsurabile A, integrala de mai sus este identică cu $P(A)$ dat de (12).

Pentru energia $H(P)$, considerată ca variabilă aleatoare, integrala (13) devine [1]

$$\bar{H} = \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_S e^{-\alpha H(P)} H(P)\, dP, \qquad (14)$$

iar (11), prin derivare în raport cu α ne dă

$$\frac{d\psi(\alpha)}{d\alpha} = -\int_S e^{-\alpha H(P)} H(P)\, dP,$$

de unde

$$\bar{H} = -\frac{d \ln \psi(\alpha)}{d\alpha}. \qquad (15)$$

Dispersia energiei. Vom pune

$$\Delta^2 = \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_S e^{-\alpha H(P)} [H(P) - \bar{H}]^2\, dP,$$

de unde

$$\Delta^2 = \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_S e^{-\alpha H(P)} H^2(P)\, dP - \bar{H}^2 \qquad (16)$$

[1] Se verifică imediat că momentele de orice ordin ale energiei există.

sau, deoarece

$$\frac{d^2\psi(\alpha)}{d\alpha^2} = \int_S e^{-\alpha H(P)} H^2(P)\, dP,$$

rezultă

$$\frac{d^2\psi(\alpha)}{d\alpha^2} = \Delta^2 + \overline{H}^2.$$

Această egalitate arată că $\frac{d^2\psi(\alpha)}{d\alpha^2} > 0$, deci $\frac{d\psi(\alpha)}{d\alpha}$ este crescătoare cu α.

De aici rezultă că ecuația

$$\frac{\psi'(\alpha)}{\psi(\alpha)} + a = 0 \tag{17}$$

are o singură rădăcină reală. În adevăr, funcția

$$h(\alpha) = e^{\alpha a}\psi(\alpha),$$

pozitivă pentru $\alpha > 0$, tinde evident către infinit cînd α tinde către infinit; $\ln h(\alpha)$ tinde de asemenea către infinit cînd α tinde către infinit și

$$\frac{d^2 \ln h(\alpha)}{d\alpha^2} = \frac{d^2 \ln \psi(\alpha)}{d\alpha^2}.$$

Însă

$$\frac{d^2 \ln\psi(\alpha)}{d\alpha^2} = \frac{\psi(\alpha)\psi''(\alpha) - [\psi'(\alpha)]^2}{\psi^2(\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_S \left[H + \frac{\psi'(\alpha)}{\psi(\alpha)}\right]^2 e^{-\alpha H(P)}\, dP. \tag{18}$$

Deci, $\frac{d^2 \ln h(\alpha)}{d\alpha^2} > 0$, ceea ce arată că $h(\alpha)$ este convexă. Ea are un *minim* și unul singur. În acest punct derivata ei este nulă, deci ecuația (17) are o rădăcină reală determinată și unică.

Ținînd seamă de (16) și (18), rezultă pentru dispersie expresia simplă

$$\Delta^2 = \frac{d^2 \ln \psi(\alpha)}{d\alpha^2}. \tag{19}$$

Compunerea funcțiilor $\psi(\alpha)$. Dacă Σ_1 și Σ_2 sînt componentele sistemului Σ ($\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$), aceasta înseamnă că

$$H = H_1 + H_2.$$

Dacă

$$\psi_1(\alpha) = \int_{S_1} e^{-H_1(P_1)}\, dP_1; \quad \psi_2(\alpha) = \int_{S_2} e^{-H_2(P_2)}\, dP_2,$$

deoarece $H_1(P) = H_1(P_1)$, $H_2(P) \equiv H_2(P_2)$ cu $P_1 \in S_1$, $P_2 \in S_2$, vom avea

$$\psi_1(\alpha)\,\psi_2(\alpha) = \int_{S_1 \times S_2} e^{-\alpha(H_1(P)+H_2(P))}\, dP_1\, dP_2 = \int_S e^{-\alpha H(P)}\, dP,$$

prin urmare

$$\psi_1(\alpha)\,\psi_2(\alpha) = \psi(\alpha), \tag{20}$$

egalitate care reprezintă legea de compunere a funcțiilor $\psi(\alpha)$.

8. *Măsura invariantă pe varietatea* $H = E$. Să considerăm o schimbare de coordonate în S, care introduce energia E ca una dintre coordonate,

$$\left.\begin{aligned} x^l &\equiv E = H(q^1, q^2, \ldots, p_m) \\ x^i &= f^i(q^1, q^2, \ldots, p_m) \\ (i &= 1, 2, \ldots, 2m;\ i \neq l) \end{aligned}\right\}. \tag{21}$$

Să observăm mai întîi că dacă noile coordonate sînt astfel că

$$x^1 = q^1,\ x^2 = q^2, \ldots, x^m = q^m;\ x^{m+1} = E, \tag{22}$$
$$x^{m+2} = p_2, \ldots, x^{2m} = p_m,$$

determinantul funcțional al transformării

$$D = \frac{D(x^1, x^2, \ldots, x^{2m})}{D(q^1, q^2, \ldots, p^m)} \tag{23}$$

are valoarea

$$D = \frac{\partial H}{\partial p_1}. \tag{24}$$

Să considerăm acum o transformare

$$y^i = g^i(q^1, \ldots, p_m) \ (i = 1, 2, \ldots, 2m)$$

determinată astfel ca $y^1, y^2, \ldots, y^{2m-1}$ să constituie un sistem de coordonate pe varietatea $H = E$, ortogonal într-un punct M de pe această varietate și în S. În acest caz, vom avea

$$D_M = \left(\frac{D(y^1, \ldots, y^{2m})}{D(q^1, \ldots, p_m)}\right)_M = 1. \tag{25}$$

Curba $y^l = y^l_M (l = 2, 3, \ldots, 2m)$ este normală la varietatea $H = E$ în M. Efectuînd acum transformarea

$$x^1 = K(y^1, y^2, \ldots, y^{2m}) = H(q^1, q^2, \ldots, p_m), \tag{26}$$
$$x^l = x^l \quad (l = 2, \ldots, 2m)$$

rezultă imediat că

$$\frac{D(x^1, x^2, \ldots, x^{2m})}{D(y^1, y^2, \ldots, y^{2m})} = \frac{\partial K}{\partial y^1} = \text{grad } H, \tag{27}$$

unde

$$|\text{grad } H| = \left[\left(\frac{\partial H}{\partial q^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial q^2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial H}{\partial p_m}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Prin urmare, compunînd (25) cu (27), obținem

$$\left(\frac{D(x^1, x^2, \ldots, x^{2m})}{D(q^1, q^2, \ldots, p_m)}\right)_M = \frac{D(x^1, x^2, \ldots, x^{2m})}{D(y^1, y^2, \ldots, y^{2m})} \left(\frac{D(y^1, y^2, \ldots, y^{2m})}{D(q^1, q^2, \ldots, p_m)}\right)_M = |\text{grad } H|.$$

Această relație locală are caracter invariant. Ținînd seama că $d\sigma = dx^2 dx^3 \ldots dx^{2m}$ reprezintă elementul de volum de pe varietatea $H = E$, vom avea, notînd cu dP elementul de volum din spațiul fazelor,

$$\int_\Delta dP = \int_\Delta dE \frac{d\sigma}{|\text{grad } H|} \tag{28}$$

pentru orice domeniu Δ. Cum dE este invariant rezultă că pentru orice mulțime măsurabilă A din varietatea $H = E$,

$$m(A) = \int_A \frac{d\sigma}{|\text{grad } H|} \tag{29}$$

este un invariant pentru curgerea (4). Avem astfel realizată o măsură invariantă pe suprafețele $H = E$. Cu ajutorul acestei măsuri se poate construi un cîmp de probabilitate pe fiecare dintre aceste suprafețe.

9. *Distribuenta și funcția de structură a lui Hincin.* Vom presupune că varietățile $H = E$ sînt compacte [1]. Se poate deduce ușor că aceste varietăți sînt simple, fără puncte multiple, din faptul că două varietăți $H = E$, $H = E'$, oricît de vecine, nu au puncte în comun.

Numim distribuentă funcția pozitivă și crescătoare cu E

$$\Phi(E) = \int_{0 \leqslant H \leqslant E} dP. \tag{30}$$

Avem, evident, ca în (28),

$$\Phi(E) = \int_{0 \leqslant H \leqslant E} dE \frac{d\sigma}{|\text{grad } H|} = \int_0^E de \int_{H=e} \frac{d\sigma}{|\text{grad } H|},$$

de unde, dacă introducem cu Hincin, *funcția de structură*

$$\Omega(e) = \int_{H=e} \frac{d\sigma}{|\text{grad } H|} = m(H = e), \tag{31}$$

care este o densitate a distribuției energiei, avem

$$\Phi(E) = \int_0^E \Omega(e)\, de. \tag{32}$$

10. *Cîmpul de probabilitate pe $H = E$. Distribuția microcanonică.* Măsura invariantă $\mu(A)$ și funcția $\Omega(e)$ îngăduie să definim probabilitatea pentru mulțimile măsurabile μ pe varietatea $H = E$,

$$\mu(A) = \frac{1}{\Omega(E)} \int_A \frac{d\sigma}{|\text{grad } H|}. \tag{33}$$

Această lege de calcul al probabilității se numește, după W. Gibbs, microcanonică.

---

[1] Cazul compacității varietății $H=E$ este curent în mecanica statistică, dar nu este așa de general încît să lăsăm de-o parte și cazul în care varietățile nu sînt compacte, caz pe care însă nu-l considerăm aici.

Valoarea medie a unei variabile aleatoare $f(Q)$ $[H(Q) = E]$ este exprimată de integrala, presupusă existentă,

$$M(f) = \frac{1}{\Omega(E)} \int_{H=E} f(Q) \frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|} = \frac{1}{\Omega(E)} \frac{d}{dE} \int_{H<E} f(P)\, dP. \quad (34)$$

11. *Echipartiția energiei.* Considerînd variabila aleatoare pe varietatea $H = E$ de energie dată, produsul $p_i q_i$ sau, potrivit ecuațiilor (3), $p_i \frac{\partial H}{\partial p_i}$, valoarea sa medie, aplicînd relația (22) și teorema lui Stokes, este

$$M(p_i \dot{q}^i) = \frac{1}{\Omega(E)} \int_{H=E} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|} = \frac{1}{\Omega(E)} \int_{H<E} dv.$$

Deci, folosind (11) și (19),

$$M(p_i \dot{q}^i) = \Phi(E) \Big/ \frac{d\Phi(E)}{dE}. \quad (35)$$

Produsul $p_i \dot{q}^i$ este dublul energiei cinetice corespunzătoare coordonatei q^i, iar valoarea medie a energiei acestei componente este aceeași oricare ar fi coordonata q^i.

Notînd

$$\theta = M(p_i \dot{q}^i),$$

vom avea

$$\frac{1}{\theta} = \frac{d \ln \Phi(E)}{dE}. \quad (36)$$

Formulele (23) sau (24) exprimă teorema clasică a echipartiției energiei E între diferitele componente reprezentate de cele m grade de libertate.

12. *Repartiția energiei în spațiul fazelor.* Reluînd probabilitatea definită pe S prin formula (12) și (28), găsim

$$M(A) = \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_A e^{-\alpha H(P)}\, dP = \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_A e^{-\alpha E}\, dE \frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|}.$$

Dacă mulțimea A este constituită din punctele cuprinse între suprafețele $H = E_1$ și $H = E_2 (E_1 < E_2)$,

$$M(A) = \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_{E_1}^{E_1} e^{-\alpha E}\, dE \int_{H=E} \frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|},$$

adică

$$M(A) = \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_{E_1}^{E_2} e^{-\alpha E}\, \Omega(E)\, dE. \quad (37)$$

Prin urmare, densitatea de repartiție a energiei sau, în termeni proprii, a variabilei aleatoare $H(P)$ este

$$\rho(E) = \frac{1}{\psi(\alpha)} e^{-\alpha E}\, \Omega(E) \quad (38)$$

avînd, bineînțeles,

$$\int_0^\infty \rho(E)\, dE = 1$$

și convenind ca, pentru $x < 0$, să luăm $\rho(x) = 0$, distribuția se poate considera definită pe întreaga axă reală.

13. *Compunerea funcțiilor de structură și a densităților de repartiție* $\rho(E)$. După relația (15) și folosind relația (32), avem:

$$\Phi(E) = \int_{H<E} dP = \int_{H_1<E} dP_1 \int_{H_2<E-H_1} dP_2 = \int_0^E \Omega_2(E - H_1)\, dP_1$$

sau

$$\Phi(E) = \int_0^E \Omega_2(E - H_1)\, \Omega_1(E_1)\, dE_1.$$

Dacă folosim încă o dată (32), derivînd în raport cu E, găsim:

$$\Omega(E) = \int_0^E \Omega_1(E_1)\, \Omega_2(E - E_1)\, dE_1. \quad (39)$$

Această relație se poate încă scrie

$$\Omega(E) = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_1(E_1)\, \Omega_2(E - E_1)\, dE_1, \quad (39')$$

ținînd seama că

$$\Omega(a) = 0$$

pentru

$$a < 0.$$

Ținînd seama de relația (38), avem

$$\int_0^\infty \rho_1(E_1)\, \rho_2(E - E_1)\, dE_1 = \frac{e^{-\alpha E}}{\psi_1(\alpha)\, \psi_2(\alpha)} \int_0^E \Omega_1(E_1)\, \Omega_2(E - E_1)\, dE_1.$$

Relațiile (39) și (20) ne dau legea de compunere

$$\rho(E) = \int_0^\infty \rho_1(E_1)\, \rho_2(E - E_1)\, dE_1$$

sau, convenind că $\rho(a) = 0$, dacă $a < 0$, în concordanță cu (38) și cu extinderea analoagă pentru $\Omega(E)$,

$$\rho(E) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_1(E_1)\, \rho_2(E - E_1)\, dE_1. \tag{40}$$

Legea (40) de compunere a densităților de repartiție canonică a energiei este valabilă fără ca variabilele H_2 și $H_2(H_1 + H_2 = H)$ să fie independente. Din aceasta se obține imediat relația

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\, \varphi_2(t) \tag{40'}$$

între funcțiile caracteristice ale variabilelor H_1, H_2 și $H = H_1 + H_2$.

14. *Observație relativă la generalitatea sistemelor canonice.* Expresia

$$\psi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha E}\, \Omega(E)\, dE \tag{41}$$

este deosebit de comodă pentru a lămuri pînă la ce grad sistemele canonice nu sînt prea particulare. Aceasta rezultă din comportarea funcției

$$\Omega(E) = \int_{H=E} \frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|}$$

pentru valorile lui E cînd $E \to \infty$.

Nu examinăm aici problema în generalitatea ei. Dăm numai un exemplu care interesează teoria cinetică și care ilustrează observația noastră.

Dacă

$$H = \frac{1}{2}\sum_1^m {}_i\, p_i^2$$

avem $|\operatorname{grad} H| = \sqrt{\sum_1^m {}_i\, p_i^2}$, deci $\Omega(E) = \frac{k}{\sqrt{E}}$; deci, $\psi(\alpha) = k\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha E}}{\sqrt{E}}\, dE$ există. Un gaz ideal este deci un sistem canonic.

15. *Indecompozabilitate metrică a varietății* $H = E$. Fie E o valoare a energiei și domeniile $H < E$, $H \geqslant E$. Fiecare dintre aceste domenii este un invariant pentru curgere. Măsura (12) invariantă a primului domeniu este

$$M(H < E) = \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_{H<E} e^{-\alpha(P)}\, dP > 0,$$

iar cea relativă la cel de-al doilea domeniu este

$$M(H \geqslant E) = \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_{H \geqslant E} e^{-\alpha H(P)}\, dP,$$

de asemenea strict pozitivă. Suma lor este 1. Spațiul fazelor este, deci, decompozabil în două (și, deci, în oricîte) domenii invariante de măsură diferită de zero.

Nu este același lucru, în general, pentru varietatea invariantă $H = E$.

Vom spune că această varietate este *metric invariantă*, sau mai precis *P-invariantă, dacă* V_1, V_2 *reprezentînd părți invariante și complementare ale varietății* $H = E$, *una dintre egalitățile* $M(V_1) = 0$, $M(V_2) = 0$ *este verificată.*

Condiția $M(V_i) = 0$ ($i = 1$ sau 2) nu implică pe aceea că V_i este măsurabilă, ci numai următorul fapt: orice mulțime măsurabilă cuprinsă în V_i este de măsură nulă.

16. *Stabilitatea valorii medii.* **Teorema ergodică.** O mărime observabilă sau măsurabilă asociată unui sistem dinamic este, în genere, valoarea medie a unei variabile aleatoare în S sau pe $H = E$.

Teorema ergodică pune în deosebit relief caracterul de stabilitate al valorii medii precum și legătura strînsă dintre această valoare medie și aceea care rezultă din diferite probe experimentale eșalonate în timp.

Dacă $f(P)$ *este o variabilă aleatoare în spațiul* S *sau pe* $H = \Sigma$, *integrabilă, atunci*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(P_s)\, ds = \hat{f}(P_0) = \hat{f}(P_u), \tag{42}$$

cu $P_u = F(P_0, u)$ *oricare ar fi* u *pozitiv sau negativ, aproape pentru orice* P_0.

Înainte de a trece la demonstrarea acestei teoreme fundamentale în condițiile care ne interesează aici, vom face observația că energia, ca variabilă aleatoare, joacă un rol foarte special în legătură cu teorema lui Birkhof.

Energia fiind constantă în timp, dacă punem $f(P_s) = H(P_s)$ teorema (42) este banală. La fel, dacă $f(P_s) = K(H(P_s))$. O funcție oarecare $f(P)$, cînd $P \in S$, se poate prezenta sub forma următoare

$$f(P) = g(Q, E),$$

unde Q este un punct pe varietatea $H = E$. Deci,

$$f(P_s)\, g(Q_s, E_s) = g(Q_s, E).$$

Prin urmare, teorema ergodică pentru sistemele dinamice prezintă interes numai în ce privește variabilele aleatoare definite pe varietățile $H = E$.

Teorema ergodică redusă. *Fie V o parte invariantă, de măsură $m(A)$ diferită de zero, a varietății compacte $H = E$, și $f(P)$ o variabilă aleatoare mărginită, definită pe V și integrabilă.*

Vom avea

1°. *convergența exprimată de relația* (42);

2°. *egalitatea*

$$\hat{f}(P_0) = \int_V f(P)\, m(\mathrm{d}P) = \frac{1}{\Omega(E)} \int_V f(P) \frac{\mathrm{d}\sigma}{|\operatorname{grad} H|}, \qquad (43)$$

cu excepția eventuală a unei mulțimi de puncte P_0 de măsură nulă.

Demonstrație. Punem, în vederea stabilirii acestei teoreme,

$$\varphi(P_0, t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(P_s)\, \mathrm{d}s. \qquad (44)$$

Începem cu două propoziții auxiliare.

Mai întîi propoziția

$$\lim_{t \to \infty} [\varphi(P_0, t) - \varphi(P_0, n)] \to 0 \qquad (45)$$

dacă n este cel mai mare întreg cuprins în t.

În adevăr, din (44) rezultă că

$$\varphi(P_0, t) - \varphi(P_0, n) = \frac{1}{n} \int_n^t f(P_s)\, \mathrm{d}s - \frac{t-n}{n} \frac{1}{t} \int_0^t f(P_s)\, \mathrm{d}s.$$

Ținînd seama că $0 \leqslant t - n < 1$ și că, potrivit ipotezelor, există un K astfel că

$$|f(P)| < K,$$

$$|\varphi(P_0, t) - \varphi(P_0, n)| \leqslant \frac{2}{n} K,$$

de unde propoziția (45) rezultă imediat.

A doua propoziție auxiliară este

$$\lim_{t \to \infty} [\varphi(P_0, t) - \varphi(P_u, t)] = 0 \qquad (46)$$

pentru orice $u \in R$.

Din (44) și (1) rezultă

$$\varphi(P_u, t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(F(P_u, s))\, \mathrm{d}s = \frac{1}{t} \int_0^t f(P_{u+s})\, \mathrm{d}s.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $u + s = s'$, avem

$$\varphi(P_u, t) = \frac{1}{t} \int_u^{u+t} f(P_s)\, \mathrm{d}s.$$

Prin urmare,

$$\varphi(P_u, t) - \varphi(P_0, t) = \frac{1}{t} \int_u^{u+t} f(P_s)\, \mathrm{d}s - \frac{1}{t} \int_0^u f(P_s)\, \mathrm{d}s,$$

de unde, procedînd ca mai sus, rezultă (46).

Este deci suficient să demonstrăm că $\varphi(P_0, n)$ are o limită cînd n tinde către infinit.

Fie $l(P_0)$ una dintre limitele șirului $\varphi(P_0, n)$, presupunînd că există mai multe limite cînd $n \to \infty$, și fie $n_1, n_2 \ldots, n_m$ un șir pentru care avem

$$\lim_{m \to \infty} \varphi(P_0, n_m) = l(P_0). \qquad (47)$$

Propoziția (46) ne arată că vom avea, în același timp,

$$\lim \varphi(P_u, n_m) = l(P_u) = l(P_0).$$

Prin urmare, $l(P_0)$ este invariantă pentru curentul (4).

Mulțimii P_u a punctelor unei traiectorii (sau linii de curent) din V îi corespunde un ansamblu de limite l_γ. Corespondența există între mulțimea P_u și fiecare dintre limitele l_γ.

Construim o funcție $L(P)$ de puncte ale spațiului V, făcînd să corespundă tuturor punctelor de pe o traiectorie P_u una oarecare dintre limitele corespunzătoare.

Funcția $L(P)$ este deci determinată pe întreg spațiul V și este, potrivit definiției, invariantă pentru curent: $L(P_u) = L(P)$.

Deoarece V este metric indecompozabilă, $L(P)$ este o constantă, în afară, eventual, de o mulțime de puncte de măsură nulă.

În adevăr, dacă $L(P)$ are mai mult decît o valoare, fie a un număr real care separă aceste valori. Mulțimile

$$V_1 = \{P \mid L(P) < a\}, \qquad V_2 = \{P \mid L(P) \geqslant a\}$$

sînt invariante. Rezultă ca măsura μ a uneia dintre aceste mulțimi este nulă.

Fie, de exemplu, $\mu(V_2) = 0$. Continuînd cu V_1 cum am făcut cu V, obținem o mulțime V_1'. Succesiunea V_1, V_1', V_1'', astfel obținută, este ordonată prin relația de incluziune:

$$V_1 \supset V_1' \supset V_1'' \ldots .$$

Pe de altă parte, intervalul finit în care este cuprins V_n'' poate fi făcut să tindă către zero, deci limita este un punct:

$$L(P) = C$$

aproape peste tot.

Să considerăm acum următoarele două posibilități:

1°. Mulțimea $P_0 = F(P_0, u)$, P_0 fiind un punct din V, acoperă aproape tot spațiul V,

$$m(V - \{P_0\}) = 0.$$

2°. Ipoteza precedentă nu este verificată. Notăm, pentru a simplifica expunerea, cu r mulțimea punctelor traiectoriei $\{P_u\}$. Fie atunci $[\dot{p}]$ mulțimea acestor linii de curent.

Fie π o parte a acestei mulțimi de linii de curent și Π mulțimea (din V) a punctelor tuturor acestor linii. Vom numi cvasimăsură a lui π, limita superioară a probabilității mulți-

milor măsurabile din V cuprinse în Π. Acest număr, pe care-l vom nota $Q(\pi)$, este bine determinat și are proprietatea: $Q(\pi)=0$ atrage $P(\Pi) = 0$.

Deoarece se elimină ipoteza 1°, există o desfacere a submulțimii π în două părți π_1 și π_2, astfel încît $Q(\pi_1) = 0$, $Q(\pi_2) \neq 0$; ar rezulta deci că nici una dintre egalitățile $P(\Pi_1)=0$, $P(\Pi_2)=0$ nu este verificată.

Însă Π_1, Π_2 este o desfacere a lui V, părțile Π_1 și Π_2 sînt invariante și cum V este metric indecompozabilă, ar trebui să avem una dintre egalitățile precedente: 2° conduce la o contradicție. Rămîne astfel ipoteza 1°.

Propoziția (47) se poate atunci scrie

$$\lim_{m\to\infty} \varphi(P_0, n_m) = C \tag{48}$$

aproape pretutindeni. Din (48) rezultă, aplicînd (33) pentru $P_0 \in V$,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m(V)} \int_V \varphi(P_0, n_m)\, \mu(\mathrm{d}P_0) = C, \tag{49}$$

unde am notat cu $\mu(\mathrm{d}P_0)$ elementul de măsură pe E,

$$\frac{1}{\Omega(E)} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{|\operatorname{grad} H|} \right)_{P_0} .$$

Dar

$$\frac{1}{m(V)} \int_V \varphi(P_0, n_m)\, m(\mathrm{d}P_0) = \frac{1}{m(V)} \int_V \frac{1}{n_m} \int_0^{n_m} f(P_s)\, \mathrm{d}s\, m(\mathrm{d}P_0).$$

Cum însă, dată fiind invarianța măsurii față de curent,

$$\frac{1}{m(V)} \int_V f(P_s)\, m(\mathrm{d}P_0) = \frac{1}{m(V)} \int_V f(P_s)\, m(\mathrm{d}P_s) =$$

$$= \frac{1}{m(V)} \int_V f(P)\, m(\mathrm{d}P) = \bar{f},$$

rezultă

$$\frac{1}{m(V)} \int_V \varphi(P_0, n_m)\, m(\mathrm{d}P_0) = \bar{f}$$

pentru orice m. Din (49) rezultă

$$\bar{f} = C.$$

Cum $\bar{f}$ este unică și independentă de șirul n_m, rezultă că limita $l(P_0) = C$ este independentă de alegerea acestui șir. Teorema ergodică este astfel demonstrată.

În decursul prezentării ei, am demonstrat și următoarea teoremă ergodică clasică care constă în afirmația că ipoteza 1° este singură acceptabilă, adică

Pentru aproape toate punctele P_0 din V linia de curent $P_n = F(P_0, n)$ acoperă aproape integral spațiul V (metric indecompozabil).

Această formă a teoremei ergodice clasice implică și teorema de recurență a lui Poincaré.

Teoremă. *Varietatea $H = E$ este, pentru un sistem dinamic ergodic, metric indecompozabilă.*

Am presupus că sistemul (3) nu admite altă integrală primă uniformă decît pe $H(P) = E$.

Dacă $H(P) = E$ nu ar fi metric indecompozabilă, fie V_1 și V_2 două mulțimi de dimensiunea $2m - 1$, invariante, și astfel că $P(V_1) \neq 0$, $P(V_2) \neq 0$.

Teorema ergodică redusă ne arată că o variabilă aleatoare $f(P)$ cu $P \in V_1$ ia ca valoare medie temporală o funcție $\hat{f}_1(P_0)$, invariantă pentru transformările (4) și constantă pentru V_1.

Dacă $P \in V_2$, valoarea medie limită este $\hat{f}_2(P_0)$ cu aceleași proprietăți și avînd altă valoare constantă. Dar aceasta ar însemna că există cel puțin două integrale prime distincte ale ecuațiilor (3), ceea ce este în contrazicere cu ipoteza noastră.

Egalitatea mediei temporale și a mediei spațiale pe $H(E)$. Teorema precedentă ne arată că relația (43) este valabilă pentru varietatea $H = E$ metric indecompozabilă, deci

$$\hat{f} = \bar{f},$$

care dă întreaga semnificație teoretică și experimentală valorilor medii pe varietatea ergodică $H = E$.

17. *O interpretare a probabilității microcanonice* (33). Să luăm drept variabilă aleatoare funcția $f(P)$, caracteristică a mulțimii măsurabile A de pe varietatea $H = E$,

$$f(P) = \begin{cases} 1 & P \in A \\ 0 & P \notin A, \end{cases}$$

$\int_A f(P_s)\, ds$ este timpul total petrecut de punctul P_s în mulțimea A, iar $\varphi(P_0, t)$ este timpul mediu petrecut în A. Aplicînd teorema ergodică redusă, rezultă că acest timp mediu are o limită determinată (pentru aproape toate punctele din $H = E$), limită egală cu valoarea medie a funcției caracteristice, deci cu măsura $m(A)$ a mulțimii A.

În adevăr, dacă notăm timpul mediu petrecut de punctul P_0 în A, în intervalul $(0, t)$ cu

$$T_{t,A} = \varphi(P_0, t),$$

avem:

$$\lim_{t \to \infty} T_{t,A} = \frac{1}{\Omega(E)} \int_A \frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|} = m(A). \tag{50}$$

Egalitatea (43) pune în evidență caracterul stabil al probabilității definită de (33) și dă, în același timp, un mijloc experimental pentru determinarea ei.

În adevăr, media temporală se poate calcula experimental, înregistrînd, într-un interval de timp, de cîte ori s-a produs evenimentul A. Media acestui număr raportat la timp este stabilă cînd timpul crește și tinde către o limită care reprezintă probabilitatea.

Avem astfel un nou aspect al principiului care stă la baza legăturii dintre teoria probabilității și experiență și care afirmă că probabilitatea este limita frecvenței.

18. *Sisteme dinamice constituite din două componente.* Ca introducere la cazul unui mare număr de componente, examinăm problema repartiției energiei între cele două componente ale unui sistem $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$.

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_m$ cele $2m$ coordonate canonice din spațiul fazelor S al sistemului Σ. Presupunem

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_{2m}) = H(x_1, x_2, \ldots, x_r) + H(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{2m}).$$

Notăm cu S_1 spațiul fazelor sistemului Σ_1 de dimensiune r și cu S_2 spațiul fazelor sistemului Σ_2 de dimensiune $2m - r$.

Să reamintim că, în general, spațiul S nu este identic cu spațiul R_{2m}, ci numai cu un domeniu simplu conex din R_{2m}, mai exact cu închiderea acestui domeniu.

Fie A_1 o mulțime măsurabilă din S_1 și $A = A_1 \times S_2$ mulțimea corespunzătoare din S.

Introducem pentru sistemul S_1 probabilitatea condiționată

$$\Pi_1(A_1) = p(A), \tag{51}$$

unde $p(A)$ este probabilitatea (microcanonică) a sistemului Σ, presupus a fi menținut cu energia constantă E. Prin urmare,

$$\Pi_1(A_1) = \frac{1}{\Omega(E)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E} \int_{H<E} \varphi_A \, \mathrm{d}P,$$

φ_A fiind funcția caracteristică a mulțimii A în S, iar φ_A funcția caracteristică a mulțimii A în $H = E$.

Cum însă $\varphi_A = \varphi_{A_1}$, unde φ_{A_1} este funcția caracteristică a mulțimii A_1 în S_1, avem (30),

$$\int_{H<E} \varphi_A \, \mathrm{d}P = \int_{S_1} \varphi_{A_1} \, \mathrm{d}P_1 \int_{H_2<E-H_1} \mathrm{d}P_2 = \int_{A_1} \Phi_2(E - H_1) \, \mathrm{d}P_1.$$

Însă, potrivit cu (32),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E} \int_{A_1} \Phi_2(E - H_1) \, \mathrm{d}P_1 = \int_{A_1} \Omega_2(E - H_1) \, \mathrm{d}P_1.$$

Prin urmare

$$\Pi_1(A_1) = \frac{1}{\Omega(E)} \int_{A_1} \Omega_2(E - H_1) \, \mathrm{d}P_1. \tag{52}$$

Densitatea acestei probabilități condiționate este

$$\rho_1(P_1) = \frac{\Omega_2(E - H_1)}{\Omega(E)}; \; P_1 \in S_1.$$

Dacă mulțimea A_1 este dată de condiția

$$A_1 = \{P_1 \mid E_1' < H_1 < E_1''\}$$

și cum $\Omega_2(E - H_1)$ depinde numai de valorile energiei, relația (43) devine

$$\Pi_1(A_1) = \frac{1}{\Omega(E)} \int_{A_1} \Omega_2(E - H_1) \, \mathrm{d}E_1 \frac{\mathrm{d}\sigma_1}{|\operatorname{grad} H_1|} =$$

$$= \frac{1}{\Omega(E)} \int_{E_1'}^{E_1''} \Omega_2(E - E_1) \, \mathrm{d}E_1 \int_{H_1=E_1} \frac{\mathrm{d}\sigma_1}{|\operatorname{grad} H|}$$

și, în definitiv,

$$\Pi_1\{E_1' < H_1 < E_1''\} = \frac{1}{\Omega(E)} \int_{E_1'}^{E_1''} \Omega_1(E_1) \, \Omega_2(E - E_1) \, \mathrm{d}E_1.$$

Din această formulă, deoarece

$$\Pi_1\{0 < H_1 < \mathrm{E}\} = 1,$$

rezultă relația (39)

$$\Omega(E) = \int_0^E \Omega_1(E_1) \, \Omega_2(E - E_1) \, \mathrm{d}E_1.$$

19. *Asupra aplicațiilor teoriei probabilităților în mecanica statistică.* Dacă aceste aplicații s-ar mărgini la definițiile și relațiile care preced, am putea elimina termenul de probabilitate ca și, dealtfel, acela de mecanică statistică. Am determinat pînă aici relații de măsură pentru mărimi asociate unui sistem mecanic. Dacă sistemul este un corp solid, de exemplu, sau mai general un sistem avînd un mic număr de grade de libertate, toate considerațiile precedente își găsesc aplicare și pot constitui punctul de plecare al unui nou mod de a prezenta mecanica sistemelor. Acesta este chiar unul dintre modurile de la care pornește prezentarea mecanicilor cuantice.

Numai cînd sistemul — ne referim la mecanica clasică — are un număr mare de componente și, implicit, un număr mare de grade de libertate — care depășește pe acela al componentelor — obiectul poate interesa mecanica statistică, iar metodele vor fi cele specifice teoriei probabilităților.

20. *Sisteme dinamice constituite dintr-un număr mare de componente.* Mărimile importante ale mecanicii statistice sînt reprezentate de variabile sau funcții aleatoare scalare sau vectoriale, definite sau generate precum urmează.

Presupunem că fiecare dintre componentele $\Sigma_l (l = 1, 2, \ldots, N)$ ale sistemului Σ are același număr k de grade de libertate. Vom avea deci

$$H_l = H_l(x_l, y_l, \ldots, w_l) \; (l = 1, 2, \ldots, N), \tag{53}$$

numărul literelor $x, y, \ldots, w$ fiind k, și $2m = kN$.

Notăm cu S_i spațiul fazelor componentei $\sum_i$. Prin ipoteză

$$S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_N, \quad H = H_1 + H_2 + \ldots + H_N. \tag{54}$$

Deoarece componentele $\sum_l$ sînt din cînd în cînd în interacțiune, au deci în general schimburi de energie între ele, variabilele H_l nu sînt constante în timp, prin urmare, cîmpul de probabilitate care se impune pentru fiecare dintre aceste componente este cel canonic.

Fie acum $f(x_l, y_l, \ldots, w_l) = f(P_l)$ o variabilă aleatoare în S_l, spațiul fazelor sistemului $\sum_l$ pentru $l = 1, 2, \ldots, N$. Fiecare dintre aceste variabile se extinde la spațiul S după cum urmează:

$$f_l(P) = f_l(x_1, y_1, \ldots, w_1;\ x_2, y_2, \ldots, w_2; \ldots, w_N) = f(x_l, y_l, \ldots, w_l),$$

pentru orice punct $P(x_h, y_h, \ldots, w_h)$ cu $h \neq l$. (55)

Există mai multe moduri de a trata variabilele $f_l(P)$.

1°. Un mod constă în a le considera ca variabile libere în S, cu distribuție canonică în afară de timp. În acest caz, variabilele $f_1(P), f_2(P), \ldots, f_N(P)$ sînt independente în ansamblul lor.

Demonstrația acestei afirmații este imediată.

Observăm mai întîi că mulțimea

$$\{a_{k_1} < f_{k_1}(P) < b_{k_1},\ a_{k_2} < f_{k_2}(P) < b_{k_2}, \ldots, a_{k_s} < f_{k_s}(P) < b_{k_s}\}$$

este intersecția mulțimilor

$$A^*_{hs} = A_{k_s} \times (S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_N)',$$

unde

$$A_{k_s} = \{a_{k_s} < f(P_{k_s}) < b_{k_s}\},$$

iar accentul indică lipsa, din produsul închis în paranteză, a factorului S_{k_s}.

Această intersecție este deci egală cu

$$A_{k_1} \times A_{k_2} \times \ldots \times A_{k_r} \times S_{h_1} \times \ldots \times S_{h_{N-r}},$$

unde $k_1, k_2, \ldots, k_r, h_1, \ldots, h_{N-r}$ sînt cele N numere de la 1 la N.

Se verifică imediat, după expresia distribuției canonice (12), că

$$P\Big(\bigcap_{s=1}^{r} A_{k_s}\Big) =$$

$$= \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_{A_{k_1} \times A_{k_2} \times \ldots \times A_{k_r} \times S_{h_1} \times \ldots \times S_{h_{N-r}}} e^{-\alpha H}\, dP_1\, dP_2 \ldots dP_N =$$

$$= \frac{1}{\psi(\alpha)} \Psi_{h_1} \Psi_{h_2} \ldots \Psi_{h_{N-r}} \Big(\int_{A_{k_1}} e^{-\alpha H_{k_1}(P_{k_1})}\, dP_{k_1}\Big)\Big(\int_{A_{k_2}} e^{-\alpha H_{k_2}(P_{k_2})}\, dP_{k_2}\Big) \ldots$$

$$\ldots \Big(\int_{A_{k_r}} e^{-\alpha H_{k_r}(P_{k_r})}\, dP_{k_r}\Big) = \prod_{s=1}^{r} P(A_{k_s}). \tag{56}$$

Această egalitate caracterizează independența.

2°. Un alt mod de a considera variabilele $f_l(P)$ este indicat de măsura microcanonică implicată de procesul mecanic al sistemului. În adevăr, în acest proces,

$$H_1 + H_2 + \ldots + H_N = E.$$

Prin urmare, variabila $f_l(P)$ trebuie considerată pe varietatea $H = E$, definită de (48) pentru un E dat; în consecință, ea are o distribuție microcanonică:

$$M(A_k) = \frac{1}{\Omega(E)} \int_{H=E} \varphi_{A_k} \frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|} = \frac{1}{\Omega(E)} \frac{d}{dE} \int_{H<E} \varphi_{A_k}\, dP.$$

Variabilele $f_l(P)$ cu distribuția microcanonică nu sînt independente în ansamblul lor ($l = 1, 2, \ldots, N$). Exemplul imediat este oferit chiar de variabilele $H_1, H_2, \ldots, H_N$.

3°. În sfîrșit, un al treilea mod de a considera variabilele $f_l(P)$ este acela temporar: $P = P_t$.

Acest mod este deosebit de interesant, mai ales pentru că ne dă prilejul de a examina îndeaproape descompunerea (54) și cu aceasta relațiile dintre componente.

Dacă aplicăm hamiltonianul H (54), ecuațiile (3) se vor împărți în sisteme complet distincte, care vor da respectiv $H_1 = E_1, H_2 = E_2, \ldots, H_N = E_N$, $E_1, E_2, \ldots, E_N$ fiind constante legate prin condiția inițială $\sum E_l = E$. Cele N sisteme *nu au între ele interacțiune.*

Prin urmare, dacă rămînem la acest punct de vedere, trebuie să aplicăm fiecărei variabile distribuția microcanonică

proprie spațiului ei, să construim spațiul S din produsul cartezian al spațiilor S_l și o măsură egală cu produsul măsurilor microcanonice.

În acest spațiu și cu această măsură, variabilele sînt independente.

Pe de altă parte, urmărirea în timp a funcției $f_l(P)$, pentru un l fix, ne va conduce la problemele puse în teorema ergodică.

În realitate, aceste sisteme fără interacțiune între componente nu prezintă nici un interes. Și ele nici nu constituie obiecte efective ale mecanicii statistice.

21. *Precizarea structurii dinamice a sistemelor care constituie obiecte ale mecanicii statistice.* Această precizare va fi făcută aici numai în termeni matematici. Suportul ei fizic se poate găsi în analogia cu mecanismele speciale ale teoriei cinetice, dar nu vom intra în nici o considerație fizică propriu-zisă. Rezumînd cele spuse mai sus, am considerat pînă aici, în mod implicit, drept caracteristice ale sistemului Σ ecuațiile (3) și descompunerea (54); $H_l = H_l(x_l, y_l, ..., w_l)$ sînt funcții determinate și uniforme, independente explicit de timp, continue și avînd derivate de ordinul întîi continue.

Această reprezentare este, cum am văzut, insuficientă. Ea trebuie modificată fără a altera caracterul mecanic al sistemului, ci numai completîndu-l cu aspecte care au fost lăsate la o parte în reprezentările (3) și (54).

Intervenția interacțiunii dintre componente va fi precizată sub următoarea formă matematică:

Variabilele $f(P_l)$ sînt funcții explicite de timp $f(P_l; t)$; ca funcții de timp, ele se comportă ca o funcție scară, își păstrează valoarea între două discontinuități.

Funcțiile $f(P_l; t)$ au aceleași puncte de discontinuitate ca energia respectivă a componentei $H_l(P_l; t)$.

Dacă t_0 este un punct de discontinuitate, există cel puțin două componente $\Sigma_{l'}$ și $\Sigma_{l''}$ în interacțiune: H_{l_1} și H_{l_2} variază, dar

$$H_{l_1}(P_l; t) + H_{l_2}(P_{l_2}; t)$$

păstrează o valoare constantă cînd t trece prin punctul t_0.

Mulțimea punctelor de discontinuitate ale unei componente Σ_l, într-un interval $(0, T)$, este finită și uniform distribuită, oricare ar fi T.

Pentru fiecare dintre variabilele $f(P, t)$ punctele de discontinuitate sînt fenomene rare în sensul schemei lui Poisson. De aceea, punctele de discontinuitate în care mai mult de două componente sînt în interacțiune între ele, sau punctele în care mai multe perechi sînt în interacțiune, sînt foarte rare și vor fi neglijate în considerațiile ulterioare dezvoltate aici.

22. *Spațiul fază-timp. Evaluarea numărului de componente independente.* Potrivit considerațiilor anterioare, la un moment dat t putem întîlni două cazuri:

a) în momentul t nu are loc nici o interacțiune; în acest moment, cele N variabile trebuie considerate independente;

b) în momentul t are loc o interacțiune între două componente.

În acel moment, $N - 2$ variabile sînt independente între ele și de cele două care sînt în interacțiune, ca și cum am avea $N - 1$ componente independente.

23. Pentru a face să intervină timpul, este indicat să construim mai întîi *spațiul fază-timp*.

Vom construi aici, pentru simplificarea calculelor, un astfel de spațiu discontinuu.

Fie θ un interval de timp caracteristic pentru sistem. Presupunem că observațiile se fac la intervale de timp egale cu θ, și anume la momentele $0, \theta, 2\theta, ..., (n-1)\theta$, astfel încît să avem o descriere cît mai completă a stării și evoluției sistemului.

Ipoteza fundamentală în alegerea intervalului θ este că discontinuitățile sînt rare față de acest interval: dacă x *este numărul punctelor de discontinuitate* într-o secundă și $d_\theta = \frac{1}{\theta}$ este numărul intervalelor θ într-o secundă, atunci

$$\frac{x}{d_\theta} = x\theta$$

este un număr mic.

24. *Spațiul fază-timp este produsul cartezian* $S \times s$, unde s este șirul $0, \theta, 2\theta, ..., (n-1)\theta$. Noi vom lucra cu părțile din acest spațiu care sînt reprezentate de $S \times s_n$ și corespund succesiunii primelor n observații.

În spațiul $S \times s_n$ avem în total $N \times n$ componente, cîte N la fiecare moment.

În intervalul $T = n\theta$ avem $Tx_T = n\theta x_T$ puncte de discontinuitate, deci tot atîtea perechi de componente în interacțiune. Aceasta înseamnă că în acest interval avem

$$N \times n - n\theta x_T$$

componente independente. Dintre acestea, $N \times n - 2n\theta x_T$ sînt componente simple, la care se adaugă $n\theta x$ componente constituite fiecare din grupul de două componente în interacțiune.

O analiză mai aprofundată, mai cu seamă pentru unele sisteme speciale, conduce la considerarea interacțiunilor și pentru mai mult de două componente, în același timp.

25. *Distribuția medie clasică* (statică) rezultă din aplicarea concluziilor relative la media variabilelor $f_l(P)$, definite pentru componentele sistemului Σ la un anumit moment t.

Aplicarea formulei (56) nu este automată, deoarece, așa cum am văzut la punctul 22, deși în general cele N variabile sînt independente, deci formula (56) este aplicabilă, există momente în care cîte o pereche de sisteme sînt în interacțiune și independența globală încetează. La un astfel de moment avem $N - 1$ componente independente, dar una dintre aceste componente este constituită din două componente originale ale sistemului.

Cum se vede imediat, aceste circumstanțe aduc o ușoară modificare în formulele (17), §3, cap. VI.

Presupunînd, pentru a simplifica scrisul, că cele două componente în interacțiune la un moment dat t sînt Σ_{N-1} și Σ_N, vom avea

$$\mu'^2_{N-1} = M[[f_{N-1} + f_N - M[f_{N-1} + f_N]]^2],$$
$$\rho'^3_{N-1} = M[[f_{N-1} + f_N - M[f_{N-1} + f_N]]^3],$$

celelalte μ_l și ρ_l, $l = 1, 2, \ldots, N-2$ avînd definițiile din §3, cap. VI.

Vom avea apoi

$$\mu'^2_{(N)} = \mu_1^2 + \ldots + \mu^2_{N-2} + \mu'^2_{N-1},$$
$$\rho'^3_{(N)} = \rho_1^3 + \ldots + \rho^3_{N-2} + \rho'^3_{N-1}.$$

Rezultă și aici egalitățile și inegalitățile (17), §3, cap. VI, însă cu valori diferite pentru $k_{(N)}$ și $h_{(N)}$. Vom însemna aceste valori cu $k'_{(N)}$ și $h'_{(N)}$.

Formula (56) trebuie aplicată variabilei

$$g'_N(P) = \frac{1}{\mu'_{(N)}} \sum [f_l - M[f_l]]$$

și obținem pentru această variabilă funcția caracteristică

$$\varphi'_N(\tau) = e^{-\frac{1}{2}\tau^2 + A'_N N^{-\frac{1}{2}}};$$

$A'_N = A_N$ la momentele în care nu sînt interacțiuni; în momentele de interacțiune, A'_N diferă cel puțin de A_N.

Deoarece

$$g_N(P) = \frac{\mu'_{(N)}}{\mu_{(N)}} g'_N(P) = \frac{k'_N}{k_{(N)}} g'_N(P),$$

avem în consecință

$$\varphi_N(\tau) = e^{-\frac{1}{2}\frac{k'^2_{(N)}}{k^2_{(N)}}\tau^2 + A''_N N^{-\frac{1}{2}}}, \quad |\tau| < T_N, \tag{58}$$

pe care se citește ușoara variație pe care o suferă legea de repartiție a variabilei $g_N(P)$ cînd trecem printr-un moment de interacțiune.

Asupra acestei formule facem observația fundamentală:

N este numărul componentelor sistemului, deci este un număr fix.

Prin urmare, nu se poate vorbi de o lege a lui Gauss, ci numai de vecinătatea acestei legi. Aprecieri asupra acestei vecinătăți nu se pot face decît dacă se dau cîteva constante caracteristice ale sistemului, în primul A, B și N.

Ne oprim aici cu aceste considerații, deoarece este evident că indicațiile date de (58) sînt foarte reduse.

Pentru a avea un aspect mai complet al fenomenului, vom trece la spațiul fază-timp, în care evoluția sistemului către o repartiție medie normală apare în mod categoric.

26. *Distribuția medie dinamică în spațiul fază-timp. Repartiția gaussiană obținută ca lege limită în timp.* Fie $S \times s_n$ spa-

țiul fază-timp definit la punctul 22 și cele $N \times n$ componente pe care le vom numerota $h_l(P)$ ($l = 1, 2, ..., N \times n$).

Dintre aceste componente $N \times x - n\theta x T$ sînt independente, și anume, $Nn - 2n\theta x_T$ sînt componente simple și $n\theta x_T$ componente compuse din cîte două componente simple originare ($T = n\theta$).

Măsura pe mulțimile boreliene ale acestui cîmp este produsul măsurilor microcanonice ale celor $N + \theta_t$ componente independente, fiecare măsură considerată în spațiul respectiv al componentei.

Fie $h_1, h_2, ..., h_{Nn-2n\theta x}$ cele $Nn - 2n\theta x$ componente simple și $h_{Nn-2n\theta x+1}, ..., h_{Nx}$ cele $2n\theta x$ componente pe care le vom considera perechi, în ordinea în care sînt scrise: ultima pereche este formată din h_{Nn-1} și h_{Nn}.

Vom avea de considerat două momente medii de ordinul al doilea:

$$\mu^2_{[Nn]^2} = \sum_1^{Nn} {}_l\,[h_l - M[h_l]]^2 = k^2_{[Nn]}\,Nn \tag{59}$$

și

$$\mu'^2_{[Nn]} = \mu^2_{[Nn-n\theta x]} = \sum_1^{Nn-2n\theta x} {}_l\,\mu_l^2 + \Sigma_r\, M[(h_r + h_{r+1} - M[h_r + h_{r+1}])^2]. \tag{60}$$

Formula (56) aplicată variabilei medii

$$f^{\mathrm{I}}_{[Nn]}(P) = \frac{1}{\mu'_{[Nn]}} \sum_1^{N2} {}_l\,[h_l - M[h_l]] \tag{61}$$

ne dă pentru funcția caracteristică expresia

$$\varphi^{\mathrm{I}}_{[Nn]}(\tau) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tau^2 + A'_{Nn}\left(1-\frac{x\theta}{N}\right)^{-\frac{1}{2}}{}_n\,-\frac{1}{2}{}_N\,-\frac{1}{2}}. \tag{62}$$

În această expresie, n este timp $n\theta = t$. Dacă lăsăm celelalte elemente fixe și facem timpul să crească indefinit, avem

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^{\mathrm{I}}_{[Nn]}(\tau) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tau^2}. \tag{63}$$

Prin urmare, *variabila medie* $f^{\mathrm{I}}_{[Nn]}$ *tinde cu timpul* (și aceasta evident foarte repede) *către legea lui Gauss.*

Acest rezultat a fost obținut în teoria cinetică cu ajutorul teoremei H a lui Boltzmann.

În considerațiile precedente, el a fost obținut fără alte ipoteze decît acelea de uniformitate și distribuție a momentului de interacțiune presupuse în număr finit în orice interval de timp finit.

Valoarea medie $f^{\mathrm{I}}_{[Nn]}$ a rezultat din normarea sumei $\Sigma[h_l - M[h_l]]$ cu abaterea medie pătratică $\mu^{\mathrm{I}}_{[Nn]}$, a cărei valoare depinde și de modul cum sînt grupate componentele la fiecare moment.

De aceea, vom examina comportarea valorii medii a sumei precedente normată cu $\sqrt{Nn}$, care nu include elemente aleatoare:

$$f^{\mathrm{II}}_{[Nn]}(P) = \frac{1}{\sqrt{Nn}} \sum_1^{Nn} {}_l\,[h_l - M[h_l]]. \tag{64}$$

Între cele două variabile $f^{\mathrm{I}}_{(Nn)}$ și $f^{\mathrm{I}}_{[Nn]}$ există relația

$$f^{\mathrm{II}}_{[Nn]} = \frac{\mu'[Nn]}{\sqrt{Nn}}\, f^{\mathrm{I}}_{[Nn]}.$$

Funcția caracteristică $\varphi^{\mathrm{II}}_{[Nn]}$ va fi deci exprimată prin

$$\varphi^{\mathrm{II}}_{[Nn]}(\tau) = \varphi^{\mathrm{I}}_{[Nn]}\left(\frac{\mu'_{[Nn]}}{\sqrt{Nn}}\,\tau\right),$$

deci

$$\varphi^{\mathrm{II}}_{[Nn]}(\tau) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{\mu'^2_{[Nn]}}{\sqrt{Nn}}\tau^2 + A''_{Nn}\omega\,-\frac{1}{2}{}_N\,-\frac{1}{2}{}_n\,-\frac{1}{2}}. \tag{65}$$

Partea principală din această lege este funcția caracteristică gaussiană

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{1}{Nn}\mu'^2_{[Nn]}\tau^2}. \tag{66}$$

Din (60) se deduce imediat că

$$\frac{1}{Nn}\,\mu'^2_{[Nn]} = A^2 l^2_{N,n} + 4A^2 L_{N,n}\frac{\theta x_T}{N},$$

unde

$$\frac{B}{A} < l_{N,n} < 1, \qquad |L_{N,n}| < 1.$$

În particular, dacă toate componentele sînt identice, avem

$$\mu_i^2 = \mu^2,\ M[[h_r + h_{r+1} - M[h_r + h_{r+1}]]]^2 = \nu^2,$$

$$\frac{1}{Nn}\mu'^2_{[Nn]} = \left(1 - 2\frac{\theta x_T}{N}\right)\mu^2 + \frac{\theta x_T}{N}\nu^2.$$

Dacă

$$\lim_{T\to\infty} x_T = x, \tag{67}$$

există, atunci, făcînd în (65) $n \to \infty$, găsim drept lege limită

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^{II}_{[Nn]}(\tau) = e^{-\frac{1}{2}\left[\mu^2 - \frac{\theta x}{N}(2\mu^2 - \nu^2)\right]\tau^2}. \tag{68}$$

Această lege depinde încă de θ. În cadrul ipotezei timpului continuu, vom face $\theta = 0$ și limita precedentă este

$$\lim_{\substack{u\to\infty \\ \theta\to 0}} \varphi^{II}_{[Nn]}(\tau) = e^{-\frac{1}{2}\mu^2\tau^2}. \tag{69}$$

Dacă există un $\theta \neq 0$ cu semnificație fizică pentru sistem, atunci la exponențială rămîne x și cum limita de la (67) nu există în general, legea (68) este în realitate o mulțime de legi limită ale căror fluctuații corespund unor constatări experimentale binecunoscute.

28. *Legea lui Maxwell.* Singura exemplificare pe care o vom da pentru teoria dezvoltată la punctele precedente este un sistem constituit dintr-un gaz monoatomic ideal, închis într-un recipient, la temperatura exterioară constantă, fără schimburi energetice cu exteriorul.

Componentele sînt moleculele gazului în număr total N și cu masa m. Mărimea aleatoare asociată fiecărei molecule este vectorul viteză $V_i = V(u_i, v_i, w_i)$ $(i = 1, 2, ..., N)$ unde u_i, v_i, w_i sînt cele trei componente ale lui V. Ca funcții de coordonatele de fază avem

$$u_i = \frac{1}{m}p_i,\ v_i = \frac{1}{m}q_i,\ w_i = \frac{1}{m}r_i \quad (i = 1, 2, ..., N).$$

Mișcarea sistemului molecular ascultă, în orice interval în care nu se produc ciocniri, de un sistem de ecuații canonice. Fiecare moleculă are, între două ciocniri, o mișcare depinzînd numai de cîmpul greutății.

Interacțiune între molecule, în înțelesul considerat mai sus, este numai în momentul unei ciocniri. Repartiția acestor ciocniri pare să intre în cadrul uniformității presupusă la punctul 22.

Condițiile de limitare (1), § 3, cap. VI sînt evident verificate. Verificarea condiției (2), § 3, cap. VI se face de asemenea fără greutate.

Vom putea deci aplica teorema limită de la punctul 24, în spațiul fază-timp, $S \times s_n$, al gazului considerat mai sus.

Pentru a da un sens mai puțin artificial teoremei limită, așa cum am lămurit și la punctul 26, vom face normarea sumei numai prin Nn.

Obținem următoarele teoreme:

I. *Funcția caracteristică a vitezei medii normată*

$$V_{N,n} = \frac{1}{\sqrt{Nn}}\sum_1^{Nn}{}_i\,[V_i - M[V_i]]$$

este

$$\varphi_{N,n}(\tau) = e^{-\frac{1}{2}l_{hk,(N)}\tau^h\tau^k + L_{N,n}n^{-\frac{1}{2}}},$$

unde

$$h, k = 1, 2, 3, \quad 0 < l_{hk,(Nn)} < l, \quad |L_{N,n}| < L_\theta$$

este o constantă absolută, iar L_θ depinde numai de θ, ales arbitrar, astfel că $i = 1, 2$; $|\tau_1|$, $|\tau_2|$, $|\tau_3| \leqslant \theta$.

II. *Cînd $T = n\theta$ crește, repartiția vitezei medii normate $V_{N,n}$ tinde foarte repede către o repartiție gaussiană sau oscilează între repartițiile gaussiene care se obțin din funcțiile caracteristice*

$$e^{-\frac{1}{2}l_{hk,[Nn]}\tau^h\tau^k},$$

făcînd pe $n \to \infty$.

Rezultatul se poate enunța, cum se constată imediat, și în modul următor:

Din orice șir de observații făcute la momentele $n_1, n_2, \ldots$ putem alege un șir a cărui medie normată se exprimă printr-o repartiție gaussiană.

În ipoteza timpului continuu, legea limită pentru $\theta = 0$, $n \to \infty$ este determinată, și anume

$$\varphi(\tau) = e^{-\frac{1}{2} l_{hk} \tau^h \tau^k},$$

unde

$$l_{hk} = [l_{hk, [Nn]}]_{\theta=0}$$

cum se verifică imediat.

Pentru acest capitol se va vedea bibliografia de la sfîrșitul capitolului IX.

CAPITOLUL IX

CÎMPURI DE EVENIMENTE PROBABILIZATE ÎN MECANICA CUANTICĂ

Evenimentele mecanicii cuantice sînt în primul rînd pozițiile în spațiul R^n al configurațiilor și valorile cuantice ale mărimilor respective.

Probabilizarea acestor evenimente se face cu ajutorul unei funcții de stare $\omega(P)$, care este o funcție complexă supusă la condiția $\int_{R^n} \omega(P)\,\overline{\omega}(P)\,dP < \infty$, ceea ce îngăduie să definim măsura unei mulțimi măsurabile din spațiul R^n prin integrala

$$k \int_A \omega(P)\overline{\omega}(P)\,dP,$$

k fiind un factor de normare.

Introducerea spațiului funcțiilor de stare, care este un spațiu Hilbert, îngăduie reprezentarea mărimilor fizice prin operatori liniari autoadjuncți ale căror valori proprii sînt valorile mărimii fizice corespunzătoare.

Probabilitățile acestor mărimi se definesc cu referire la o funcție de stare (de undă) determinată.

Ne mărginim să prezentăm aceste poziții de plecare ale aplicațiilor conceptelor probabiliste în mecanica cuantică numai în cazurile cele mai simple, ca o simplă introducere într-o teorie care intră prea mult în fizica propriu-zisă pentru a putea fi în întregime și în puține rînduri prezentată aici.

§ 1. Spațiul hilbertian al funcțiilor de stare

1. *O funcție de stare a unui sistem* — care este o funcție de undă — $\Phi(P)$, unde P este un punct în spațiul R^n, euclidian, cu n dimensiuni, este o funcție, în general, complexă pentru care integrala

$$||\Phi|| = \int_{R^n} |\Phi(P)|^2 \, dP \tag{1}$$

există și are o valoare finită.

Două funcții de stare $\Phi_1(P)$ și $\Phi_2(P)$ sînt echivalente, din punctul de vedere al mecanicii statistice, dacă

$$\int_{R^n} |\Phi_1(P) - \Phi_2(P)|^2 \, dP = 0. \tag{2}$$

Să considerăm funcțiile de stare ca puncte ale unui spațiu făcînd să corespundă funcțiilor echivalente un punct unic, reprezentant al fiecărei clase de funcții de stare echivalente.

Cu această convenție putem enunța următoarea propoziție fundamentală: *mulțimea funcțiilor de stare este un spațiu Hilbert.*

Să notăm cu $\mathcal{H}$ acest spațiu. Vom verifica afirmația noastră arătînd mai întîi că $\mathcal{H}$ este un spațiu Banach, adică un spațiu liniar, normat și complet.

a) Liniaritatea se verifică imediat: dacă $|\Phi_1(P)|^2$ și $\Phi_2(P)|^2$ sînt integrabile în R^n, atunci

$$|\lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2|^2 = (\lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2)\,(\bar{\lambda}_1\bar{\Phi}_1 + \bar{\lambda}_2\bar{\Phi}_2)$$

este de asemenea integrabil.

b) $||\Phi||$ dat de (1) este o *normă* pentru Φ în acest spațiu. În adevăr, dacă $\Phi \equiv 0$ norma sa este, evident, zero. Iar dacă este zero, potrivit convenției noastre avem numai un element al spațiului reprezentat de elementul 0 care are această normă.

Din (1) rezultă imediat celelalte două proprietăți caracteristice ale normei

$$||\lambda\Phi|| = |\lambda| \, ||\Phi||,$$

$$||\Phi_1 + \Phi_2|| \leqslant ||\Phi_1|| + ||\Phi_2||.$$

c) *Completitudinea* spațiului rezultă din proprietățile integralei. Ea se enunță în modul următor:

Dacă $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ este un șir Cauchy în sensul că

$$\int_{R^n} |\Phi_l(P) - \Phi_m(P)|^2 \, dP \to 0$$

cînd $l \to \infty$, $m \to \infty$, există o funcție $\Phi = \lim_{n\to\infty} \Phi_n$ pentru care

$$\int_{R^n} |\Phi_l(P) - \Phi(P)|^2 \, dP \to 0$$

cînd $l \to \infty$.

În acest spațiu, pentru orice pereche de funcții (Φ, Ψ) există[1] următoarea integrală, numită produs scalar al elementelor Φ și Ψ,

$$<\Phi, \Psi> = \int_{R^n} \Phi(P)\, \overline{\Psi}(P) \, dP, \tag{3}$$

unde $\overline{\Psi}(P)$ se obține din $\Psi(P)$ schimbînd pe $i = \sqrt{-1}$ în $-i$.

Produsul scalar definit de (3) are următoarele proprietăți evidente:

$$<\Phi, \Psi> = \overline{<\Psi, \Phi>},$$

$$<\lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2, \Psi> = \lambda_1 <\Phi_1, \Psi> + \lambda_2 <\Phi_2, \Psi>,$$

$$<\Phi, \mu_1\Psi_1 + \mu_2\Psi_2> = \bar{\mu}_1 <\Phi, \Psi_1> + \bar{\mu}_2 <\Phi, \Psi_2>.$$

Cu aceasta, spațiul considerat este organizat ca spațiul Hilbert.

2. *Operatori liniari autoadjuncți în* $\mathcal{H}$. Orice transformare T aplicabilă tuturor funcțiilor din $\mathcal{H}$, sau numai unora dintre ele, și care are ca rezultat o altă funcție din $\mathcal{H}$ este operator liniar dacă

$$T(\lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2) = \lambda_1 T\Phi_1 + \lambda_2 T\Phi_2$$

pentru orice sistem de două funcții Φ_1 și Φ_2 din $\mathcal{H}$, pentru care $T\Phi_1 \in \mathcal{H}$, $T\Phi_2 \in \mathcal{H}$ și oricare două numere complexe λ_1 și λ_2.

---

[1] Existența rezultă din următoarea inegalitate a lui Schwartz:

$$\left[\int_{R^n} |\Phi(P)\, \overline{\Psi}(P)| \, dP\right]^2 \leqslant \int_{R^n} |\Phi(P)|^2 \, dP \cdot \int_{R^n} |\Psi(P)|^2 \, dP.$$

Operatorul T^* conjugat lui T este bine și unic definit de egalitatea

$$T^*\Phi = (\overline{T\Phi}), \tag{4}$$

deci transformă o funcție Φ în funcția $(\overline{T\Phi})$, ori de cîte ori există.

Se verifică imediat că T^* este liniar odată cu T.

Operator autoadjunct este orice operator liniar pentru care

$$<T\Phi, \Psi> = <\Phi, T\Psi>, \tag{5}$$

oricare ar fi funcțiile Φ și Ψ din $\mathcal{H}$ pentru care $T\Phi$ și $T\Psi$ sînt de asemenea în $\mathcal{H}$.

Exemple de operatori liniari autoadjuncți.

1. *Multiplicatori întregi.*

Fie $F(P)$ o funcție reală oarecare din $\mathcal{H}$. Operatorul T definit prin egalitatea

$$T\Phi = F\Phi,$$

pentru orice Φ din $\mathcal{H}'$, este evident liniar și autoadjunct.

2. *Operatorii diferențiali* $T_k = -ia\dfrac{\partial}{\partial x_k}$.

Să considerăm subspațiul $\mathcal{H}'$ constituit din funcțiile Φ din $\mathcal{H}$, care

a) admit derivate de ordinul întîi aparținînd subspațiului $\mathcal{H}'$

$$\frac{\partial\Phi(P)}{\partial x_j} \in \mathcal{H}';$$

b) se anulează cînd oricare dintre variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tinde spre $\pm\infty$.

Operatorii $T_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ definiți prin egalitățile

$$\Phi \in \mathcal{H}',$$

$T_k\Phi \equiv \alpha\dfrac{\partial}{\partial x_k}\Phi$ pentru $\alpha = a_i$ cu a real, sînt liniari și autoadjuncți. Liniaritatea este evidentă. Cea de-a doua proprietate rezultă din verificarea egalității

$$\int_{R^n} \alpha\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\overline{\Psi}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n = \int_{R^n}\Phi\left(\alpha\overline{\frac{\partial\Psi}{\partial x_k}}\right)dx_1dx_2\ldots dx_n,$$

care corespunde definiției (5). Însă integrala din membrul întîi, după efectuarea unei integrări prin părți și ținînd seamă de b), ne dă

$$-\int_{R^n}\alpha\Phi\frac{\overline{\partial\Psi}}{\partial x_k}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

Egalînd cu membrul al doilea, rezultă ca o condiție de autoadjuncție $\overline{\alpha} = -\alpha$, ceea ce dă pentru α o valoare pur imaginară $\alpha = ai$.

O observație importantă care ne ajută să constituim operatori autoadjuncți cu ajutorul operatorilor T_k este următoarea:

Dacă doi operatori T' și T'' sînt liniari și autoadjuncți și dacă sînt comutativi ($T'T''\Phi = T''T'\Phi$ pentru orice Φ), atunci și produsul $T'T''$ este autoadjunct.

În felul acesta se verifică imediat că $T_{jj} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, $T_{jk} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}$ sînt operatori liniari autoadjuncți în subspațiul $\mathcal{H}'' \subset \mathcal{H}$ al funcțiilor care admit derivate de primele două ordine în $\mathcal{H}$ și pentru care aceste funcții împreună cu derivatele lor de ordinul întîi se anulează la infinit.

3. *Valorile și funcțiile proprii ale unui operator autoadjunct.* Se consideră un operator T și subspațiul $\mathcal{H}_T$ al lui $\mathcal{H}$ al funcțiilor Φ pentru care $T\Phi \in \mathcal{H}$.

Problema reprezentată de următoarea ecuație

$$T\Phi = \lambda\Phi \tag{6}$$

are o însemnătate fundamentală pentru aplicațiile în mecanica cuantică. Ea poate fi exprimată astfel:

Să se găsească funcțiile de stare din $\mathcal{H}_T$ pentru care efectul T este echivalent cu acela al unei mărimi reale λ, considerată ca multiplicator.

Valorile λ pentru care există cel puțin o soluție Φ aparținînd subspațiului de funcții uniforme $\mathcal{H}_T$ se numesc *valorile proprii* ale operatorului T, iar soluțiile Φ corespunzătoare sînt *funcțiile proprii* corespunzătoare.

Mulțimea valorilor proprii ale operatorului T se numește *spectrul* acestui operator.

Întrucît nu ne propunem decît să arătăm cum se pot constitui cîmpuri de probabilitate, ne vom mărgini la cazul cel mai simplu al acestor operatori al căror spectru este discret, iar fiecărei valori λ_j îi corespunde o singură funcție proprie Φ_j determinată, în afară de o constantă multiplicativă.

Folosim această constantă pentru a norma aceste funcții în înțelesul că

$$\int_{R^n}\Phi_j\overline{\Phi_j}\,dP = 1. \tag{7}$$

Se demonstrează imediat că funcțiile proprii formează un *sistem ortogonal*, adică

$$\int_{R^n} \Phi_j(P)\,\overline{\Phi_k}(P)\,dP = 0, \quad j \neq k. \tag{8}$$

Aceasta rezultă din proprietatea de autoadjuncție a operatorului și din b). Într-adevăr, ținînd seamă de b), egalitatea

$$< T\Phi_j,\ \Phi_k > = < \Phi_j,\ T\Phi_k >$$

implică

$$\lambda_j < \Phi_j,\ \Phi_k > = \lambda_k < \Phi_j,\ \Phi_k > .$$

Cum $\lambda_j \neq \lambda_k$ dacă $j \neq k$, rezultă

$$< \Phi_j,\ \Phi_k > = 0.$$

4. Reprezentarea funcțiilor din $\mathcal{H}$ prin serii de funcții Φ_k. Fie $\Phi(P)$ o funcție oarecare din $\mathcal{H}$ și numerele corespunzătoare

$$a_m = \int_{R^n} \Phi(P)\,\overline{\Phi_m}(P)\,dP, \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

Suma $S_n(P) = \sum_1^n a_j \Phi_j(P)$ converge în medie către $\Phi(P)$ în înțelesul că

$$\lim_{N\to\infty} \int_{R^n} |S_N(P) - \Phi(P)|^2\,dP = 0.$$

În particular, dacă $\Phi(P)$ este of uncție ortogonală tuturor funcțiilor proprii $\Phi_k(P)$, suma corespunzătoare S_N este nulă oricare ar fi N. Rezultă

$$\int_{R^n} |\Phi(P)|^2\,dP = 0,$$

ceea ce arată că $\Phi(P)$ este nulă: sistemul $\Phi_k(P)$ este complet.

Se verifică imediat că

$$\int_{R^n} \Phi(P)\,\overline{S_N(P)}\,dP = \sum_1^N {}_m\,|a_m|^2.$$

Cînd $N \to \infty$, obținem egalitatea caracteristică completitudinii sistemului

$$\int_{R^n} |\Phi(P)|^2\,dP = \sum_{m=1,2,\ldots} |a_m|^2. \tag{10}$$

Următoarea propoziție este foarte utilă în aplicații:

Dacă operatorul T are spectrul discret $\{\lambda_j\}$ cu funcțiile proprii respective $\varphi_j(P)$, spectrul valorilor proprii ale operatorului T^k este $\{\lambda_j^k\}$, iar funcțiile proprii sînt de asemenea $\varphi_j(P)$. Vom demonstra propoziția în cazul $k = 2$. În adevăr, din $T\varphi_j = \lambda_j\varphi_j$ rezultă

$$T^2\varphi_j = T(T\varphi_j) = \mu_j T\varphi_j = \lambda_j^2\varphi_j.$$

Reciproc, dacă $T^2\varphi = \lambda\varphi$ și reprezentăm pe φ prin $\sum_{m=1,2,\ldots} a_m\varphi_m$, rezultă

$$\sum_{m=1,2,\ldots} a_m\lambda_m^2\varphi_m = \lambda \sum_{m=1,2,\ldots} a_m\varphi_m.$$

Așadar, $\lambda = \lambda_m^2$ și $\varphi = \varphi_m$ pentru $m = 1, 2, \ldots$

§ 2. Evenimente. Probabilitate. Legi de repartiție

1. *Un spațiu de evenimente și probabilitate.* Un prim cîmp de evenimente este realizat de mulțimile măsurabile din spațiul R^n al parametrilor de poziție $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ai sistemului.

Probabilitatea unei mulțimi măsurabile A din acest cîmp poate fi dată de integrala

$$P(A) = \int_A \omega(P)\,\overline{\omega}\,(P)dP, \tag{1}$$

unde funcția (P) se obține prin normare pornind de la o funcție aparținînd spațiului $\mathcal{H}$ definit în § 1.

2. *Mărimile asociate cîmpului de evenimente.* În mecanica cuantică se realizează o disociere completă între mărime și valoare, în sensul că unei mărimi îi corespunde un spectru de

valori, fiecare cu o probabilitate determinată, în același mod în care într-un spațiu Hilbert unui operator îi corespunde un spectru de valori proprii care sînt numere reale.

Vom conveni deci că fiecare mărime T a sistemului cu n grade de libertate considerat corespunde unui operator cu același nume T. Dacă acest operator este un multiplicator $f(P)$, atunci ecuația

$$f(P)\,\varphi(P) = \lambda\varphi(P)$$

ne dă pentru operator valoarea $f(P)$. Valoarea medie a acestei mărimi este, conform definiției obișnuite, pentru funcția de stare $\omega(P)$,

$$M[f] = \int_{R^n} f(P)\,\omega(P)\,\overline{\omega}(P)\,dP, \tag{2}$$

dacă această integrală există.

Pentru mărimea reprezentată de operatorul T vom avea, extinzînd această definiție,

$$M_\omega[T] = \int_{R^n} T_\omega(P)\,\overline{\omega}(P)\,dP. \tag{3}$$

În particular, dacă funcția de stare este una dintre funcțiile proprii $\omega_j(P)$ ale operatorului, vom avea

$$M_{\omega_j}[T] = \int_{R^n} T\omega_j(P)\,\overline{\omega}_j(P)\,dP = \lambda_j \int_{R^n} \omega_j(P)\,\overline{\omega}_j(P)\,dP = \lambda_j,$$

egalitate care justifică complet accepția de mărime pe care am dat-o operatorului P.

Dacă ne raportăm la o funcție de stare normată, însă oarecare,

$$\omega(P) = \sum_{j=1,2,\ldots} a_j\omega_j(P),$$

atunci

$$T_\omega(P) = \sum_j a_j\lambda_j\omega_j(P).$$

Ținînd seama de ortogonalitatea funcțiilor proprii $\omega_j(P)$, vom avea, aplicînd (3),

$$M_\omega(T) = \sum_{m=1,2,\ldots} |a_m^2|\,\lambda_m. \tag{4}$$

Funcția $\omega(P)$ fiind normată, rezultă din (1) că, punînd

$$p_m^{(\omega)} = |a_m|^2,$$

avem

$$\sum_{m=1,2,\ldots} p_m^{(\omega)} = 1,$$

iar (4) ia forma obișnuită a unei valori medii

$$M_\omega[T] = \Sigma p_m^{(\omega)}\lambda_m.$$

Dacă urmărim adunarea după valorile crescătoare ale valorilor proprii λ_m, seria din membrul al doilea se prezintă în general sub forma

$$M_\omega[T] = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_m\, p_m^{(\omega)}\lambda_m.$$

Probabilitatea, pe care o vom scrie

$$P_\omega[\lambda' \leqslant T < \lambda''],$$

se va putea defini în modul următor:

Asociem mărimii T o altă mărime θ, astfel încît

$$\theta = \begin{cases} 1 \text{ cînd } \lambda' \leqslant T < \lambda'', \\ 0 \text{ cînd } T \text{ este exterior intervalului de sus.} \end{cases}$$

Vom avea atunci

$$P_\omega[\lambda' \leqslant T < \lambda''] = M_\omega(\theta) = \sum_{\lambda' \leqslant \lambda_m < \lambda''} p_m^{(\omega)},$$

egalitate care justifică complet semnificația de probabilitate pe care am atribuit-o valorilor $|a_m|^2$.

BIBLIOGRAFIE

J. CLARK MAXWELL, *On the dynamical Theory of Gas* (în Opere, vol. I și II).

L. BOLTZMANN, *Leçons sur la théorie des gas* (traducerea franceză a operei).

J. H. JEANS, *The dynamical Theorie of Gases*, Londra, 1916.

W. GIBBS, *Elementary Principles of Statistical mechanics*, Univ. Press, Yalle, 1902.

T. et P. EHRENFEST (expus de E. Borel), *Mécanique statistique*, *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. 4, vol. I, Paris, 1913.
P. HERTZ, *Über die statistiche Mechanik*, Math. Ann., t. 74, 1913.
E. BOREL, *Introduction géomètrique à quelques théories physiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1924.
E. BOREL, *Mécanique statistique classique*, Gauthier-Villars.
A. HINCIN, *Математические основания статической механики*, Moscova-Leningrad, 1943.
L. BRILLOUIN, *Les statistiques quantiques*, Paris, 1930.
R. H. FOWLER, *Statistical Mechanics*, Univ. Press, Cambridge, 1936.
L. DE BROGLIE, *La mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules*, Gauthier—Villars, Paris, 1939.
J. von NEUMANN, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin, 1932.
F. PERRIN, *La Mécanique Statistique quantique*, Gauthier-Villars, Paris, 1939.
G. CASTELNUOVO, *Calcolo delle Probabilità*, Roma, 1919.
O. ONICESCU, *Evoluția repartiției mărimilor aditive ale mecanicii statistice*, Revista Universității nr. 6—7, București, 1955.

CAPITOLUL X

FUNCȚII ALEATOARE

§ 1. Generalități despre funcții aleatoare

Definiția i. *Să numim cu F mulțimea funcțiilor măsurabile* $x(\xi)$, *definite pe cîmpul de evenimente* $\{E, \mathcal{K}\}$.

Fie I o parte din mulțimea R a numerelor reale. Vom reprezenta prin $f(t, \xi)$ sau numai prin $f(t)$, uneori prin $x_t(\xi)$, o familie de funcții din F, cîte una pentru fiecare $t \in I$.

Familia de funcții măsurabile $f(t, \xi)$ *poate fi deci considerată ca o funcție uniformă de t, definită pentru* $t \in I$ *și luîndu-și valorile în F.*

Conform definiției vom avea, pentru fiecare $t \in I$ și orice a real

$$A_{f,t,a} = \{\xi \mid f(t, \xi) < a\} \in \mathcal{K}.$$

Funcția măsurabilă $x(\xi)$ a cîmpului de evenimente $\{E, \mathcal{K}\}$ devine o *variabilă aleatoare* pe orice cîmp de probabilitate $C = [E, \mathcal{K}, P]$, obținut prin introducerea unei probabilități total aditive pe cîmpul $[E, \mathcal{K}]$, iar familia de funcții măsurabile $f(t)$ devine funcția aleatoare $f(t)$.

Exemplu. Se consideră un sistem de N urne U_j, conținînd fiecare bile albe și negre, ordonate după indicele crescător $j = 1, 2, \ldots, N$. Dacă urna U_j conține k_j bile albe și K_j bile negre, vom pune

$$p_j = \frac{k_j}{k_j + K_j}; \quad q_j = \frac{K_j}{k_j + K_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, N).$$

Construim un cîmp de probabilitate în modul următor:

Evenimentele elementare sînt șiruri finite de bile albe (a) sau negre (b), ordonate după indicele urnei corespunzătoare în felul următor:

$$a_1, b_2, b_3, a_4, \ldots, a_N.$$

Probabilitatea fiecăruia dintre aceste evenimente elementare este produsul probabilităților bilelor de culoarea corespunzătoare. Astfel, probabilitatea evenimentului elementar de mai sus este

$$p_1 q_2 q_3 p_4 \cdots p_N.$$

Se verifică imediat că suma acestor probabilități este egală cu 1.

Să considerăm acum următoarea funcție aleatoare:

$$\underset{t\in I=(1,2,\ldots,N)}{f(t,\xi)} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } \xi = \ldots a_t \ldots \\ 0 \text{ dacă } \xi = \ldots b_t \ldots, \end{cases}$$

unde punctele țin loc de bile albe sau negre în toate modurile posibile.

Pentru $t = j$, funcția $f(j, \xi)$ este o variabilă aleatoare care ia valoarea 1 cu probabilitatea p_j și valoarea 0 cu probabilitatea q_j. Această variabilă corespunde unei experiențe: extracția din urna U_j fără nici un raport cu extracțiile din celelalte urne.

Diferitele variabile sînt independente între ele.

§ 2. Continuitate și derivabilitate stochastică

1. *Condiții generale pentru definirea continuității derivatei.* Vom presupune că $f(t, \xi)$ este o funcție aleatoare, determinată într-un cîmp de probabilitate constant $\{E, \mathcal{K}, P\}$. Există deci, în acest cîmp, o lege de probabilitate absolută pentru fiecare dintre variabilele aleatoare ale familiei $f(t, \xi)$, $t \in I$, după cum există și probabilități condiționate. Odată cu $f(t)$ și $f(t_0)$, diferența $f(t) - f(t_0)$ este o variabilă aleatoare definită pe cîmp pentru fiecare t, căruia îi corespunde de asemenea o lege de probabilitate absolută pentru fiecare t. În aceste condiții, putem defini continuitatea stochastică în tot atîtea moduri cîte sînt modurile de convergență.

Continuitatea în probabilitate. Funcția $f(t)$ este continuă în probabilitate în punctul t_0, dacă $f(t) - f(t_0)$ tinde, în probabilitate, către zero cînd $t \to t_0$.

Continuitatea m.p. (în medie pătratică). Funcția aleatoare $f(t)$ este continuă în medie pătratică în punctul t_0 dacă

$$M[[f(t) - f(t_0)]^2] \to 0 \tag{1}$$

cînd $t \to t_0$.

2. *Proprietăți ale continuității m.p.* Să observăm, mai întîi, că, dacă $x(\xi)$ este o variabilă aleatoare, avînd valoarea medie finită $M[x]$ și variația finită $M[x'^2] = M[(x - M[x])^2]$, avem relația

$$M[x'^2] = M[x^2] - [M[x]]^2,$$

deci

$$M[x^2] = M[x'^2] + [M[x]]^2. \tag{2}$$

Prin urmare, dacă punem $x_t = f(t)$, $x'_t = f'(t) = f(t) - M[f(t)]$ rezultă din (2) următoarele propoziții:

P_1. *Dacă $f(t)$ este continuă m.p. în t_0, atunci abaterea $f'(t) = f(t) - M[f]$ este continuă m.p. în același punct t_0.*

P_2. *Dacă $f(t)$ este continuă m.p. în t_0, atunci $M[f(t)]$ este continuă în punctul t_0.*

3. *Conexiunea și coeficientul de conexiune.* Conexiunea funcției aleatoare reale $f(t)$ este, pentru fiecare sistem de două momente t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$, corelația între variabilele aleatoare $f(t_1)$ și $f(t_2)$,

$$\gamma(t_1, t_2) = M[f'(t_1) f'(t_2)],$$

iar coeficientul de conexiune este coeficientul de corelație respectiv,

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{M[f'(t_1) f'(t_2)]}{\mu_{t_1}\mu_{t_2}}, \tag{3}$$

unde $\mu_t^2 = M[f'^2(t)]$, cu ipoteza că aceste valori medii există pentru t aparținînd unui interval I.

Să mai observăm că, potrivit teoremei lui Schwartz,

$$|M[f'(t_1) f'(t_2)]| \leqslant \mu_{t_1}\mu_{t_2} \tag{4}$$

și, prin urmare, dacă t_1, t_2 aparțin lui I, avem

$$|M[f'(t_2) f'(t_2)]| < \infty.$$

În aceste condiții,

$$|\rho(t_1, t_2)| \leqslant 1. \tag{5}$$

Să observăm că

$$M[(f'(t) - f'(t_0))^2] = M[(f'(t))^2 + (f'(t_0))^2 - 2f'(t)\,f'(t_0)],$$

deci

$$M[(f'(t) - f'(t_0))^2] = \mu_t^2 + \mu_{t_0}^2 - 2\mu_t\mu_{t_0}\rho(t, t_0);$$

sau încă

$$M[(f'(t) - f'(t_0))^2] = (\mu_t - \mu_{t_0})^2 + 2\mu_t\mu_{t_0}[1 - \rho(t, t_0)]. \quad (6)$$

Potrivit propoziției P_2, primul membru al acestei egalități tinde către zero cînd $t \to t_0$. Cum ambii termeni din membrul al doilea sînt pozitivi, rezultă propozițiile:

P_3. *Dacă $f(t)$ este continuă m.p. în punctul t_0, funcția μ este continuă în t_0.*

P_4. *Dacă $f(t)$ este continuă m.p. în punctul t_0, coeficientul de conexiune $\rho(t, t_0)$ este continuu în punctul $t = t_0$.*

Această din urmă propoziție corespunde faptului că

$$\rho(t_0; t) \to \rho(t_0, t_0) = 1,$$

cînd $t \to t_0$.

Teoremă. *Dacă $f(t)$ este continuă m.p., este continuă în probabilitate.*

Această teoremă rezultă din următoarea propoziție: *Dacă $x_t(\xi)$ converge către $x_{t_0}(\xi)$ în medie pătratică, ea converge către aceeași limită în probabilitate.*

Implicația inversă nu este valabilă. Prin urmare, clasa funcțiilor aleatoare continue în probabilitate conține clasa funcțiilor aleatoare continue m.p.

4. *Continuitatea funcțiilor aleatoare complexe.* Funcția $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ este o funcție aleatoare complexă dacă fiecare dintre funcțiile $f_1(t)$ și $f_2(t)$ sînt funcții aleatoare în sensul considerat pînă aici. Este evident că $f(t)$ este continuă m.p. dacă și numai dacă $f_1(t)$ și $f_2(t)$ sînt continue m.p. Această condiție reiese și din următoarea

Definiție. *$f(t)$ este continuă m.p. în punctul t_0 dacă*

$$M[(f(t) - f(t_0))\,\overline{(f(t) - f(t_0))}] \to 0 \quad (7)$$

cînd $t \to t_0$.

Dacă punem, în cazul funcțiilor aleatoare complexe,

$$\mu^2(t) = M[f'(t)\,\overline{f'(t)}] \quad (8)$$

$$\gamma(t_1, t_2) = M[f'(t_1)\,\overline{f'(t_2)}], \quad (9)$$

vom avea

$$\bar{\gamma}(t_1, t_2) = M[\overline{f'(t_1)}\,f'(t_2)] = \gamma(t_2, t_1), \quad (10)$$

iar lema lui Schwartz ne dă

$$|\gamma(t_1, t_2)| \leqslant \mu_{t_1}\mu_{t_2}.$$

Dacă punem

$$\gamma(t_1, t_2) = \mu_{t_1}\mu_{t_2}\rho(t_1, t_2),$$

vom avea relația analoagă cu (10)

$$\bar{\rho}(t_1, t_2) = \rho(t_2, t_1)$$

iar (6) devine în acest caz

$$M[(f'(t) - f'(t_0))\,\overline{(f'(t) - f'(t_0))}] =$$

$$= (\mu_t - \mu_{t_0})^2 + 2\mu_t\mu_{t_0}[1 - R\rho(t_0, t)], \quad (11)$$

unde

$$R\rho(t, t_0) = \frac{1}{2}[\rho(t_0, t) + \bar{\rho}(t_0, t)].$$

Deci și în acest caz continuitatea funcției aleatoare într-un punct atrage continuitatea valorii sale *medii*, *dispersiei* și a părții reale a *conexiunii*.

5. O întărire a rezultatelor precedente asupra legăturii dintre continuitatea funcției aleatoare $f(t)$ într-un punct sau într-un interval și continuitatea conexiunii se obține folosind următoarea propoziție auxiliară:

P_5. *Dacă variabilele aleatoare x_t și y_t converg m.p. respectiv către x_{t_0} și y_{t_0} cînd $t \to t_0$, atunci avem și*

$$M[x_t y_t] \to M[x_{t_0} y_{t_0}]. \quad (12)$$

În adevăr, avem întîi identitatea

$$x_t y_t - x_{t_0} y_{t_0} = (x_t - x_{t_0})(y_t - y_{t_0}) + x_{t_0}(y_t - y_{t_0}) + y_{t_0}(x_t - x_{t_0}),$$

observînd că, în baza inegalității lui Schwartz,

$$|M[(x_t - x_{t_0})(y_t - y_{t_0})]| \leqslant \{M[(x_t - x_{t_0})^2]\, M[(y_t - y_{t_0})^2]\}^{\frac{1}{2}},$$

$$|M[(x_t - x_{t_0})\, y_{t_0}]| \leqslant \{M[y_{t_0}^2]\, M[(x_t - x_{t_0})^2]\}^{\frac{1}{2}},$$

$$|M[(y_t - y_{t_0})\, x_{t_0}]| \leqslant \{M[x_{t_0}^2]\, M[(y_t - y_{t_0})^2]\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ținînd seama și de ipoteze rezultă (12).

Vom putea acum enunța propoziția importantă:

P_6. *Condiția necesară și suficientă pentru ca* $\lim f_\alpha(t) = f(t)$ *cînd* $\alpha \to 0$ *este ca* $\lim_{\alpha, \beta \to 0} M[f_\alpha(t')\, f_\beta(t'')]$ *să existe și să fie unică.*

Vom avea atunci

$$\gamma(t', t'') = \lim_{\alpha \to 0} M[f_\alpha(t')\, \overline{f_\alpha(t'')}].$$

Condiția este necesară pentru că, în virtutea propoziției P_5,

$$M[f_\alpha(t')\, \overline{f_\beta(t'')}] = M[f(t')\, f(t'')].$$

Condiția este și suficientă, pentru că

$$M[(f_\alpha(t) - f_\beta(t))^2] = M[(f_\alpha(t))^2] + M[(f_\beta(t))^2] - 2M[f_\alpha(t) f_\beta(t)],$$

deci

$$M[(f_\alpha(t) - f_\beta(t))^2] \to 0.$$

P_5'. *Condiția necesară și suficientă pentru continuitatea m.p. a funcției aleatoare* $f(t)$ *în punctul* t_0 *este existența limitei*

$$\gamma(t_0, t_0) = \lim_{t' \to t_0,\, t'' \to t_0} \gamma(t', t''), \tag{13}$$

unde am notat

$$C(t', t'') = M[f(t')\, f(t'')]. \tag{14}$$

Propoziția P_5 arată că existența limitei din (13) este necesară. Suficiența condiției rezultă din următoarea expresie a ei:

$$\lim_{t' \to t_0,\, t'' \to t_0} M[f(t_0)\, f(t_0) - f(t')\, f(t'')] \to 0. \tag{15}$$

Pentru $t', t'' \to t_0$ această convergență devine continuitatea momentului de ordinul al doilea

$$M[f^2(t)] \to M[f^2(t_0)].$$

În același timp,

$$M[[f(t) - f(t_0)]^2] = M[(f(t))^2] + M[(f(t_0))^2] - 2M[f(t)\, f(t_0)].$$

Conform condiției (14) și a consecinței sale (15), limita membrului al doilea este zero, de unde continuitatea m.p. a funcției.

Vom demonstra următoarea

Teoremă. *Dacă* $f(t)$ *este o funcție aleatoare continuă, ordinul infinitezimal al expresiei* $1 - \rho(t_1 t_2)$ *față de* $t_2 - t_1$ *este cel mult doi.*

Într-adevăr, să considerăm trei variabile aleatoare $x_1 = f(t_1)$, $x_2 = f(t_2)$, $x_3 = f(t_3)$ cu $t_1 < t_2 < t_3$.

Să considerăm valoarea medie

$$(\alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \alpha_3 x_3')^2 = \alpha_1^2 \mu_1^2 + \alpha_2^2 \mu_2^2 + \alpha_3^2 \mu_3^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \mu_1 \mu_2 r_{12} + 2\alpha_2 \alpha_3 \mu_2 \mu_3 r_{23} + 2\alpha_3 \alpha_1 \mu_3 \mu_1 r_{31},$$

și să notăm

$$\beta_1 = \alpha_1 \mu_1, \quad \beta_2 = \alpha_2 \mu_2, \quad \beta_3 = \alpha_3 \mu_3;$$

expresia precedentă devine

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + 2\beta_1 \beta_2 r_{12} + 2\beta_2 \beta_3 r_{23} + 2\beta_3 \beta_1 r_{31} \geqslant 0,$$

caracteristică unui triunghi sferic, în care β_1, β_2, β_3 sînt laturile, iar r_{12}, r_{23}, r_{31} sînt cosinusurile unghiurilor,

$$r_{12} = \cos \varphi_{12}, \quad r_{23} = \cos \varphi_{23}, \quad r_{31} = \cos \varphi_{31}.$$

Însă,

$$1 - r_{12} = \frac{1}{2} \varphi_{12}^2, \quad 1 - r_{23} = \frac{1}{2} \varphi_{23}^2, \quad 1 - r_{31} = \frac{1}{2} \varphi_{31}^2.$$

Dacă

$$1 - r_{12}(t_1, t_2) = k(t_2 - t_1)^\alpha,$$

vom avea, pe baza relației $\varphi_{12} \leqslant \varphi_{23} + \varphi_{31}$

$$(t_2 - t_1)^{\frac{\alpha}{2}} \leqslant (t_3 - t_2)^{\frac{\alpha}{2}} + (t_1 - t_3)^{\frac{\alpha}{2}},$$

care este egalitate în cazul $\alpha = 2$ și verificată numai dacă $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$. Deci, teorema este demonstrată. Ea ne indică

varietatea tipurilor de funcții aleatoare continue în corespondență cu ordinul infinitezimal al diferenței $1 - \rho(t_1, t_2)$ în raport cu $t_2 - t_1$. Acest ordin este doi în cazul în care există o derivată m.p., după cum vom vedea.

6. *Derivata m.p. a funcției aleatoare.*

D e f i n i ț i e . *$f(t)$ este derivata m.p. în punctul t al funcției aleatoare $f(t)$, dacă $f(t)$ este limita m.p. a raportului* $\frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau}$ *când* $\tau \to 0$.

Rezultă imediat că: *dacă $f(t)$ este derivata m.p. a funcției aleatoare $f(t)$, ea este și derivata acesteia în probabilitate.*

Pentru a găsi proprietatea corelativă a conexiunii, să observăm că, potrivit propoziției P_6, condiția necesară și suficientă pentru existența limitei m.p. a raportului

$$g(t, \tau) = \frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau}$$

este existența limitei

$$\lim_{\tau_1 \to 0,\, \tau_2 \to 0} M[g(t, \tau_1)\, g(t, \tau_2)] =$$

$$= \lim_{\tau_1 \to 0,\, \tau_2 \to 0} \frac{\gamma(t+\tau_1, t+\tau_2) - \gamma(t+\tau_1, t) - \gamma(t, t+\tau_2) + \gamma(t, t)}{\tau_1 \tau_2}.$$

Teorema I. *Condiția necesară și suficientă pentru existența derivatei m.p. a funcției aleatoare $f(t)$ în t este existența în punctul t a derivatei mixte de ordinul al doilea a produsului scalar*

$$\gamma(t_1, t_2) = M[f(t_1) f(t_2)].$$

În particular, dacă facem în (16) $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, există limita

$$\lim_{\tau \to 0} M\left[\left(\frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau}\right)^2\right]. \qquad (17)$$

Prin urmare, există, în același timp, și limita

$$M[\dot{f}(t)] = \lim_{\tau \to 0} M\left[\frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau}\right] = \frac{\mathrm{d}M[f(t)]}{\mathrm{d}t},$$

ceea ce pune în evidență următoarea

Teoremă. *Operațiile M și $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ (m.p.) sînt permutabile,*

$$M\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M[f(t)].$$

Putem demonstra următoarea propoziție:

P_7. *Dacă $f(t)$ este derivata m.p. a funcției aleatoare $f(t)$, vom avea*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f^2 = 2f\dot{f}.$$

Trebuie să arătăm că

$$M\left[\left(\frac{f^2(t+\tau) - f^2(\tau)}{\tau} - 2f\dot{f}\right)^2\right] \to 0$$

când $\tau \to 0$.

Într-adevăr,

$$M\left[\left(\frac{f^2(t+\tau) - f^2(t)}{\tau} - 2f\dot{f}\right)^2\right] =$$

$$= M\left[\left[(f(t+\tau) + f(t_0)) \cdot \left(\frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau} - \dot{f}\right) + (f(t+\tau) - f(t))\dot{f}\right]^2\right] =$$

$$= M\left[(f(t+\tau) + f(t))^2 \left(\frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau} - \dot{f}\right)^2\right] +$$

$$+ M[(f(t+\tau) - f(t))^2 \dot{f}^2] + 2M\left[(f(t+\tau) - f(t))^2 \left(\frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau} \dot{f}\right)\dot{f}\right].$$

Conform condițiilor noastre, toți termenii din membrul al doilea tind către zero cu τ, deci afirmația este verificată.

Aplicînd teoremele 1 și 2, rezultă că $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M(f^2)$ există și este egală cu

$$M\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f^2\right] = 2M(f\dot{f}).$$

Sîntem acum în măsură să demonstrăm

Teorema. *Pentru funcțiile aleatoare $f(t)$, care admit o derivată m.p., există*

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{1 - \rho(t, t+\tau)}{\tau^2}.$$

Într-adevăr, potrivit formulei (6), avem

$$M\left[\left(\frac{f'(t+\tau)-f'(t)}{\tau}\right)^2\right]=\left(\frac{\mu_{t+\tau}-\mu_t}{\tau}\right)^2+2\mu_{t+\tau}\mu_t\frac{1-\rho(t,t+\tau)}{\tau^2}.$$

Din (17) și (19) rezultă că membrul întîi are o limită cînd $\tau\to 0$, din P_7 rezultă că primul termen din membrul al doilea are de asemenea o limită, $\mu_{t+\tau}\to\mu_t$, cînd $\tau\to 0$ și, cum $\mu_t^2\neq 0$, rezultă că $\frac{1-\rho(t,t+\tau)}{\tau^2}$ are o limită finită cînd $\tau\to 0$.

7. *Integrala stochastică*. Putem concepe această integrală în mai multe feluri. Funcția aleatoare este pentru fiecare ξ dat o funcție de t. Dacă această funcție este integrabilă oricare ar fi ξ într-un interval t, integrala

$$x(\xi)=\int_a^b f(s,\xi)\,ds \tag{18}$$

este o variabilă aleatoare, limită a unui șir de variabile aleatoare obținute prin sumele parțiale care conduc la valoarea integralei.

Dacă limita sumelor intermediare există în medie pătratică, sau în probabilitate, avem o *integrală m.p.* sau *în probabilitate*.

Teorema următoare ne indică un cîmp suficient de larg pentru integrale de funcții aleatoare.

Teoremă. *Dacă $f(t)$ este continuă și dacă*

$$F(t)=\int_0^t f(s)\,ds, \tag{19}$$

vom avea, notînd cu $\dot F(t)$ derivata m.p. a funcției aleatoare $F(t)$,

$$f(t)=\dot F(t). \tag{20}$$

Pentru a demonstra aceasta, să considerăm cîtul

$$\frac{F(t+\tau)-F(t)}{\tau}=\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}f(s)\,ds$$

și identitatea

$$f(t)=\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}f(s)\,ds$$

rezultă

$$\frac{F(t+\tau)-F(t)}{\tau}-f(t)=\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}[f(s)-f(t)]\,ds.$$

Prin urmare,

$$\left[\frac{F(t+\tau)-F(t)}{\tau}-f(t)\right]^2=$$

$$=\frac{1}{\tau^2}\int_t^{t+\tau}\int_t^{t+\tau}[(f(u)-f(t))]\,[f(v)-f(t)]\,du\,dv.$$

Aplicînd valoarea medie și permutînd M cu integrala, găsim

$$M\left[\frac{F(t+\tau)-F(t)}{\tau}-f(t)\right]^2=$$

$$=\frac{1}{\tau^2}\int_t^{t+\tau}\int_t^{t+\tau}M[(f(u)-f(t))\,(f(v)-f(t))]\,du\,dv.$$

Deoarece

$$|M[(f(u)-f(t))\,(f(v)-f(t)|\leqslant\sqrt{M[(f(u)-f(t))^2]\,M[(f(v)-f(t))^2]}$$

și cum $f(t)$ este continuă m.p., deci fiind dat $\varepsilon>0$, există η_ε suficient de mic, astfel că, dacă $\tau>\eta$ deci $|u-t|\leqslant\tau<\eta$ să avem

$$M[(f(u)-f(t))^2]\leqslant\varepsilon;$$

rezultă

$$M\left[\left(\frac{F(t+\tau)-F(t)}{\tau}-f(t)\right)^2\right]<\varepsilon,$$

ceea ce demonstrează teorema.

Dacă punem

$$m(t)=M[f(t)],$$

vom avea, evident,

$$M[x,(\xi)]=\int_a^b m(s)\,ds. \tag{21}$$

Integrabilitatea valorii medii este deci o condiție necesară a integrabilității funcției aleatoare $f(t)$.

Teoremă. *Condiția necesară și suficientă pentru ca integrala m.p.* (18) *să existe este existența integralei*

$$\int_a^b\int_a^b C(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2.$$

Lăsăm în seama cititorului demonstrația acestei teoreme, care se obține aplicînd sumelor intermediare care conduc la integrală cu limită m.p. propoziția P_4.

Proprietăți spectrale ale produsului intern al unei funcții aleatoare. Numim produs scalar intern al funcției aleatoare complexe $f(t)$ funcția complexă

$$\gamma(t_1, t_2) = M[f(t_1)\overline{f(t_2)}].$$

Dacă $M[f(t)] = 0$, $C(t_1, t_2)$ este evident identică cu conexiunea.

Teoremă. *Produsele interne ale unei familii aleatoare sînt funcții de două variabile reale de tip pozitiv.*

Într-adevăr, n fiind un întreg arbitrar, $n = 1, 2, \ldots$, iar $t_1, t_2, \ldots, t_n$ un sistem de n valori ale lui t și $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un sistem de numere complexe, oarecare, vom avea:

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_j\overline{a_k}\,\gamma(t_j,t_k) = \sum_{j,k=1}^{n} M[a_j\overline{a_k}f(t_j)\,f(t_k)] =$$

$$= M\left[\left(\sum_j a_j f(t_j)\right)\overline{\left(\sum_k a_k f(t_k)\right)}\right] = M[\,|\Sigma a_j f(t_j)|^2] \geqslant 0. \qquad (22)$$

Reprezentarea spectrală a unei funcții aleatoare. Vom examina mai întîi sensul unei integrale Stieltjes generalizate

$$\int_a^b h(u)\,\mathrm{d}\omega(u), \qquad (23)$$

unde $h(u)$ este o funcție obișnuită de u și mărginită în intervalul $[a, b]$, iar $\omega(u)$ este o funcție aleatoare.

Această integrală este limita m.p. a sumelor de forma

$$S_n = \Sigma_j\, h(u_j^{(n)})\,[\omega(u_{j+1}^{(n)}) - \omega(u_j^{(n)})]$$

pentru o diviziune oarecare Δ_n a intervalului $[a, b]$.

Pentru ca această limită să existe m.p., este necesar și suficient, conform teoremei P_6, să existe

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} M[S_n S_m].$$

Însă

$$M[S_n S_m] = \sum_{j,l} h(u_j^n)\,h(u_l^m)\,[\omega(u_{j+1}^n)\,\overline{\omega}(u_{l+1}^m) -$$

$$- \omega(u_{j+1}^n)\,\overline{\omega}(u_l^n) - \omega(u_j^n)\,\overline{\omega}(u_{l+1}^m) + \omega(u_j^n)\,\omega(u_j^m)].$$

Prin urmare, pentru existența integralei (23) este necesar și suficient ca valorile

$$M[S_n S_m] = \sum_{j,l} h(u_j^n)\,\bar{h}(u_l^m)\,[\Omega(u_{j+1}^n, u_{l+1}^n) -$$

$$- \Omega(u_{j+1}^n, u_l^m) - \Omega(u_j^n, u_{l+1}^m) + \Omega(u_j^n, u_j^m)]$$

să aibă o limită determinată. Am notat

$$\Omega(u_1, u_2) = M[\omega(u_1)\,\overline{\omega}(u_2)].$$

Această limită este

$$\int_a^b \int_a^b h(u_1)\,\bar{h}(u_2)\,\mathrm{d}\Omega(u_1, u_2).$$

Ea este realizată în ipoteza, pe care am făcut-o, că $|h(u)|$ este limitată în (a, b) și că $C(u_1, u_2)$ este cu variație limitată.

Vom presupune că $C(u_1, u_2)$ este cu variație limitată pe întreg planul real și vom lua $h(u) = \mathrm{e}^{iut}$, u și t fiind reale. În acest caz, integrala

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{iut}\,\mathrm{d}\omega(u) \qquad (24)$$

există pentru orice t real și este continuă m.p.

Să considerăm funcțiile aleatoare care au această reprezentare spectrală numită și armonică.

Potrivit calculului precedent, vom avea

$$\gamma(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i(t_1u_1 - t_2u_2)}\,\mathrm{d}\Omega(u_1, u_2). \qquad (25)$$

Se poate demonstra și teorema inversă:

Dacă produsul scalar $C(t_1, t_2)$ al funcției aleatoare $f(t)$ este susceptibil de reprezentarea (25), unde $\Omega(u_1, u_2)$ este o funcție de tip pozitiv cu variație limitată, atunci $f(t)$ poate fi reprezentată sub forma armonică (24).

Aceste reprezentări armonice pot fi transpuse în reprezentări spectrale.

Să considerăm funcția aleatoare continuă $f(t)$. Dacă posedăm pentru $\gamma(t_1, t_2)$ reprezentarea spectrală uniform convergentă

$$\gamma(t_1, t_2) = \Sigma |\lambda_j|^2 \varphi_j(t_1) \overline{\varphi_j}(t_2), \tag{26}$$

unde $\varphi_j(t)$ formează un sistem ortogonal și normat cu proprietatea

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t_1, t_2) \overline{\varphi_j}(t_2)\, dt_2 = |\lambda_j|^2 \varphi_j(t_1), \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{27}$$

considerăm variabilele aleatoare

$$f_j = \int_a^b f(t)\, \varphi_j(t)\, dt \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{28}$$

a căror existență pentru a și b este asigurată de continuitatea funcțiilor $\varphi_j(t)$ și de continuitatea m.p. a funcției $f(t)$. Vom avea, evident,

$$M[f_j \overline{f_l}] = M \int_a^b \int_a^b f(t_1) \overline{f(t_2)}\, \varphi_j(t_1)\, \overline{\varphi_l}(t_2)\, dt_1\, dt_2 =$$

$$= \int_a^b \varphi_j(t_1)\, dt_1 \int_a^b \gamma(t_1, t_2)\, \overline{\varphi_l(t_2)}\, dt_2.$$

Deci, ținînd seama de (27),

$$M[f_j \overline{f_l}] = |\lambda_l|^2 \int_a^b \varphi_j(t_1)\, \overline{\varphi_l}(t_1)\, dt_1 = \delta_{jl} |\lambda_l|^2. \tag{29}$$

În același timp,

$$M[f(t)\, \overline{f_l}] = M\left[\int_a^b f(t)\, f(t_1)\, \overline{\varphi_l}(t_1)\, dt_1\right] =$$

$$= \int_a^b \gamma(t, t_1)\, \overline{\varphi_l(t_1)}\, dt_1 = |\lambda_l|^2 \varphi_l(t). \tag{30}$$

Dacă punem

$$f_{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t)\, f_j,$$

vom avea

$$|f(t) - f_{(n)}(t)|^2 = |f(t)|^2 - \sum_{j=1}^{n} \overline{\varphi_j(t)}\, f(t)\, \overline{f_j} - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t)\, \overline{f(t)}\, f_j +$$

$$+ \sum_{j,k=1}^{n} f_j \overline{f_k} \varphi_j(t)\, \overline{\varphi_k(t)}.$$

Prin urmare, potrivit cu (30) și (29),

$$M[|f(t) - f_{(n)}(t)|^2] = M[|f(t)|^2] - \sum_j |\lambda_j|^2\, \overline{\varphi_j(t)}\, \varphi_j(t) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2\, \overline{\varphi_j(t)}\, \varphi_j(t) + C(t, t).$$

Dacă ținem seama de (26), rezultă că

$$M[|f(t) - f_{(n)}(t)|^2]$$

tinde uniform către zero cînd n tinde către infinit, $t \in [a, b]$, prin urmare

$$f(t) = \lim_{n \to \infty} f_{(n)}(t)$$

în medie pătratică, ceea ce îngăduie să scriem

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \varphi_j(t). \tag{31}$$

Acest rezultat parțial, pentru cazul spectrului discontinuu (27), ne arată că analiza spectrală a funcției aleatoare $f(t)$ se efectuează cu ajutorul analizei spectrale a funcției $C(t_1, t_2)$, după cum vom vedea, de aproape, în cazul particular al proceselor staționare.

§ 3. Procese staționare

1. *Generalități.* Definiții. Fie $f(t)$ o funcție aleatoare de finită pe cîmpul de probabilitate $\{E, \mathcal{K}, P\}$, n un întreg oarecare, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ n numere succesive și legea de probabilitate

$$P\{a_1 \leqslant f(t_1) < b_1,\ a_2 \leqslant f(t_2) < b_2, \ldots, a_n \leqslant f(t_n) < b_n\} = \\ = P_{d_1, d_2, \ldots, d_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

a succesiunii de variabile aleatoare $f(t_1)$, $f(t_2)$, ..., $f(t_n)$, unde am notat cu d_j intervalul (a_j, b_j).

Procesul aleator reprezentat de $f(t)$ se numește staționar dacă

$$P_{d_1, d_2, \ldots, d_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = P_{d_1, d_2, \ldots, d_n}(t_1 + u, t_2 + u, \ldots, t_n + u), \quad (1)$$

oricare ar fi u, oricare a fi n, sistemul $t_1, t_2, \ldots, t_n$ și intervalele $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

2. *Conexiunea și dispersia.* Vom presupune că procesul are dispersie finită și deci, potrivit proprietății fundamentale

$$M[f^2(t)] = M[f^2(0)] = \sigma^2$$

există în același timp

$$M[f[t)] = M[f(0)] = m$$

și

$$M[f(t_1) f(t_2)] = M(f(0) f(t_2 - t_1)].$$

Vom înlocui funcția $f(t)$ cu redusa ei $\frac{f(t) - m}{\sigma^2}$, pe care o vom denumi din nou $f(t)$, ceea ce dă

$$M[f^2(t)] = 1,\ M[f(t)] = 0. \quad (2)$$

În acest caz,

$$\rho(t_1, t_2) = C(t_1, t_2) = M[f(0)\, f(t_2 - t_1)] = \rho(0, t_2 - t_1) = \rho(t_2 - t_1)$$

sau

$$\rho(u) = M[f(0)\, f(u)]. \quad (3)$$

Conform propoziției P_6, procesul staționar este continuu dacă $\rho(u)$ este continuă și reciproc.

Este suficient să presupunem că $\rho(u)$ este continuă în origine, deci că

$$\lim_{u \to 0} \rho(u) = \rho(0) = 1.$$

De aici rezultă continuitatea uniformă a funcției $\rho(u)$ pentru întreaga axă reală.

Într-adevăr,

$$\rho(u + \Delta) - \rho(u) = M[f(0)\,(f(u + \Delta) - f(u))].$$

Deci, folosind și lema lui Schwartz,

$$|\rho(u + \Delta) - \rho(u)| \leqslant \sqrt{M[f^2(0)]\, M[(f(u + \Delta) - f(u))^2]}$$

și ținînd seama de (2) și (3), obținem

$$|\rho(u + \Delta) - \rho(u)|^2 \leqslant 2[1 - \rho(\Delta)];$$

$\rho(\Delta)$ fiind continuă în origine, dacă se dă ε există un η astfel că

$$1 - \rho(\Delta) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2},$$

deci

$$|\rho(u + \Delta) - \rho(u)| \leqslant \varepsilon$$

dacă $\Delta < \eta$. Aceasta demonstrează afirmația noastră.

3. **Teorema lui Hincin.** *Conexiunea $\rho(u)$ a unui proces continuu staționar are următoarea reprezentare:*

$$\rho(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos ua \, \mathrm{d}F(a), \quad (4)$$

unde $F(a)$ este o funcție monotonă nedescrescătoare cu variație mărginită. Demonstrația acestei teoreme rezultă imediat din teorema 1, din paragraful precedent, care pentru cazul de față revine la afirmarea inegalității

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} a_j \overline{a_k}\, \rho(t_k - t_j) \geqslant 0 \quad (5)$$

pentru orice n, orice sistem ordonat $t_1, t_2, \ldots, t_n$ și orice sistem de numere complexe $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Funcția $\rho(u)$ este deci o funcție de tip pozitiv. Ca atare, conform teoremei lui Bochner, există o funcție monotonă nedescrescătoare continuă la stînga și cu variație mărginită $F(a)$, pentru care $\rho(u)$ să aibă reprezentarea (4) care este unică.

Suficiența reprezentării (4) pentru corelația continuă $\rho(u)$, pentru a ne da funcția staționară $f(t)$, se stabilește imediat. Într-adevăr, dacă $\rho(u)$ are reprezentarea (4), îi putem ușor da o formă spectrală (21), § 2, de unde cu formula (31), § 2 se deduce expresia lui $f(t)$.

Putem încă determina procesul staționar $f(t)$ cînd se dă $\rho(t_2 - t_1)$ cu reprezentarea (3) în modul următor:

Distribuția gaussiană n dimensională a vectorului $f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_n)$ pentru orice n și orice sistem de numere reale $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, pentru care

$$M[f(t_j)] = 0, \quad M[f^2(t_j)] = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

iar coeficientul de corelație internă este $\rho(t_j - t_k)$, are densitatea

$$H_n = e^{-A(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \tag{6}$$

unde $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{r,s=1}^{n} a_{rs} x^r x^s$ este o formă pătratică definită pozitiv așa cum arată (5). Într-adevăr, funcția caracteristică a acestei distribuții este

$$\varphi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{j,k} \lambda^{jk}\tau_j\tau_k},$$

unde

$$\lambda^{jj} = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_j^2}\right)_{\tau=0} = 1, \quad \lambda^{jk} = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_j\partial\tau_k}\right)_{\tau=0} = \rho(t_k - t_j).$$

Deoarece, după (5), dacă punem $a_k = \tau_k (k = 1, 2, \ldots, n)$, avem

$$\sum \tau_j\tau_k \rho(t_k - t_j) \geqslant 0,$$

φ este funcția caracteristică a unei legi gaussiene. Deoarece această lege este invariantă cînd în loc de momentele $t_1, t_2, \ldots, t_n$ considerăm momentele $t_1 + u, t_2 + u, \ldots, t_n + u$, procesul este staționar. Cu aceasta, problema este efectiv rezolvată.

Spectrul funcției aleatoare $f(t)$ este dat de funcția de repartiție $F(a)$, care se mai numește și *funcție spectrală a procesului* $f(t)$.

Să presupunem, de exemplu, că

$$f(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j e^{i\alpha_j t}, \tag{7}$$

unde a_j sînt variabile aleatoare reale, iar α_j numere reale crescătoare cu indicele j. Deoarece presupunem $M[f(t)] = 0$, $M[|f(t)|^2] = 1$, rezultă

$$M[a_j] = 0, \quad \sum M[a_j^2] = 1. \tag{8}$$

Vom presupune de asemenea că variabilele a_j sînt necorelate două cîte două. Rezultă că

$$M[a_j a_k] = 0. \tag{9}$$

În acest caz, $\rho(u)$ este o funcție complexă și are expresia

$$\rho(t_2 - t_1) = C(t_1, t_2) = M[f(t_1)\overline{f(t_2)}] = \sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 e^{i\alpha_j(t_1 - t_2)},$$

unde

$$\sigma_j^2 = M[a_j^2] \text{ cu } \sum \sigma_j^2 = 1.$$

Procesul este, evident, continuu și staționar în sensul restrîns care corespunde faptului că $C(t_1, t_2) = \rho(t_2 - t_1)$.

Dacă seria

$$\sum_{j=1}^{m} |a_j|$$

este convergentă în m.p., presupunînd verificate condițiile (8) și (9) pentru $m = \infty$, găsim imediat

$$\rho(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 e^{-i\alpha_j u}.$$

Fie acum o reprezentare m.p.

$$f(t) = \int e^{i\alpha t}\, d\omega(\alpha),$$

unde $\omega(\alpha)$ este o funcție aleatoare cu creșteri necorelate (generalizarea imediată a funcțiilor cu creșteri independente de care ne vom ocupa), avînd, în mod precis, proprietățile următoare:

$$M[(\omega(\alpha))^2] < \infty$$

pentru orice α real. În acest caz, momentele $M[\omega(\alpha)]$ și $M[(\omega(\beta) - \omega(\alpha))(\omega(\delta)) - \omega(\gamma))]$ există. Vom presupune $M[\omega(\alpha)] = 0$ și ca o caracteristică proprie *funcțiilor aleatoare*, cu creșteri necorelate:

$$M[(\omega(\beta) - \omega(\alpha))(\omega(\delta) - \omega(\gamma))] = 0$$

ori de cîte ori intervalele (α, β), (γ, δ) nu se acoperă cu nici o parte a lor.

Se poate arăta că această reprezentare este totdeauna posibilă, și anume, într-un singur mod (teoremele lui Cramer și Loeve) și că ea îngăduie analiza spectrală completă a funcției aleatoare $f(t)$.

§ 4. Funcții aleatoare cu creșteri independente

1. *Definiție și proprietăți. O funcție aleatoare $f(t, \xi)$ este cu creșteri independente*, după terminologia lui P. Levy, *dacă pentru orice mulțime de intervale*

$$(t_j, t_j + \tau_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

fără puncte comune, variabilele

$$f(t_j + \tau_j, \xi) - f(t_j, \xi) \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

sînt independente în totalitatea lor.

2. Vom examina aici numai funcțiile aleatoare omogene pentru care funcția de repartiție a creșterii

$$f(t + \tau, \xi) - f(t, \xi)$$

este independentă de t.

Pentru această categorie de funcții avem următoarea

Teoremă. *Variabilele $f(t + \tau, \xi) - f(t, \xi)$ sînt indefinit divizibile.*

Vom demonstra această teoremă folosind proprietățile funcțiilor caracteristice ale acestor variabile.

Fie $F(a, \tau)$ funcția de repartiție a variabilei $f(t + \tau, \xi) - f(t, \xi)$ și

$$\varphi(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}\, dF(a, \tau)$$

funcția caracteristică corespunzătoare.

Dacă $t_1 < t_2 < t_3$ sînt trei momente succesive, funcțiile de repartiție ale variabilelor $f(t_2, \xi) - f(t_1, \xi)$ și $f(t_3, \xi) - f(t_2, \xi)$ sînt, respectiv, $F(a, t_2 - t_1)$ și $F(a, t_3 - t_2)$, iar funcțiile caracteristice sînt $\varphi(x_1, t_2 - t_1)$, $\varphi(x_1, t_3 - t_2)$. Funcția caracteristică a sumei $f(t_3, \xi) - f(t_1, \xi)$ celor două variabile independente este

$$\varphi(x, t_3 - t_1) = \varphi(x, t_2 - t_1)\, \varphi(x, t_3 - t_2). \tag{1}$$

Dacă luăm $n + 1$ valori echidistante, $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1}$, cu

$$t_{j+1} - t_j = \tau \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

vom avea

$$\varphi(x, n\tau) = [\varphi(x, \tau)]^n$$

sau încă, punînd $n\tau = \theta$,

$$\varphi(x, \theta) = \left[\varphi\left(x, \frac{\theta}{n}\right)\right]^n \tag{2}$$

pentru orice n.

Egalitatea (2) este proprie funcțiilor caracteristice ale variabilelor indefinit divizibile. Această egalitate este încă echivalentă cu

$$\varphi(x, r) = [\varphi(x, 1)]^r \tag{3}$$

pentru orice $r > 0$.

Legea de repartiție a oricărei diferențe este deci determinată odată cu legea de repartiție a variabilei $f(1, \xi) - f(0, \xi)$. Avem

$$\ln \varphi(x, 1) = i\alpha x - \frac{1}{2}\beta^2 x^2 + \int\left[e^{ixs} - 1 - \frac{xs}{1 + s^2}\right]\frac{1 + s^2}{s^2}\, dG(s), \tag{4}$$

$G(s)$ fiind o funcție nedescrescătoare cu variație limitată. Pentru a ajunge la o formulă asemănătoare, dată de Cramer, vom proceda în felul următor:

Presupunem

$$\overline{f(t, \xi)} = 0, \quad f(0, \xi) = 0 \tag{5}$$

și, de asemenea, că

$$M[f^2(t, \xi)] < \infty. \tag{6}$$

Avem atunci

$$\left[\frac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial x}\right]_{x=0} = \mathrm{i}(\overline{f(t+\tau, \xi) - f(t, \xi)}) = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi(x, \tau)}{\partial x^2}\right]_{x=0} = \tau\left[\varphi^{\tau-1}(x, 1)\frac{\partial^2 \varphi(x, 1)}{\partial x^2}\right]_{x=0}.$$

Deci,

$$\mu^2(\tau) = -\left[\frac{\partial^2 \varphi(x, \tau)}{\partial x^2}\right]_{x=0} = -\tau\left[\frac{\partial^2 \varphi(x, 1)}{\partial x^2}\right]_{x=0}, \tag{7}$$

$$\mu^2(\tau) = \tau\mu^2(1) = \tau\mu^2.$$

Putem deci scrie

$$\varphi(x, \tau) = 1 - \theta\frac{\mu^2 x^2 \tau}{2}, \qquad |\theta| \leqslant 1.$$

Prin urmare,

$$\frac{\varphi(x, \tau) - 1}{\tau} = -\theta\frac{\mu^2 x^2}{2} = \frac{\varphi^\tau(x) - 1}{\tau} \tag{8}$$

rămîne limitată cînd $\tau \to 0$, oricare ar fi x. Deci $\varphi(x) = \varphi(x, 1) \neq 0$.

Putem atunci scrie

$$\ln \varphi(x) = \left[\frac{\partial \varphi^\tau(x)}{\partial \tau}\right]_{\tau=0} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\varphi(x, \tau) - 1}{\tau},$$

$$\ln \varphi(x) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}xa} - 1 - \mathrm{i}ax)\, \mathrm{d}F(a, \tau), \tag{9}$$

$F(a, \tau)$ fiind funcția de repartiție a variabilei $f(\tau, \xi) - f(0, \xi) = f(\tau, \xi)$.

3. Să introducem acum funcția

$$L_\tau(a) = \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{a} a^2\, \mathrm{d}F(a, \tau), \tag{10}$$

care este nedescrescătoare cu a și care crește de la $L_\tau(-\infty) = 0$ la $L_\tau(+\infty) = \mu^2$.

Din mulțimea compactă $L_\tau(a)$ putem extrage un șir $L_{\tau_j}(a)$ cu $\tau_j \to 0$ care are o limită $L(a)$. În formula (9), care pe baza relației (10) devine

$$\ln \varphi(x) = \lim_{\tau \to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xa} - 1 - \mathrm{i}xa}{x^2}\, \mathrm{d}L_\tau(a),$$

facem $\tau = \tau_j$ și trecem la limită. Obținem

$$\ln \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xa} - 1 - \mathrm{i}xa}{x^2}\, \mathrm{d}L(a). \tag{11}$$

Dacă $L(a)$ este discontinuă în origine și $L(+0) - L(-0) = \beta^2$,

$$\ln \varphi(x) = -\frac{1}{2}\beta^2 x^2 + \int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}xa} - 1 - \mathrm{i}xa)\, \mathrm{d}M(a)$$

cu excluderea lui zero. Vom pune

$$H(u) = \int_{-\infty}^{u} \mathrm{d}L(u), \qquad u < 0,$$

$$K(u) = \int_{u}^{+\infty} \mathrm{d}L(u), \qquad u > 0.$$

$$\ln \varphi(x) = -\frac{1}{2}\beta^2 x^2 + \int_{-\infty}^{-0} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xa} - 1 - \mathrm{i}xa}{a^2}\, \mathrm{d}H(a) + \int_{+0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xa} - 1 - \mathrm{i}xa)}{a^2}\, \mathrm{d}K(a); \tag{12}$$

$f(t, \xi) = f(t, \xi) - f(0, \xi)$ este o variabilă gaussiană dacă $\varphi(x)$ este o lege normală. Însă legea normală se obține dacă $H(u) = 0$ pentru $u < 0$, $K(u) = 0$ pentru $u > 0$.

Din (12) rezultă

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2}\, \mathrm{e}^{\int_{-\infty}^{-0}}\, \mathrm{e}^{\int_{+0}^{+\infty}}.$$

Deci

$$\varphi(x) = \lim e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2} e^{\Sigma(e^{ixa_j}-1)\Delta H_j} e^{\Sigma(e^{ixa_l}-1)\Delta H_j} e^{i\gamma\Delta x}$$

este suma unei variabile normale cu un număr de variabile care are discontinuități egale cu 1 în punctele γ_Δ și cu variabilele Poisson care corespund de asemenea la emisiuni discontinue în intervale egale de timp.

Variabila este normală dacă toate aceste discontinuități sînt nule.

4. *Exemplu. Repartiția lui Poisson.*

Notăm cu $p_k(t)$ probabilitatea ca în intervalul t de timp să se producă k evenimente. Presupunem

$$p_1(\Delta) = a\Delta + 0(\Delta v),$$

$$p_l(\Delta) = 0(\Delta), \quad l > 1.$$

Presupunem, de asemenea, independența creșterilor, deci

$$p_0(t+\Delta) = p_0(t)p_0(\Delta),$$

$$p_n(t+\Delta) = p_n(t)\,p_0(\Delta) + p_{n-1}(t)\,p_1(\Delta) + \sum_{k=2}^{n} p_{n-k}(t)\,p_k(\Delta).$$

Deoarece

$$p_0(\Delta) + p_1(\Delta) + \cdots = 1,$$

adică

$$p_0(\Delta) = 1 - a\Delta + 0(\Delta),$$

de unde

$$p_0(t+\Delta) - p_0(t) = p_0(t)(p_0(\Delta) - 1);$$

deci,

$$\frac{p_0(t+\Delta) - p_0(t)}{\Delta} = -ap_0(t) + \frac{0(\Delta)}{\Delta}.$$

La limită

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -ap_0(t),$$

$$p_0(t) = ke^{-at}.$$

A doua ecuație devine

$$p_n(t+\Delta) - p_n(t) = p_n(t)\,(p_0(\Delta) - 1) + p_{n-1}(t)\,a\Delta + 0(\Delta),$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -ap_n(t) + ap_{n-1}(t).$$

Dacă facem substituția

$$p_n(t) = e^{-at}q_n(t),$$

ecuația precedentă devine

$$\frac{dq_n(t)}{dt} = aq_{n-1}(t),$$

$$q_n(t) = a\int_0^t q_{n-1}(u)\,du,$$

$$q_1(t) = a\int_0^t q_0(u)\,du.$$

Însă $q_0(t) = k$, deci

$$q_1(t) = kat,$$

$$q_2(t) = k\frac{a^2t^2}{2}, \quad q_n(t) = k\frac{a^nt^n}{n!},$$

$$p_n(t) = ke^{-at}\frac{a^nt^n}{n!}$$

$$p_0(t) + p_1(t) + \cdots = k = 1.$$

5. *Coeficientul de conexiune* al funcției $f(t, \xi)$ este, conform definiției,

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{M[f(t_1, \xi)\,f(t_2, \xi)]}{\mu(t_1)\mu(t_2)},$$

unde

$$\mu^2(t) = M[f^2(t, \xi)].$$

Însă

$$M[f(t, \xi)(f(t+\tau, \xi) - f(t, \xi))] = 0,$$

deoarece valoarea medie a produsului a două variabile independente este produsul valorilor medii, iar $M[f(t, \xi)] = 0$. Avem deci

$$M[f(t, \xi)f(t+\tau, \xi)] = M[f^2(t, \xi)],$$

$$\rho(t, t+\tau) = \frac{\mu^2(t)}{\mu(t)\,\mu(t+\tau)} = \frac{\mu(t)}{\mu(t+\tau)}.$$

Ţinînd seama de formula (7), obţinem

$$\rho(t, t+\tau) = \sqrt{\frac{t}{t+\tau}} = 1 - \frac{\tau}{t} + \ldots,$$

de unde

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{1 - (t, t+\tau)}{\tau} \to \frac{1}{t},$$

deci

Teoremă. $1 - \rho(t, t+\tau)$ *este de ordinul întîi faţă de* τ *cînd* $\tau \to 0$.

Ţinînd seama de această teoremă, rezultă că $f(t, \xi)$ nu admite o derivată în medie pătratică.

6. Să considerăm o funcţie aleatoare $f(t)$ cu creşteri independente

$$f(t+\tau) = f(t) + [f(t+\tau) - f(t)].$$

Dispersia σ a creşterii $\mu\ (t+\tau) - \mu(t)$, care este independentă de $\mu(t)$, este legată de dispersiile $\mu(t+\tau)$ şi $\mu(t)$ prin relaţia cunoscută

$$\mu^2(t+\tau) = \mu^2(t) + \sigma^2.$$

Deci,

$$\sigma = \sqrt{\mu^2(t+\tau) - \mu^2(t)} = \sqrt{\mu^2(\tau)},$$

de unde, conform formulei (7), obţinem

$$\sigma = \mu\sqrt{\tau}.$$

Prin urmare,

$$\frac{f(t+\tau) - f(t)}{\mu\sqrt{\tau}}$$

este o variabilă redusă. Densitatea ei de probabilitate este

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Prin urmare, dacă $\tau \to 0$,

$$g(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{f(t+\tau) - f(t)}{\mu\sqrt{\tau}}$$

este o funcţie aleatoare cu proprietatea că $g(t)$ şi $g'(t)$ sînt variabile independente.

Pentru legătura între $f(t)$ şi $g(t)$ putem încă scrie, cu P. Levy,

$$f(t) = \int_0^t g(u)\,du$$

(convergenţa integralei fiind m.p.), cu semnificaţia care rezultă din definiţia precedentă a lui $g(t)$.

BIBLIOGRAFIE

K. BACHELIER, *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1912.

L. BACHELIER, *Les probabilités cinématiques et dynamiques*, Ann. Ec. Normal Sup., t. 30, 1913.

A. Н. КОЛМОГОРОВ, Основные понятия теории вероятностей, О.Н.Т.И., м.л., 1936.

R. FORTET, *Sur la notion de fonction aléatoire*, Revue Scientifique, 79, 1941.

R. FORTET, *Les fonctions aléatoires du type de Markoff*, Journal de Mathématiques XXII, 1943.

R. FORTET, *Quelques travaux rècents sur le mouvement brownien*, Ann. de l'Inst. H. Poincare XI, 1949.

W. FELLER, *Zur Theorie der stochastischen Prozesse*, Math. Ann., 113, 1937.

P. LEVY, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, Paris.

P. LEVY, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Gauthier-Villars, Paris, 1948.

O. ONICESCU, *Théorie générale des chaînes à liaisons complètes*, Actualités scientifiques, Hermann, Paris, 1933.

O. ONICESCU şi GH. MIHOC, *Chaines de variables aléatoires*. Problèmes asymptotiques, Bucureşti, 1942.

O. UHLENBECK şi L. ORNSTEIN, *On the theory of the brownian motion*, Physic. Review, 36, 1930.

S. CHANDRASEKAR, *Stochastic Problems in Physics and Astronomy*, Review of Modern Physics, vol. 15, nr. 1, 1943.

M. LOÈVE, *Fonctions aléatoires du second ordre*, Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, t. 220, 1945, t. 222, 1946, Paris.

M. LOÈVE, *Sur les fonctions aléatoires du second ordre*, Revue scientifique, t. 84, 1946.

A. KOLMOGOROV, *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Math. Ann, 104, 1930.

E. SLUTSKY, *Sur les fonctions aléatoires*, Actualités scientifiques, nr. 728, Hermann, Paris.

S. BERNSTEIN, *Equations différentielles stochastiques*. Actualités scientifiques, nr. 728, Hermann, Paris.

J. KAMPÉ de FÉRIET, *Sur le spectre de la turbulence homogène*, Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, Paris, 1939, p. 722.

H. CRAMER, *On the theory of stationary random process*, Ann. of Math., 1940.
G. DEDEBANT și PH. WEHRLÈ, *Mecanique aléatoire Portugaliae Physica*, 1, 1944.
J. BASS, *Sur la structure des fonctions aléatoires*, Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, Paris, 1945.
A. BLANC LAPIERRE, *Les fonctions aléatoires stationnaires Laplaciennes*, Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, Paris, t. 220, 1945.
A. BLANC, R. FORTET, *Analyse harmonique des fonctions aléatoires à caractère stationnaire*, Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences Paris, t. 225, 1947.
S. BOCHNER, *Stochastic processes*, Ann of Math., t. 48, 1947.
J. KAMPÉ de FÉRIET, *Sur les fonctions aléatoires*, Compte Rendus de l'Ac. des Sciences, Paris, t. 225, 1947 și t. 226, 1948.
A. HINCIN, *Sulle succesioni stazionarie di eventi*, Giornale dei Inst. Ital. degli Attuari, t. 3, 1932.
A. HINCIN, *Korrelazionstheorie der stationären stochastischen Prozesse*, Math. Ann., t. 109, 1934.
A. KOLMOGOROV, *Sulla forma generale di un processo stocatisco omogeneo*, Rendiconti dell'Acad. dei Lincei, t. 15, 1932.
P. LEVY, *Sur certains processes stochastiques homogènes*, Compositio mathematica, t. 7, 1939.
A. BLANC-LAPIERRE și R. FORTET, *Theorie des fonctions aléatoires*, Paris, 1953.
J. L. DOOB, *The theory of stochastic processes*, New York, 1954.
K. L. CHUNG, *A curse in probability theory*, New York, Harcourt, Brace & World, 1968.
W. FELLER, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. 1 (ediția a III-a), 1967; vol. 2 (ediția a II-a), 1971, New York, Wiley.
S. KARLIN, *A first course in stochastic processes*, New York, Academic Press, 1966.
E. PARZEN, *Stochastic processes*, San Francisco, 1962.
I. CUCULESCU, *Curs de teoria probabilităților* (litografiat), Universitatea București, 1975.

CAPITOLUL XI

MIȘCAREA BROWNIANĂ

1. Definiție. Mișcarea browniană propriu-zisă constă în sistemul de mișcări ale unor particule foarte mici ale unei substanțe, aflate în suspensie într-un fluid, determinate de ciocnirile cu moleculele fluidului care sînt în stare de agitație moleculară. Mișcarea browniană are deci caracteristicile unui fenomen aleator.

Fluidul este presupus omogen, izotrop și în echilibru termic. Mișcarea este prin urmare permanentă, de aceea ea nu va depinde de momente, ci numai de intervalele de timp în care are loc.

Legea echipartiției energiei pentru moleculele fluidului a condus pe fizicieni să considere coordonatele fiecărei particule ca funcții aleatoare $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, independente între ele și cu aceeași lege de probabilitate.

De unde concluzia grăbită, dar comodă și utilă, că este suficient studiul uneia dintre aceste funcții.

2. *Mersul la întîmplare.* Primul examen probabilist al mișcării browniene, semnalată de Brown la începutul secolului trecut, are următoarea schemă, care se regăsește, aprofundată, și în unele cercetări recente.

Mișcarea se petrece într-o singură dimensiune. Particula poate avea deplasări de aceeași lungime l. După fiecare pas ea poate merge înainte sau înapoi cu aceeași probabilitate. Aplicînd regulile obișnuite în calculul probabilităților, probabilitatea ca după n pași particula să se găsească la o distanță cuprinsă între x_1 și x_2 de la poziția inițială, este pentru n suficient de mare,

$$P_{x_1, x_2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi n l^2}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2nl^2}} dx. \qquad (1)$$

Valoarea medie a pătratului distanței este, în cei n pași efectuați, sau în n unități de timp.

$$\overline{x^2} = D_n, \tag{2}$$

urmînd să se determine, ținînd seama de fluid, de forma și de natura particulei, coeficientul de difuzie D.

Această schemă, denumită astăzi a *mersului la întîmplare*, a fost reluată, de mai mulți cercetători, cum sînt: Pólya, Hincin, Chandrasekar. Acesta din urmă a ajuns la rezultate interesînd de aproape și alte fenomene fizice.

Observăm imediat că în această cercetare caracterul mecanic al mișcării efectuată de particulă sau forțele care acționează asupra ei nu sînt luate în considerare. Și totuși, rezultatele principale ale acestei teorii reprezentate de formulele (1) și (2) au fost confirmate de experiență și au constituit principala justificare a concepției probabiliste a mișcării browniene.

3. *Formula lui Einstein. Ecuația lui Smoluhovski.* Punctul de vedere mai sistematic și mai complet al lui Einstein (1906) și Smoluhovski (1906) introduce cercetarea propriu mecanică a forțelor care intervin în mișcarea particulelor și conduce la precizarea semnificației fizice a coeficientului de difuzie. Considerații de continuitate înlocuiesc, parțial, punctul de vedere pur discontinuu inițial.

Suspensia este, după Einstein, un colectiv canonic de sisteme, fiecare sistem fiind constituit din cîte o singură particulă. Numărul particulelor care se găsesc într-un element de fază $d\omega$ este

$$n = Ae^{-\frac{NE}{RT}} d\omega,$$

N fiind numărul lui Avogadro, $E = E_{cin} + V$ energia și T temperatura absolută.

Fie q una dintre coordonatele de poziție ale sistemului, care nu figurează în E_{cin}, ci numai în V. Putem scrie, punînd în evidență numai componența dq,

$$n = Be^{-\frac{NV(q)}{RT}} dq = F(q)\, dq. \tag{3}$$

Să considerăm pe q ca pe o variabilă aleatoare, $\psi(\xi)\, d\xi$ fiind probabilitatea ca ea să aibă o valoare cuprinsă între ξ și $\xi + d\xi$.

Dacă punem $\overline{\delta^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \psi(\xi)\, d\xi$, numărul de particule care trec prin valoarea q_0 în timpul t este, pe de o parte, $-\frac{1}{2} F'(q)_0\, \overline{\delta^2}$ și pe de altă parte, $kfF(q_0)\, t$, unde $f = -\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)_{q=q_0}$. Egalînd, obținem

$$\overline{\delta^2} = \frac{2RTk}{N} t, \quad \overline{\delta^2} = \overline{q^2}. \tag{4}$$

Conform formulei lui Stokes, $k = \frac{1}{6\pi\zeta a}$ dacă q este parametru de translație și $k = \frac{1}{8\pi\zeta a^3}$ dacă q este un unghi. Numeroase verificări experimentale de mare precizie au fost date acestor formule în special de către J. Perrin.

O cercetare analoagă pentru un corp solid a fost efectuată mai tîrziu de F. Perrin cu rezultate concordante cu acestea.

Prin aceeași considerație a fiecărui parametru de poziție ca o variabilă aleatoare, mai precis a drumului $q - q_0$ ca variabilă aleatoare, Einstein și Smoluhovski asimilează fenomenul mișcării browniene cu procesul de difuziune și stabilesc faptul că densitatea de repartiție a drumurilor $q - q_0$, în intervalul (t_0, t), verifică ecuația difuziei, sau a căldurii

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial q^2} \tag{5}$$

și este dată de legea gaussiană

$$\rho(q - q_0, t - t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t - t_0)}} e^{-\frac{1}{4D}\frac{(q-q_0)^2}{t-t_0}}. \tag{6}$$

Introducerea ecuației (5) în cercetarea mișcării browniene și introducerea de către Smoluhovski a relației funcționale dintre probabilități au însemnat pași hotărîtori în această teorie, care, totuși s-a putut constitui sistematic abia începînd din 1930.

4. *Ecuația diferențială stochastică a lui Langevin.* Trebuie însă semnalată teoria foarte importantă a lui Langevin. (1908), care face să intervină elementele mecanice în cercetarea mișcării browniene. Fie m masa particulei, ζ coeficientul de frecare, a raza particulei considerată ca o sferă, X forța care acționează

asupra particulei (forța de cîmp). Dacă asimilăm efectul ciocnirilor particulei cu moleculele mediului cu o rezistență proporțională cu viteza, atunci mișcarea se va efectua după ecuația

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi\zeta a\frac{dx}{dt} + X, \tag{7}$$

care se transformă, după înmulțirea cu x, în

$$\frac{1}{2}m\frac{d^2(x^2)}{dt^2} - m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -3\pi\zeta a\frac{d(x^2)}{dt} + Xx. \tag{8}$$

Presupunem că toate particulele au aceeași masă și facem media diferiților termeni pentru toate particulele. Aceasta înseamnă să considerăm diferitele mărimi care intervin în ecuație, în primul rînd x și Xx, ca variabile aleatoare cu aceeași funcție de repartiție; t singur nu este variabilă aleatoare.

Avem, prin urmare,

$$\frac{1}{2}m\frac{d^2(\overline{x^2})}{dt^2} - \overline{m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = -3\pi\zeta a\frac{\overline{d(x^2)}}{dt} + \overline{Xx}.$$

Presupunem $\overline{Xx} = 0$ și observăm că, în ipoteza echilibrului termic, energia cinetică medie a particulelor este egală cu energia cinetică medie a moleculelor, deci

$$\overline{m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = RT.$$

Ecuația care rezultă, ținînd seama de aproximațiile admise ne dă

$$\frac{d(\overline{x^2})}{dt} = \frac{kT}{3\pi\zeta a}.$$

Presupunînd $\overline{x}_0 = 0$, găsim relația lui Einstein

$$\overline{x^2} = \frac{kT}{3\pi\zeta a}(t - t_0)$$

în concordanță cu experiența.

Cîteva observații asupra acestui procedeu sînt utile.

În rezultat nu intervine legea de distribuție a variabilelor aleatoare considerate. Legătura între valorile variabilei x la două momente diferite nu este stabilită probabilistic, ci numai prin ecuația (7), care este aceea a unui *lanț dublu*; valoarea lui x

la fiecare moment este determinată cu probabilitatea 1 de valorile sale în două momente anterioare.

Această schemă implică deci, în chip esențial, existența acceleratiei, dar tot ea conduce la viteze infinite, cum se vede din faptul că $\overline{x}$ este de ordinul $\sqrt{t}$, ceea ce constituie o contradicție esențială, dar de așteptat, avînd în vedere considerațiile de mai sus. Și totuși, trebuie să observăm că rezultatul său principal este în concordanță cu experiența, ceea ce ar arăta că nu calculul însuși este vicios, ci interpretarea lui, sensul care se atribuie mărimilor care figurează în acest calcul și operațiilor care figurează în acest calcul, cum sînt, de exemplu, egalitatea dintre $\frac{d(\overline{x^2})}{dt}$ și $\overline{\frac{d(x^2)}{dt}}$ și celelalte similare.

5. *Procedeul de integrare al lui Uhlenbeck și Ornstein.* Un progres esențial în teoria mișcării browniene a fost realizat în 1930 cu memoriul lui Uhlenbeck și Ornstein, care au conceput variațiile mărimilor $x(t)$ și $\dot{x}(t)$, caracterizînd, poziția și viteza ca funcții aleatoare în raport cu timpul, corespunzînd, fiecare dintre ele, unui lanț *Markov continuu*. Noțiunile au fost precizate și încadrate matematic ca atare abia în 1933 de către Kolmogorov.

Pentru Uhlenbeck și Ornstein, dacă notăm cu $F(u, u + \Delta u; ;t, t + \Delta t)\,\Delta u$ probabilitatea ca viteza u să aibă o creștere cuprinsă între u și $u + \Delta u$ în intervalul $(t, t + \Delta t)$ și dacă $F(u, t)\Delta u$ este probabilitatea ca viteza să aibă, la momentul t, o valoare cuprinsă între u și $u + \Delta u$, vom avea relația lui Chapman-Kolmogorov

$$F(u,t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u - \Delta u, t)\ \Phi(u - \Delta u, u, t, t + \Delta t)\ d\Delta u. \tag{9}$$

Această relație ne conduce la ecuația cu derivate parțiale echivalentă, în condițiile noastre,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2}f_2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u} - f_1\right)\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial u^2} - \frac{\partial f_1}{\partial u}\right)F, \tag{10}$$

unde

$$f_1 = \lim\frac{\overline{\Delta u}}{\Delta t}, f_2 = \lim\frac{\overline{(\Delta u)^2}}{\Delta t},$$

în ipoteza că limitele există. Deoarece nu cunoaștem încă probabilitatea de trecere Φ, care ne-ar da posibilitatea să calculăm pe f_1 și f_2 ca funcții de u și t, facem apel la ecuația lui Langevin, pe care o scriem astfel

$$m\frac{du}{dt} = -fu + X(t), \tag{11}$$

unde f este o constantă de frecare, iar $u(t)$ și $X(t)$ (forța) sînt considerate ca *funcții aleatoare*, variind în timp după un proces de tipul descris mai sus și regizat de aceeași ecuație funcțională (9).

Ținînd seama de aceste caracteristici ale mărimilor $u(t)$ și $X(t)$, se găsește

$$f_1(u, t) = \lim \frac{\overline{\Delta u}}{\Delta t} = -\alpha u,\ \alpha = \frac{f}{m}$$

și

$$f_2(u, t) = \lim \frac{(\Delta u)^2}{\Delta t} = \tau = \frac{2\alpha RT}{m},$$

și (10) ia forma unei ecuații de tip Fokker-Planck

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \alpha\frac{\partial (uF)}{\partial u}. \tag{12}$$

Această ecuație se reduce, pentru $\alpha = 0$, la ecuația difuziei găsită de Einstein, pe care o generalizează. Dealtfel, α este, în general, mic.

Rămîne să se determine acea soluție $F(u, t)$ care este o densitate de repartiție, deci este pozitivă și verifică egalitatea

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(u, t)\, du = 1.$$

Am văzut că această soluție există, este unică și că, pentru $\alpha = 0$, are forma densității de repartiție gaussiană.

Pentru a realiza deducția precedentă, este suficient să se calculeze din (11) primele două momente $M(u)$ și $M(u^2)$, ținînd seamă că pentru $t_0 = 0$ am avut $u = u_0$. Putem însă calcula toate momentele $M(u^k)$ pentru $k = 1, 2 \ldots$ și reconstitui, prin cunoașterea momentelor, funcția de repartiție a probabilităților.

Uhlenbeck și Ornstein efectuează această operație pentru viteze ca și pentru poziții, după ce integrează ecuația (11)

$$u = u_0 e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\xi} F(\xi)\, d\xi,$$

$$x = x_0 + \frac{u_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) + \int_0^t e^{-\alpha\eta} d\eta \int_0^\eta e^{\alpha\xi} F(\xi) d\xi.$$

Rezultatul principal al acestei cercetări este că funcția $x(t_0 + t) - x(t_0)$ este, pentru fiecare t, o variabilă gaussiană, cu valoare medie zero și varianța egală cu $\frac{\tau}{\beta}(e^{-\beta t} - 1 + \beta t)$, pentru t intermediar, egală cu βt pentru t mare, însă egală cu $\frac{1}{2}\tau\beta t^2$ pentru t mic, ceea ce introduce corecția necesară pentru a evita în chiar forma sa imediată contradicția (legată de inexistența accelerației) la care este supusă folosirea ecuației (11).

În această schemă, accelerația există numai în medie. Operațiile de calcul al momentelor de diferite ordine cer unele precizii asupra condițiilor pe care le satisfac mărimile considerate.

6. *Ecuațiile cu diferențe ale lui S. Bernstein.* Acest autor (1934) înlocuiește ecuația diferențială stochastică (11) prin sistemul de ecuații cu diferențe

$$\Delta\left(\frac{\Delta\xi_n}{\Delta t}\right) = -\beta\Delta\xi_n + \alpha_n, \tag{13}$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

În aceste ecuații, $\Delta\xi_n = \xi_{n+1}$, iar $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ este un șir de variabile aleatoare care urmează a fi determinate și $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ este un șir de variabile aleatoare date, independente între ele. Aceste ecuații determină, din aproape în aproape, distribuții bine definite pentru ξ_n, dacă sînt date distribuțiile variabilelor α_n.

În anumite condiții pentru acestea din urmă, distribuția lui $\frac{\Delta\xi_n}{\Delta t_n}$ tinde către distribuția lui $u(t)$; însă, cum observă S. Bernstein, numai distribuția lui $u(t)$ este aproximată prin distribuția limită de mai sus și nu însuși $u(t)$, deoarece $\Delta\xi_n$ nu sînt diferențe ale lui x, ci ale unui sistem ξ_n, a cărui semnificație concretă nu este evidentă.

7. *Procesul cu creşteri independente al lui Wiener-Doob.* În memoriul său din 1942, Doob, reluînd schema lui Uhlenbeck şi Ornstein şi ţinînd seamă de faptul că nu trebuie să prejudecăm asupra existenţei derivatei $u(t)$ scrie ecuaţia mecanică sub forma

$$du(t) = -\beta\, u(t)\, dt + dB(t). \tag{14}$$

În această ecuaţie, $B(t)$ este o funcţie aleatoare cu creşteri independente, reprezentînd un proces diferenţial care corespunde percusiunilor pe care particula le suferă de la moleculele fluidului. Aceasta înseamnă că, dacă $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, noi presupunem că

$$B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})$$

sînt variabile aleatoare independente între ele; presupunem de asemenea că procesul este omogen, adică distribuţia variabilelor $B(t_0 + t) - B(t_0)$ depinde numai de t.

Se consideră, în special, procesele diferenţiale pentru care momentul de ordinul al doilea este finit

$$\sigma^2(t) = M[(B(t_0 + t) - B(t_0))^2] < \infty.$$

Dacă ne aranjăm ca momentul de ordinul întîi să fie zero, atunci, după cum se verifică imediat

$$\sigma^2(t + s) = \sigma^2(t) + \sigma^2(s),$$

de unde $\sigma^2(t), = \sigma^2 t$, după cum am găsit în procesul Einstein-Smoluhovski.

În aceste condiţii, se poate vorbi de integrala

$$\int_b^a f(t)\, dB(t),$$

care a fost definită de Wiener pentru orice funcţie continuă $f(t)$. Ecuaţia (14) se poate înlocui, cu probabilitatea 1, prin ecuaţia

$$\int_a^b f(t)du(t) = -\beta \int_a^b f(t)u(t)dt + \int_a^b f(t)dB(t), \tag{15}$$

oricare ar fi f, pentru aproape toate funcţiile $u(t)$.

Nu intrăm aici în amănuntele acestei metode, care are o mare generalitate şi a dus la rezultate deosebit de importante şi

pentru mecanica moleculelor, dat fiind că mişcarea browniană este doar un reflex al acesteia.

Vom observa numai că, dacă această metodă reuşeşte să îndepărteze obiecţia gravă relativă la existenţa derivatei $\dot{u}(t)$ rămîn în picioare alte obiecţii.

Cea dintîi obiecţie se referă la valoarea, din punct de vedere al teoriei mecanice, a ecuaţiei (14). Dacă există acceleraţie şi dacă $B(t)$ este absolut continuă, atunci (14) este echivalentă cu (11) ecuaţie newtoniană. În ce măsură şi pentru ce sisteme ecuaţia (14) poate fi acceptată este o problemă care nu se rezolvă de la sine.

Dacă acceptăm această ecuaţie, considerăm implicit că $x(t)$ corespunde unui lanţ dublu, dar, în acelaşi timp, în modul de tratare precedent considerăm pe $x(t)$ ca funcţie aleatoare corespunzînd unui lanţ Markov simplu.

Se poate considera că sistemul $\dot{x}(t)$, $x(t)$ constituie, în mecanica clasică, un lanţ diferenţial simplu: valorile $\dot{x}(t)$, $x(t)$ date la momentul t, sînt determinate la momentul $t + dt$.

Acelaşi lucru se întîmplă într-o mişcare browniană. Funcţia aleatoare trebuie să fie, dacă ne mărginim la mişcarea cu o dimensiune, funcţia $((\dot{x}t), x(t))$ în spaţiul cu două dimensiuni al fazelor acestui sistem.

O a doua obiecţie priveşte numărul de dimensiuni. Mişcarea reală a unei particule este cu trei dimensiuni; prin urmare, dacă $P(t)$ este, la momentul t, un punct în spaţiul cu şase dimensiuni al fazei, urmează să caracterizăm mişcarea prin funcţia vectorială $P(t)$ cu componentele $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$; $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$, dacă ne referim la o altă particulă luată individual. Dacă este vorba de sistemul tuturor particulelor în suspensie, problema se pune pentru un punct $P(t)$ în spaţiul fazelor acestui sistem şi mişcarea trebuie descrisă ca un lanţ Markov continuu sau discontinuu, după convenienţă, relativ la acest punct.

Pentru valorile mari ale intervalului t, schema lui Uhlenbeck-Ornstein conduce la aceleaşi rezultate ca şi schema lui Einstein Smolukovski. Ele diferă însă, în general, pentru valori mici ale lui t.

8. *Mişcările browniene ale lui Chandrasekar.* Chandrasekar a dat în 1943 o schemă a mişcării browniene discontinue, inspirată din studiul procesului denumit *mersul la întîmplare*, cu rezultate deosebit de interesante, mai ales pentru un număr mic de paşi efectuaţi.

Reprezentăm printr-un vector $\vec{r}$ o deplasare elementară a unei particule într-un spațiu euclidian cu n dimensiuni. Poziția unei particule după N deplasări este dată de vectorul

$$\vec{R} = \sum_{j=1,2,..,N} \vec{r}_j. \tag{16}$$

Fie $\tau_i\,(x_i, y_i, z_i)\,dx_i\,dy_i\,dz_i = \tau_i d\vec{r}_i$ probabilitatea ca deplasarea de rangul i să ducă între $\vec{r}_i$ și $\vec{r}_i + d\vec{r}_i$.

Dacă notăm cu $W_N\,(\vec{R}_0)\,d\vec{R}_0$ probabilitatea ca vectorul R să se găsească în intervalul

$$\Delta\colon \vec{R}_0 - \frac{1}{2}\,d\,\vec{R}_0,\ \vec{R}_0 + \frac{1}{2}\,d\vec{R}_0,$$

vom avea

$$W_N(\vec{R}_0)\,d\vec{R}_0 = \int_\Delta \prod_{j=1,2,...,N} \tau_j\,d\vec{r}_j.$$

Dacă punem

$$A_N(\vec{\rho}) = \prod_{j=1,2,...,N} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\vec{\rho}\cdot\vec{r}_j)}\ \tau_j\,d\vec{r}_j,$$

unde $\vec{\rho}$ este un vector de componente $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, găsim

$$W_N\,(\vec{R}_0) = \frac{1}{2^n\pi^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\vec{\rho}\cdot\vec{R}_0)}\,A_N\,(\vec{\rho})\,d\vec{\rho}.$$

Deci, $A_N(\vec{\rho})$ este transformata Fourier a densității de probabilitate.

Iată cîteva modele de mișcări care se obțin pe această cale:

a) Variabila $\vec{R}$ este suma a n variabile $\vec{r}_j$ gaussiene, independente între ele,

$$r_j = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\,\pi\sigma_j^2\right)^3}}\,e^{-\frac{|3r_j|^2}{2\sigma^2}},$$

$\vec{R}$ fiind ea însăși gaussiană (aditivitatea variabilelor gaussiene).

b) Fiecare deplasare are o anumită lungime l_j, numai direcția este întîmplătoare.

Se ia

$$\sigma_j = \frac{1}{4\pi\,l_j^2}\,\delta(|\,r_j|^2 - l_j^2),\quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Rezultă, pentru $n = 3$,

$$W_N\,(R) = \frac{1}{2\pi^2|R|}\int_0^\infty \sin\,(\rho|\,R|)\,\left\{\prod_{j=1,2,...,N}\frac{\sin\,(\rho l_j)}{\rho l_j}\right\}\rho\,d\,\rho.$$

Cazul cel mai interesant este $l_j = l$ și N este un număr mic. Dacă N tinde către infinit, distribuția este normală.

c) N foarte mare și $\tau_j = \tau$. Distribuția este normală

$$W(R) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3N^3lmn}}\,e^{-\frac{(X-Nl)^2}{2Nl}-\frac{(Y-Nm)^2}{2Nm}-\frac{(Z-Nn)^2}{2Nn}}. \tag{17}$$

După această teorie, probabilitatea ca o particulă care se mișcă la întîmplare cu probabilitatea elementară locală $\tau(|\,r|^2)$, să aibă, după timpul t, o deplasare cuprinsă între R și $R + dR$, este

$$W(R, t)\,dR = \frac{1}{\sqrt{(4\pi Dt)^3}}e^{-|R^2|/4Dt}\,dR. \tag{18}$$

Ecuația lui Smoluhovski-Hostinski

$$\Phi\,(R, t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\,(R - \Delta R, t)\,W\,(\Delta R, \Delta t)\,d\Delta R$$

va da, ținînd seamă că $M((\Delta R)^2)$ este mică,

$$\Phi\,(R, t + \Delta t) - \Phi\,(R, t) = D\cdot\Delta t\cdot\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right) + 0(\Delta t),$$

deci, pentru $\Delta t \to 0$,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right), \tag{19}$$

care este ecuația difuziei, cu constanta de difuzie D. Această ecuație are ca soluție elementară densitatea de repartiție normală în trei dimensiuni și se poate trata ținînd seamă fie de condiții de regim, fie de condiții limită pentru Φ.

9. *Mecanica aleatoare a lui Kolmogorov.* Procesul aleator folosit este acela dat de o funcție aleatoare determinată de un lanț Markov continuu în spațiul fazelor, fie pentru o particulă individuală, fie pentru sistem în ansamblul său.

Vom nota cu x un punct al acestui spațiu, care poate fi euclidian sau o varietate riemaniană local compactă. Vom

presupune că probabilitatea de trecere din poziția x la momentul s, într-o poziție aparținînd domeniului A, la momentul $t > s$, este

$$P(s, x; t, A) = \int_A \rho(s, x; t, A)\, dx,$$

admițînd astfel o densitate de probabilitate. Aceasta verifică relația funcțională caracteristică lanțului Markov

$$\rho(s, x; t, y) = \int_A \rho(s, x; u, z)\, \rho(u, z; t, y)\, dz, \qquad (20)$$

cu $s \leqslant u \leqslant t$.

În condiții destul de generale, se obține ecuația

$$\frac{\partial \rho}{\partial s} = -\sum_j \alpha_j(s, x) \frac{\partial \rho}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \sum_{j,k} \beta_{jk}(s, x) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_j \cdot \partial x_k}, \qquad (21)$$

precum și ecuația adjunctă, de tipul Fokker-Planck,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\sum_j \frac{\partial(\alpha_j(t, y)\theta)}{\partial y_j} + \frac{1}{2} \sum_{jk} \frac{\partial^2(\beta_{jk}(t, y)\theta)}{\partial y_j\, \partial y_k}, \qquad (22)$$

unde $|g_{jk}|$ este discriminantul formei pătratice care reprezintă metrica din vecinătatea punctului x. Vom considera cazul mișcărilor permanente, care ne dau lanț omogen, în care funcțiile A_j, B_{jk} nu depind de t.

Dacă punem în evidență, separat, parametrii de poziție q $(q^1, q^2, \ldots, q^m)$ și derivatele lor $\dot{q}(\dot{q}^1, \dot{q}^2, \ldots, \dot{q}^n)$, ecuația Fokker-Planck devine

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\sum_{i=1,2,\ldots,m} \dot{q}^i \frac{\partial \theta}{\partial q^i} + \sum_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} [\theta K_j(q, \dot{q})] + \frac{1}{2} \sum_{jk} \frac{\partial^2}{\partial \dot{q}^j\, \partial \dot{q}^k} [\theta \beta_{jk}(q, \dot{q})], \qquad (23)$$

unde

$$M[\Delta \dot{q}^j] = K^j\, \Delta t + 0(\Delta t),$$

$$M[\Delta \dot{q}^j\, \Delta \dot{q}^k] = \beta_{jk}\, \Delta t + 0(\Delta t),$$

$$M[\Delta q^j] = \dot{q}^j\, \Delta t + 0(\Delta t),$$

$$M[\Delta q^j\, \Delta q^k] = 0(\Delta t) \quad (j, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Coeficienții ecuației (23) pot fi determinați așa cum face Iaglom, după exemplul lui Uhlenbeck-Ornstein sau al lui Langevin, folosind ecuațiile diferențiale ale mișcării

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

sau, reduse la forma normală

$$\frac{d\dot{q}^j}{dt} + \Gamma^j_{hk} \dot{q}^h\, \dot{q}^k = Q^j \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

În ipoteza spațiului euclidian, $\Gamma^j_{hk} = 0$, deci $\frac{d\dot{q}^j}{dt} = Q^j$, adică $K^i = Q^i$.

În condiții pe care nu le mai specificăm aici, dar suficient de largi, cerute în primul rînd de faptul că mișcarea este presupusă reversibilă, ecuația (23) admite o soluție de forma

$$\theta(q, \dot{q})\ e^{H(q) - \frac{1}{2}\varphi_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k},$$

care caracterizează un sistem canonic așa cum s-a prezentat ipotetic în teoria lui Einstein.

Această sistematizare se bazează pe interpretarea mecanică a unui proces Markov, fie că este vorba de mișcarea aleatoare a unei particule individuale, fie că este vorba de un sistem ergodic (final în ansamblul său).

În această privință, el este mai cuprinzător decît celelalte scheme, așa cum remarcă Fortet.

Rămîne problema determinării tensorilor K_j și B_{jk}, pentru care trebuie să facem apel la ecuațiile mișcării care presupun accelerație, și aceasta nu există.

Va trebui să folosim, evident, procedeul lui Doob de a transforma ecuațiile privind derivatele în ecuații privind diferențialele, dar numai cum face Iaglom, pentru a calcula momentele de ordinul întîi și al doilea, care ne vor da pe K_j și B_{jk}, pentru ca apoi urmărirea fenomenului să se facă pe ecuația lanțului și nu pe aceea a mecanicii.

În cadrul acestei operații de folosire dublă a uneia sau alteia dintre cele două ecuații, rămîne să examinăm ce semnificație are ceea ce numim timp, și reprezentăm prin t, în ecuația lui Fokker-Planck, pe de o parte, și în ecuația mecanicii, pe de

altă parte, dacă convenim că ceea ce înțelegem experimental prin t corespunde cu timpul mecanicii.

Pentru valori suficient de mari ale lui t, toate teoriile și experiența sînt de acord în a atribui acestui parametru din ecuația lui Fokker-Planck aceeași semnificație ca în mecanică.

Pentru valori mai mici ale lui t, în ecuația lui Fokker-Planck-Kolmogorov, acesta nu mai reprezintă timpul, ci numai o valoare proporțională cu momentul de ordinul al doilea al mișcării. Legătura cu noțiunea de timp a acestuia trebuie aprofundată, și aceasta se poate realiza direct pe ecuațiile mecanicii și prin experiență. Chestiunea trebuie încă examinată. Această problemă va interveni și în metoda pe care o prezentăm mai jos pentru studiul mișcării browniene și care face apel la teoria lanțurilor Markov propriu-zise, care sînt lanțurile asupra unui număr finit de stări, în ipoteza că sistemul este ergodic sau total.

Proces discontinuu. O schemă generală a mișcării browniene sub forma unui proces discontinuu se poate aplica pentru a reprezenta mișcarea unei particule individuale sau a sistemului în întregime. Vom examina această din urmă problemă.

Caracterizăm starea dinamică a sistemului — poziții și viteze — printr-un vector V într-un spațiu cu un număr corespunzător de dimensiuni. Presupunem că sistemul poate lua un număr finit m de stări, corespunzătoare mărimilor vectoriale

$$V_1, V_2, \ldots, V_m.$$

Trecerea sistemului de la o stare V_j la alta V_k cu o probabilitate p_{jk} ($p_{jk} \geqslant 0$, $\sum_k p_{jk} = 1$) este presupusă independentă de stările anterioare prin care a trecut sistemul. Vom presupune, în plus, că *există o probabilitate pozitivă de a trece dintr-o stare în oricare alta,* direct sau prin stări intermediare. În acest caz se știe că sistemul este *ergodic* și *reversibil.*

Fie $\overline{X}_n$ starea pe care o ia sistemul după n treceri dintr-o stare în alta, iar $n_1, n_2, \ldots, n_m$ frecvențele absolute ale celor m stări

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = n_1V_1 + n_2V_2 + \ldots + n_mV_m,$$
$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n.$$

Considerăm acum variabila aleatoare

$$X_{(n)} = n_1V_1 + n_2V_2 + \ldots + n_mV_m - n\theta,$$

unde θ este un vector al aceluiași spațiu, și deocamdată nedeterminat.

Vom numi cu $P_k(n; n_1 n_2, \ldots, n_m)$ probabilitatea ca $X_{(n)}$ să fie în starea $n_1V_1 + n_2V_2 + \ldots + n_mV_m - n\theta$, dacă starea inițială a fost V_k.

Funcția caracteristică a acestei variabile este, conform definiției sale

$$F_k(n, u, \theta) = \sum P_k(n; n_1, \ldots, n_m)\, e^{i(n_1V_1+\ldots+n_mV_m-n\theta)u},$$

unde se introduce vectorul u, de componente $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Din relația funcțională a lanțului Markov obținem sistemul

$$F_k(n, u, \theta) = \sum_j p_{kj}\, e^{i(N_j-\theta)u}\, F_j(n-1, u, \theta), \qquad (L)$$

care caracterizează mișcarea aleatoare considerată.

Sistemul (L) se poate rezolva și obținem

$$F_k(n, u, \theta) = \sum_{j=1,2,\ldots,n} \lambda_j^n\, A_{kj}(\lambda_j, u) + H_k(n), \qquad (24)$$

unde $H_k(n)$ tinde uniform către zero cînd n tinde către infinit, în ipoteza că rădăcinile ecuației $D(\lambda, u) = 0$ sînt simple.

Se știe că momentul de ordinul întîi al lui $X_{(n)}$ are componentele

$$M_{k,1} = \left(\frac{\partial F_k}{\partial u_j}\right)_{u=0}, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Derivînd din (24), obținem aceste derivate și folosind proprietățile funcțiilor $A_{kj}(\lambda_j, u)$ găsim

$$M_{k,1} = -\,\mathrm{in}\lambda_1' + \sum_{j>1} A_j\lambda_j^n + L_k(n).$$

Din ecuația $D(\lambda) = 0$ se obține prin derivare

$$\lambda_1' = \mathrm{i}\,\frac{\sum_h P_h(V_h - \theta)}{\sum_h P_h},$$

unde P_h sînt minorii elementelor diagonale în $D(\lambda, 0)$.

Dacă luăm

$$\theta = \frac{\sum_h P_h V_h}{\sum_h P_h}$$

rezultă $(\lambda_1')_{u=0} = 0$. Se verifică de asemenea că $(\lambda_2')_{u=0} = (\lambda_3')_{u=0} = \ldots = (\lambda_n')_{u=0} = 0$, deci, momentul de ordinul întîi se reduce la termenul periodic, în general diferit de zero, și la termenul asimptotic nul. Dacă $r = 1$, termenul periodic nu există. Acesta este cazul frecvent.

După ce am fixat pe θ, obținem pentru momentele de ordinul al doilea care sînt egale și de semn contrar

$$\left(\frac{\partial^2 F_k}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}\right)_{u=0} = n\left(\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}\right)_{u=0} + \sum_{j>1} B_{\alpha\beta kj}\lambda_j^n + R_k(n).$$

În ipoteza $r = 1$, $B_{\alpha\beta kj} = 0$, deci momentele sînt reprezentate, în afară de factorul n și de semn, de $\left(\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}\right)_{u=0}$.

Presupunem că nu toate aceste valori sînt nule și punem

$$h_{\alpha\beta} = -\left(\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}\right)_{u=0}.$$

Cum $\lambda_1(u)$ este funcție analitică de $u_1, u_2, \ldots, u_m$, în vecinătatea originii, vom avea [1]

$$\lambda_1 = 1 - \frac{1}{2}\sum h_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta + R_3.$$

În vecinătatea originii $|\lambda_1| < 1$, deci $\sum h_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta$ este o formă definită pozitiv.

În loc de variabila $X_{(n)}$, vom considera o variabilă redusă

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n\varphi(t)}} X_{(n)}.$$

Aceasta va urma la limită ($n \to \infty$) legea lui Gauss cu m variabile.

Mișcarea browniană se poate astfel studia în întregime. Rămîne numai să determinăm, pe căile adoptate și în teoria lui Kolmogorov, coeficienții $h_{\alpha\beta}$.

[1] Prin R_3 înțelegem că restul este de ordinul al treilea.

BIBLIOGRAFIE

A. EINSTEIN, *Théorie der brownischen Bewegung*, Annalen der Physik, t. 17, 1905, t. 19, 1906.

M. SMOLUHOVSKI, *Théorie der brownischen Bewegung*, Annalen der Physik, t. 21, 1906.

P. LANGEVIN, *Sur le mouvement brownien*, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, t. 146, Paris, 1908.

UHLENBECK, ORNSTEIN, *On the Theorie on the brownian motion*, Physical Review, vol. 36, sept. 1930.

A. KOLMOGOROV, *Zur Theorie der brownischen Bewegung*, Ann. of Math., t. 35, 1934.

W. FELLER, *Zur Theorie der stochastischen Prozessen*, Math. Ann., t. 113, 1936.

G. PÓLYA, *Sur la promenade au hasard*, Travaux du Colloque sur les probabilités de Génève, 1937, Actualités Scientifiques, Hermann, nr. 734, Paris, 1938.

S. BERNSTEIN, *Les équations differentielles stochastiques*, Actualités scientifiques, Hermann, nr. 738, Paris, 1938.

W. DOEBLIN, *Sur certains mouvements aléatoires*, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, t. 208, Paris, 1939.

P. LÉVY, *Le mouvement brownien plan*, Ann. Journal of Math., vol. LXII, 1940.

O. ONICESCU, *Théorie des chaînes à liaison complètes*, Colloque de Génève. 1937, Actualités scientifiques, nr. 738, Paris, 1938.

M. KAÇ, *On the average on certain Wiener Funktional Transactions*, Ann. of Math. Statistics, vol. 19, 1946.

J.L. DOOB, *The brownian movement and stochastic equations*, Ann. of Math., t. 43. 1942.

S. CHANDRASEKAR, *Stochastic problems in Physics and Astronomy*, Reviews of modern Physics, vol. 15, 1943.

O. UHLENBECK și I. WANG, *On the theory of the brownian motion*, Reviews of modern Physics, vol. 15, 1945.

J.L. DOOB, *The elementary gaussian Processus*, Ann. of Math. Statistics, nr. 3, 1944.

P. LÉVY, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Gauthier-Villars Paris, 1948.

H. STEINHAUS, *La theorie et les applications des fonctions indépendentes au sens stochastique. Les fonctions aléatoires*, Actualités Scientifiques, nr. 738, Hermann, 1938.

R. FORTET, *Quelques travaux récents sur le mouvement brownien*, Ann. de l'Inst. H. Poincaré, 1940.

M. KAÇ, H. STEINHAUS, *Sur les fonctions indépendantes*, Studia matematica, Varșovia.

D. REVUZ, *Markov chains*, Elsevir, New York, 1975.
K. ITO, *Lectures on stochastic processes*, Bombay, 1961.
O. LEVY, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Gauthier-Villars, Paris, ediția a II-a, 1965.
M. LOEVE, *Probability theory*, Van Nostrand, New York, 1960.
P. A. MEYER, *Probabilités et Potential*, Hermann, Paris, 1966.
PARTHASARATHY, *Probability on metric spaces*, Academic Press, New York, 1967.
R.M. BLUMENTHAL și R.K. GETOOR, *Markov Processes and Potential Theory*, Academic Press, New York, 1968.
D. FREEDMAN, *Brownian motion and diffusion*, Holden-Day, 1971.
GHIHMAN, N. SKOROHOD, *Theory of Stochastic Processes*, II, Springer, New York, 1974.

CAPITOLUL XII

CÎMPURI GEOMETRICE DE PROBABILITATE ȘI APLICAȚII LA OPTICA GEOMETRICĂ ȘI CINEMATICĂ

Teoria bernoulliană a probabilităților avea la bază probabilitatea definită ca raportul dintre numărul cazurilor favorabile și numărul cazurilor posibile. Evenimentele fundamentale erau în număr finit și cele două valori, al căror raport reprezenta probabilitatea, erau exprimate prin numere absolute.

Trecerea de la discontinuu la continuu, care se practică în științele fizice, păstrează acest caracter absolut al numerelor care conduc la probabilitate, după cum am mai arătat și în primul capitol al acestei cărți.

Cînd însă punem problema definirii probabilității direct pe o mulțime continuă, teoria probabilităților se găsește în fața unei nedeterminări, în care intuiția omului de știință a știut uneori să facă o alegere, alte ori s-a arătat, la începuturile teoriei, în neputință de a o face.

Cea dintîi problemă directă de probabilități continue este problema acului, enunțată de Buffon spre sfîrșitul secolului al XVIII-lea. Această problemă, tratată în formă geometrică de către Barbier, a căpătat o soluție cu semnificație geometrică. Consecința cea mai importantă a acestei soluții este formulată în următoarea propoziție: *probabilitatea ca o coardă a unui cerc să taie o curbă convexă închisă interioară cercului, este dată de raportul dintre lungimea curbei și lungimea cercului.* Această propoziție, prin caracterul geometric al termenilor al căror raport dau probabilitatea, a dat valoarea conceptului de probabilitate geometrică și a impus străduința de a-l asimila, pe de-o parte, unei teorii a probabilităților destul de generală

pentru a-l cuprinde, și pe de altă parte, de a-l lega de geometrie pentru a-i da precizia pe care alte încercări de a defini o probabilitate geometrică nu le puteau realiza.

Astăzi, după ce aceste diferite greutăți ale începuturilor au fost depășite, probabilitățile geometrice constituie o ramură aparte, considerată mai mult a geometriei decît a teoriei probabilităților.

Locul pe care îl ocupă în această carte este datorit preciziei principiilor care conduc la definirea probabilității ca un invariant grupal geometric și care îi conferă calitatea de model pentru alte domenii de aplicații.

§ 1. Probabilități continue

1. *Generalități și definiții.* Considerăm un interval (A, B) finit sau infinit pe axa reală, coordonata cartezianăă x și o funcție $\rho(x)$ pozitivă pentru $x \in (A, B)$ și pentru care

$$\int_A^B \rho(x)\, dx = 1.$$

Pentru fiecare mulțime măsurabilă ω din (A, B), integrala

$$P(\omega) = \int_\omega \rho(x)\, dx \tag{1}$$

este o funcție pozitivă total aditivă de ω, egală cu 1, dacă $\omega = (A, B)$. Cîmpul de probabilitate astfel constituit pe (A, B) se numește, în general, *continuu*.

Dacă $\rho_1(x) = \frac{1}{B-A}$, probabilitatea continuă astfel definită reprezintă — dacă ω este un interval (a, b) cuprins în (A, B) — raportul lungimilor acestor intervale $P_1(a, b) = \frac{b-a}{B-A}$.

Dacă $\rho_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ pentru întreaga axă reală, probabilitatea este gaussiană

$$P_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\omega e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Pentru intervalul $(0, \infty)$ și $\rho_3(x) = \frac{1}{k^2} e^{-k^2 x}$, avem o lege de probabilitate cu aplicații în teoria emisiei particulelor α.

În acest caz, probabilitatea mulțimii măsurabile ω este

$$P_3(\omega) = \frac{1}{k^2} \int_\omega e^{-k^2 x}\, dx, \quad \omega \in (0, \infty).$$

Fiecare dintre aceste tipuri de probabilități continue are semnificația ei.

Dacă $\rho(x) = \rho_1(x)$, probabilitatea ca un punct să se găsească în segmentul (a, b) este mărimea geometrică reprezentată de lungimea relativă a segmentului.

Dacă $\rho(x) = \rho_2(x)$, $P_2(a, b)$ poate reprezenta probabilitatea ca, într-o măsurătoare, eroarea $1 - M[l]$ să aibă extremitatea în segmentul (a, b).

Dacă $\rho(x) = \rho_3(x)$, $P_3((a, b))$ poate reprezenta probabilitatea ca viața unei particule α să fie cuprinsă în intervalul de timp (a, b).

Dintre aceste diferite cîmpuri continue, numai primul are o interpretare geometrică directă și reprezintă mărimea euclidiană relativă a oricărei mulțimi măsurabile din (A, B).

Dacă punem problema sub următoarea formă: care este cîmpul de probabilitate continuu care are, pentru mulțimile măsurabile ω, o semnificație geometrică euclidiană, adică este un invariant pentru transformările care păstrează lungimea oricărui segment, găsim chiar $\rho = \rho_1$, deoarece lungimea sau, mai general, măsura euclidiană înmulțită cu o constantă este singurul invariant aditiv pentru transformări.

2. *Transformarea de variabilă.* Două observații sînt de făcut.

Observăm mai întîi că oricare ar fi densitatea de probabilitate $\rho(x)$, continuă și pozitivă, dacă facem transformarea de variabilă biunivocă și bicontinuă

$$y = \int_A^x \rho(\xi)\, d\xi, \tag{2}$$

vom avea

$$P(\omega) = \int_\omega \rho(x)\, dx = \int_{\omega_y} dy, \tag{3}$$

unde ω este o mulțime măsurabilă, geometric determinată pe axa Ox, avînd $\omega = \omega_y$ în baza transformării. Integrala $\int_\omega \rho(x)\, dx$

este singura expresie euclidiană a probabilității și numai pe această expresie putem judeca direct dacă această probabilitate are sau nu un caracter geometric.

Observăm, în al doilea rînd, că dacă în (1) facem o schimbare de variabilă $x = f(z)$, *funcția* z *avînd derivată pozitivă în tot intervalul* (A, B),

$$P(\omega) = \int_{\omega_x} \rho(x) f'(x)\, dx = \int_{\omega_z} \overline{\rho}(z) dz,$$

obținem o expresie a probabilității în variabila z, care nu mai este carteziană, cu densitatea $\rho(z) = \rho(f(z))f'(z)$, de asemenea pozitivă.

Dacă $\rho(x) = \frac{1}{B-A}$, noua expresie a probabilității geometrice, cu variabila z, este $\int_{\omega_z} f'(z)\, dz$.

3. Pentru cazul spațiului euclidian cu n dimensiuni, vom considera un domeniu finit simplu conex D și o funcție $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ continuă și pozitivă de coordonatele carteziene $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale unui punct M din D.

O integrală

$$I(f, D) = \int_D f(P)\, dP = \int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \qquad (4)$$

este definită, după cum se știe, în modul următor:

Se consideră o diviziune a spațiului în intervale

$$l_j \delta_j \leqslant x_j \leqslant (l_j + 1)\, \delta_j, \ (j = 1, 2 \ldots, n; \quad l_j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \qquad (5)$$

în care $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_j$ sînt numere pozitive date, și reprezentăm lungimea laturilor intervalului. Se consideră intervalele interioare domeniului D și se numerotează $D_{\delta,1}, D_{\delta,2}, \ldots, D_{\delta,N_\delta}$. Fie, în același timp, $V_{\delta,\tau}$, volumul corespunzător celului $D_{\delta,\tau}$, și diviziunii $\delta(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$. Dacă

$$\|\delta\| = \sup\ (\delta_j),$$

prin definiție,

$$I(f, D) = \lim_{\tau=1,2,\ldots,N_\delta} \sum f(P_\tau) V_{\delta,\tau} \qquad (6)$$

cînd $\|\delta\| \to 0$.

Egalitatea precedentă se mai poate scrie, ținînd seama că $V_{\delta,\tau} = \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n$:

$$I(f, D) = \lim \sum_{\tau=1,2,\ldots,N_\delta} f(P_\tau)\, \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n$$

sau, și mai general,

$$I(f, D) = \lim_{\tau=1,2,\ldots,N_\delta} f(P_\tau) \delta_{1,2}\, \delta_{2,2}, \ldots, \delta_{n,2}, \qquad (7)$$

cînd

$$\|\delta\| = \sup\ (\delta_{j,\tau}) \to 0.$$

Expresia (4) a integralei justifică notația din (5).

Aceeași integrală $I(f, D)$ se poate obține cu ajutorul oricărei diviziuni celulare a spațiului. Vom considera numai celule paralelipipedoidale. Volumul unei atare celule este

$$V_{\delta,\tau} = \begin{vmatrix} \delta_{11,\tau} & \delta_{12,\tau} & \ldots & \delta_{1n,\tau} \\ \delta_{21,\tau} & \delta_{22,\tau} & \ldots & \delta_{2n,\tau} \\ \vdots & & & \\ \delta_{n1,\tau} & \delta_{n2,\tau} & \ldots & \delta_{nn,\tau} \end{vmatrix},$$

unde $\delta_{ij,\tau}$, este variația pozitivă pe care o suferă x_i în direcția laturii j a celulei, aceasta pentru celula numerotată τ.

Avem, deci,

$$\delta_{ij,\tau} = [\delta_i(x_j)],$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ fiind coordonatele vîrfului cu cele mai mici coordonate ale celulei $D\delta,\tau$.

Prin urmare, (7) este numai o formă particulară a formulei

$$I(f, D) = \lim_{\|\delta\| \to 0} \sum_{\tau} f(D_\tau) \begin{vmatrix} \delta_{11,\tau} & \delta_{12,\tau} & \ldots & \delta_{1n,\tau} \\ \delta_{21,\tau} & \delta_{22,\tau} & \ldots & \delta_{2n\tau} \\ \delta_{n1,\tau} & \delta_{n2,\tau} & \ldots & \delta_{nn,\tau} \end{vmatrix} \qquad (8)$$

sau

$$I(f, D) = \lim_{\|\delta\| \to 0} \sum_{\tau} f(x_1^\tau, x_2^\tau, \ldots, x_n^\tau) \begin{vmatrix} \delta_1 x_1^\tau & \delta_1 x_2^\tau & \ldots & \delta_1 x_n^\tau \\ \delta_2 x_1^\tau & \delta_2 x_2^\tau & \ldots & \delta_2 x_n^\tau \\ \delta_n x_1^\tau & \delta_n x_2^\tau & \ldots & \delta_n x_n^\tau \end{vmatrix}. \qquad (9)$$

Efectuăm o schimbare de variabile

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

care face să corespundă domeniului simplu conex D, domeniul simplu conex E avînd derivate continue şi pentru care

$$H(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} > 0 \tag{11}$$

în E şi pe frontiera sa.

Din (10) rezultă

$$\delta_i x_i = \sum \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\right)_j \delta_j y_k,$$

unde $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\right)_j$ este derivata parţială $\frac{\partial \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial y_k}$, în care am înlocuit pe $y_1, y_2, \ldots, y_n$ respectiv cu $y_1 + \theta_1 \delta_j y_1, y_2 + \theta_2 \delta_j y_2, \ldots$ $\ldots, y_n + \theta_n \delta_j y_n$, $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1, \ldots, 0 < \theta_n < 1$.

Dar atunci

$$\begin{vmatrix} \delta_1 x_1 & \delta_1 x_2 & \ldots & \delta_1 x_n \\ \delta_2 x_1 & \delta_2 x_2 & \ldots & \delta_2 x_n \\ \delta_n x_1 & \delta_n x_2 & \ldots & \delta_n x_n \end{vmatrix} = H^*(y_1, y_2, \ldots, y_n) \begin{vmatrix} \delta_1 y_1 & \delta_1 y_2 & \ldots & \delta_1 y_n \\ \delta_2 y_1 & \delta_2 y_2 & \ldots & \delta_2 y_n \\ \delta_n y_1 & \delta_n y_2 & \ldots & \delta_n y_n \end{vmatrix},$$

unde

$$H^*(y_1, y_2 \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}\right)_1 & \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2}\right)_1 \cdots \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n}\right)_1 \\ \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1}\right)_2 & \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2}\right)_2 \cdots \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_n}\right)_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1}\right)_n \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial y_2}\right)_n \cdots \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n}\right)_n \end{vmatrix}$$

Derivatele $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\right)_j$ fiind continue prin ipoteză, cînd $\|\delta\| \to 0$, vom avea:

$$H^*(y_1, y_2, \ldots, y_n) \to H(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

uniform în domeniul finit E.

Fie acum $\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcţie continuă şi pozitivă în D, pentru care

$$\int_D \rho(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1, dx_2 \ldots dx_n = 1:$$

ω fiind o mulţime măsurabilă din D, vom pune

$$P(\omega) = \int_\omega \rho(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

determinînd astfel un cîmp de probabilitate continuu pe D.

Dintre aceste probabilităţi, una singură are o semnificaţie geometrică euclidiană pentru spaţiul R^n şi mulţimile de puncte ale domeniului D, şi anume aceea care corespunde densităţii $\rho = \frac{1}{v(D)}$ ($v(D)$ este volumul domeniului), pentru că aceasta este singura densitate invariantă pentru transformările euclidiene ale spaţiului, în special pentru translaţii.

Şi în cazul general putem efectua o transformare biunivocă şi continuă în D,

$$x_j = f_j(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

pentru care determinantul funcţional

$$\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

este pozitiv şi continuu. Vom avea, prin efectul acestei transformări,

$$P(\omega) = \int_{\omega_x} \rho\, dx_1, dx_2 \ldots dx_n = \int_{\omega_y} \rho \Delta dy_1\, dy_2 \ldots dy_n,$$

iar dacă luăm în considerare, dintre aceste probabilităţi continue, numai probabilitatea geometrică $\rho = \frac{1}{v(D)}$, găsim

$$P(\omega) = \frac{1}{v(D)} \int_{\omega_x} dy_1\, dx_2 \ldots dx_n = \frac{1}{v(D)} \int_{\omega_y} \Delta dy_1\, dy_2 \ldots dy_n.$$

4. Afirmaţia făcută mai sus, că singura densitate de probabilitate în *coordonate carteziene*, care are semnificaţia geometrică este $\rho = \frac{1}{v(D)}$, trebuie înţeleasă numai în sensul precis următor: această densitate este singura care are semnificaţie geometrică — poate fi exprimată prin proprietăţi ale configuraţiilor de puncte ale spaţiului euclidian R^n, singura, deci, care rămîne invariantă pentru transformările euclidiene ale acestui spaţiu.

Demonstrația rezultă din faptul că această densitate este singura care rămîne invariantă pentru orice translație și orice rotație a spațiului în el însuși.

Se verifică, dealtfel, următoarea proprietate mai generală:

$$P(\omega) = \frac{\int_\omega dx^1 dx^2 \dots dx^n}{\int_D dx^1 dx^2 \dots dx^n}$$

este invariant pentru orice afinitate proprie: $x^j = a^j_k y^k$ $(j, k = 1, \dots, n)$.

O integrală $\int_\omega \rho(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^1 dx^2 \dots dx^n$ în coordonate carteziene, unde ρ nu este o constantă, poate avea însă o semnificație geometrică pentru obiectele geometrice ale unui alt spațiu decît acela în care se calculează această integrală. Teoria probabilităților geometrice își propune să determine astfel de integrale pentru a exprima măsura relativă a diferite mulțimi de obiecte geometrice, cum sînt dreptele planului sau ale spațiului, planele, arcele, sferele, etc., sau, ceea ce constituie o categorie specială de probleme, pentru sisteme de două, trei sau mai multe puncte de pe un segment sau dintr-o figură geometrică dată.

§ 2. Măsura invariantă pentru mulțimea de drepte ale planului

Fie D o dreaptă generică a planului euclidian pe care luăm ca reper un punct O și o axă O_j. Poziția dreptei D este fixată prin distanța p de la O la D, măsurată pe perpendiculara dusă din O la D, și prin unghiul θ al acestei perpendiculare cu axa O_j; p ia orice valoare pozitivă, iar unghiul θ orice valoare între 0 și 2π.

Schimbarea reperului O_j în O'_j, induce următoarea transformare (euclidiană) a coordonatelor dreptei:

$$\left.\begin{aligned} p' &= p + r\cos(\theta - \alpha) \\ \theta' &= \theta - \alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Determinantul funcțional al acestei transformări este 1. Pentru ca $\int_\omega \rho(p, \theta) dp d\theta$ să fie invariant, este necesar ca $\rho(p, \theta)$ să fie invariant pentru transformarea (1), ceea ce atrage după sine $\rho = \text{const}$. *Rezultă că*

$$I_\omega = \int_\omega dp d\theta \qquad (2)$$

este o măsură (euclidiană, invariantă) a mulțimii dreptelor din plan care îndeplinesc condiția ca punctul reprezentativ al dreptei de coordonate (carteziene) p, θ să se găsească în domeniul ω.

Se demonstrează imediat că I_ω este singura măsură (euclidiană) invariantă. Într-adevăr, fie α, β un alt sistem de doi parametri care corespund biunivoc dreptelor planului. Rezultă că între (α, β) și (p, θ) există o corespondență biunivocă

$$\alpha = f(p, \theta), \qquad \beta = g(p, \theta), \qquad (3)$$

care, presupunem, are un determinant funcțional determinat și, evident, diferit de zero.

$\int_\omega \rho(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$ este o măsură euclidian invariantă. Efectuînd transformarea (3), obținem

$$\int_\omega \rho(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \int_\omega \rho(\alpha, \beta) \frac{D(\alpha,\beta)}{D(p, \theta)} dp d\theta.$$

Am arătat mai sus că, în acest caz,

$$\rho(\alpha, \beta) = C \frac{D(p,\theta)}{D(\alpha, \beta)},$$

ceea ce confirmă propoziția enunțată.

P r o p o z i ț i a 1. *Măsura euclidiană a mulțimii de drepte neorientate care întîlnesc un segment OA de lungime l este $2l$.*

Această măsură este dată de

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{l\cos\theta} dp = 2l.$$

P r o p o z i ț i a 2. *Măsura euclidiană a mulțimii de drepte care întîlnesc un poligon convex cu perimetrul L este L.*

În adevăr, dacă facem suma măsurilor mulțimilor de drepte care întîlnesc una dintre laturile unui poligon convex, cum fie-

care dreaptă întîlnește două laturi ale poligonului, această sumă este $2L$, deci măsura mulțimii dreptelor luate o singură dată este L.

Propoziția 3. *Măsura euclidiană a mulțimii de drepte care întîlnesc o curbă convexă închisă este perimetrul curbei.*

Această propoziție este o consecință imediată a precedentei. Transpunerea ei numerică este

$$L = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\varphi(\theta)} \mathrm{d}p = \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\mathrm{d}\theta, \tag{4}$$

unde $\varphi(\theta)$ este distanța de la originea O, situată în interiorul curbei convexe, la tangenta la curbă, care are direcția θ.

Propoziția 4. *Probabilitatea ca o coardă a unui cerc de rază R să întîlnească o curbă convexă de lungime L, interioară cercului, este*

$$P = \frac{L}{2\pi R}. \tag{5}$$

Aceasta este expresia probabilității după definiția ei,

$$P = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \int_0^{\varphi(\theta)} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}p = \frac{L}{2\pi R}.$$

Propoziția 5. *Probabilitatea ca o coardă a unui cerc de rază R să întîlnească un segment de dreaptă de lungime l, interior cercului, este*

$$P = \frac{2l}{2\pi R}. \tag{6}$$

Segmentul de dreaptă poate fi considerat ca un poligon convex cu perimetrul $2l$.

Propoziția 6 (teorema acului). *Probabilitatea ca un arc de lungime l să întîlnească una din dreptele unei serii de drepte paralele echidistante, la distanța $2R(>l)$ este dată de* (6).

Expresia probabilității geometrice din această propoziție este dată de propoziția (5), de unde și rezultatul.

Dăm încă următoarele propoziții simple:

Propoziția 7. *Măsura mulțimii de drepte neorientate care intersectează o curbă închisă Γ din plan este limita inferioară a perimetrelor curbelor convexe care o cuprind în interior.*

Demonstrația rezultă din următoarele constatări:

Măsura căutată este mai mică (cel mult egală) decît măsura corespunzătoare la fiecare curbă convexă C, care cuprinde în interior pe Γ.

Perimetrele curbelor convexe C au un minim unic. Dacă D este o curbă convexă interioară tuturor curbelor C, mulțimea dreptelor care o intersectează este mai săracă decît mulțimea dreptelor care intersectează pe Γ.

Propoziția 8. *Măsura mulțimii de coarde ale unui arc convex AMB de lungime L este $L - AB$ (AB este lungimea coardei care unește extremitățile).*

Drepte din plan care întîlnesc două ovale. Considerăm două curbe convexe închise Γ_1 și Γ_2, fără puncte comune. Există două tangente interioare comune care se întîlnesc într-un punct O și două tangente exterioare comune.

Fie C_i cea mai redusă curbă convexă care înfășoară curba Γ_1 și punctul O ($i = 1, 2$). $C_1 + C_2$ este măsura mulțimii de drepte care întîlnesc fie curba C_1 fie curba C_2, dreptele care întîlnesc ambele curbe C_1 și C_2 în același timp, deci ambele curbe Γ_1 și Γ_2 în același timp, și a căror măsură o notăm cu Γ_{12}, fiind socotite de două ori. Rezultă că $C_1 + C_2 - \Gamma_{12}$ este măsura mulțimii dreptelor care întîlnesc curbele C_1, C_2. Dar această valoare este dată de lungimea înfășurătoarei exterioare C a celor două curbe. Prin urmare,

$$C_1 + C_2 - \Gamma_{12} = C,$$

de unde

$$\Gamma_{12} = C_1 + C_2 - C$$

reprezintă măsura mulțimii de drepte care întîlnesc cele două curbe Γ_1 și Γ_2 în același timp.

§ 3. Sisteme de puncte

1. *O formulă a lui Crofton.* Se consideră un sistem de n puncte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ cuprinse într-un domeniu mărginit și închis D al spațiului euclidian E_m.

Vom considera spațiul euclidian $E_m \times E_m \times \ldots \times E_m = E_{nm}$ și punctul P situat în acest spațiu, reprezentativ al sistemului

$P_1, P_2, \ldots, P_n$. Vom numi $D_{(n)}$ domeniul din E_{nm} produs cartezian al domeniului D cu el însuși de n ori:

$$P \in D_{(n)}.$$

Măsura domeniului $D_{(n)}$ este V^n, dacă măsura domeniului D este V.

O condiție C impusă sistemului de puncte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ este realizată de unele configurații ale sistemului și nu este realizată de celelalte. Fie $\Gamma_{(n)}$ mulțimea punctelor P din $D_{(n)}$ care corespund configurațiilor C. Presupunem că $\Gamma_{(n)}$ este măsurabilă și măsura ei este Γ. Probabilitatea ca o configurație $P_1, P_2, \ldots, P_n$ să verifice condiția C este prin definiție

$$P_C = \frac{\Gamma}{V^n}. \tag{1}$$

Această mărime are caracter geometric euclidian, pentru că fiecare dintre cele două măsuri Γ și V au acest caracter.

Fie acum un alt domeniu D' mărginit și închis, cuprinzînd pe D:

$$D' \supset D.$$

Notăm cu Γ'_n mulțimea punctelor din D'_n care corespund configurațiilor C din D'. Probabilitatea corespunzătoare este

$$P'_C = \frac{\Gamma'}{V'^n}. \tag{2}$$

Dacă notăm cu $\Gamma'_{n,k}$ mulțimea punctelor din D'_n care corespund unei configurații $P_1, P_2, \ldots, P_n$, din care k puncte se găsesc în $D' - D$ iar restul în D, aceste mulțimi sînt disjuncte. Notînd cu Γ'_k măsura mulțimii $\Gamma'_{n,k}$, vom avea

$$\Gamma'_n = \sum_{k=0,1,2,\ldots,n} \Gamma'_k. \tag{3}$$

Pe de altă parte, dacă P_k este probabilitatea unei configurații C cu k puncte în $D' - D$, avem

$$\Gamma'_k = C_n^k P_k V^{n-k}(V' - V)^k. \tag{4}$$

Deci, ținînd seama de (2) și (4), egalitatea (3) ne dă, observînd că $P_0 = P_C$,

$$P'_C V'^n = P_C V^n + nP_1 V^{n-1}(V' - V) + \ldots$$
$$\ldots + C_n^k P_k V^{n-k}(V' - V)^k + \ldots + P_n (V' - V)^n$$

sau

$$(P_C + \delta P_C)(V + \delta V)^n = P_C V^n + nP_1 V^{n-1}\delta V + \ldots$$
$$\ldots + C_n^k P_k V^{n-k}(\delta V)^k + \ldots + P_n(\delta V)^n. \tag{5}$$

De unde, după ce dividem cu δV,

$$V^n \frac{\delta P_C}{\delta V} = n(P_1 - P_C)V^{n-1} + \frac{0(\delta V)}{\delta V}.$$

Această relație a lui Crofton se mai poate scrie

$$\frac{\delta P_C}{\delta V} = n\,\frac{P_1 - P_C}{V} + \frac{0(\delta V)}{\delta V} \tag{6}$$

și se utilizează, cum este natural, cînd δV tinde către zero, astfel că P_1 reprezintă probabilitatea de realizare a condiției C cînd unul dintre punctele configurației se găsește pe frontiera domeniului D.

Această formulă reduce problema la aceea a determinării directe a probabilității P_1, după care urmează integrarea unei ecuații diferențiale pentru a găsi probabilitatea P_C.

2. *Sistemul complet de ecuații.* Revenim acum la relația (5) în care punem:

$$\delta P_C = \frac{dP_C}{dV}\delta V + \frac{1}{2}\frac{d^2P}{dV^2}(\delta V)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3P_C}{dV^3}(\delta V)^3 + \ldots \tag{7}$$

Obținem

$$P_C V^n + \left(\frac{dP_C}{dV}V^n + C_n^1 P_C V^{n-1}\right)\delta V + \left(\frac{1}{2}V^n\frac{d^2P_C}{dV^2} + C_n^1 V^{n-1}\frac{dP_C}{dV} + C_n^2 V^{n-2}P_C\right)(\delta V)^2 + \left(\frac{1}{3!}V^n\frac{d^3P_C}{dV^3} + \frac{1}{2}C_n^1\frac{d^2P_C}{dV^2}V^{n-1} + C_n^2 V^{n-2}\frac{dP_C}{dV} + C_n^3 V^{n-3}P_C\right)(\delta V)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{n!}V^n\frac{d^nP_C}{dV^n} + \frac{1}{(n-1)!}C_n^1 V^{n-1}\frac{d^{n-1}P_C}{dV^{n-1}} + \ldots + C_n^n P_C\right)(\delta V)^n + \ldots =$$
$$= P_C V^n + C_n^1 P_1 V^{n-1}\delta V + C_n^2 P_2 V^{n-2}(\delta V)^2 + \ldots + P_n(\delta V)^n.$$

De unde, şirul de ecuaţii diferenţiale

$$\left.\begin{aligned} & V\frac{dP_C}{dV}+nP_C=nP_1,\\ & \frac{1}{2}V^2\frac{d^2P_C}{dV^2}+nV\frac{dP_C}{dV}+\frac{n(n-1)}{2}P_C=\frac{n(n-1)}{2}P_2,\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ & \frac{1}{n!}V^n\frac{d^nP_C}{dV^n}+\frac{1}{(n-1)!}V^{n-1}\frac{d^{n-1}P_C}{dV^{n-1}}+\ldots+P_C=P^n, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

dintre care ecuaţia lui Crofton este cea mai simplă din punct de vedere diferenţial. Ultima este însă cea mai satisfăcătoare pentru problema însăşi, deoarece determinarea lui P_n este, în genere, simplă.

Valoarea lui P_n şi, în general, a probabilităţilor $P_1, P_2, \ldots P_n$, depinde de familia D_V de domenii care variază cu volumul, astfel că, dacă $V' > V$, şi $D_{V'} \supset D_V$.

Vom presupune că, fiind dat un punct M pe frontiera lui D şi un ε pozitiv arbitrar, există un $D_{V\varepsilon}$ cu proprietatea următoare:

$$V_\varepsilon > V$$

$$D_V \subset D_{V_\varepsilon} \subset D_V \cup C_{M,\varepsilon},$$

$C_{M,\varepsilon}$ fiind hipersfera cu centrul în M şi cu raza ε.

În afară de aceasta, D_V variază astfel ca toate derivatele considerate mai sus, pînă la ordinul n, să existe.

Prin acest procedeu, regiunea de frontieră interesantă pentru problemă se reduce la punctul M.

3. *Exemple.*

1. Să se determine probabilitatea ca două puncte din segmentul OA, de lungime a, să aibă o distanţă b mai mică decît a ($b < a$). Sînt două ecuaţii

$$a\frac{dP_C}{da}+2(P_C-P_1)=0,$$

$$\frac{1}{2}a^2\frac{d^2P_C}{da^2}+2a\frac{dP_C}{da}+P_C-P_2=0;$$

P_2, probabilitatea ca distanţa celor două puncte situate amîndouă în A să fie mai mică decît b, este deci egală cu zero. În cazul de faţă, P_1 este şi el cunoscut, şi anume $P_1=\frac{b}{a}$. Putem deci integra imediat prima ecuaţie, care se mai poate scrie

$$\frac{d}{da}(a^2P_C)=2b,$$

de unde

$$a^2P_C=2ab+k.$$

Pentru $a=b$, avem $P_C=1$, deci $k=-b^2$. De unde

$$P_C=\frac{2b}{a}-\frac{b^2}{a^2},$$

care este o valoare pozitivă şi mai mică decît 1. A doua ecuaţie este de asemenea verificată pentru $P_2=0$ şi P_C dat mai sus.

II. Probabilitatea ca două puncte situate în interiorul unei curbe convexe să fie la o distanţă mai mică decît λ.

Fie A o curbă convexă închisă şi D domeniul închis pentru care A este frontieră. Fie

$$x=f(s),\quad y=g(s)$$

reprezentarea parametrică a curbei şi

$$x=\alpha f(s),\quad y=\alpha g(s)$$

familia de curbe convexe A_α. Avem, evident, $A_\alpha=A$ pentru $\alpha=1$. Presupunem că $f(s)$ şi $g(s)$ au derivate de ordinul întîi. Vom avea, evident,

$$V_\alpha=\alpha^2\int[f(s)g'(s)-g(s)f'(s)]\,ds=\alpha^2V,$$

unde V este suprafaţa domeniului D. Deci,

$$\frac{dV_\alpha}{d\alpha}=2\alpha V.$$

Prima dintre ecuaţiile (8) devine

$$\frac{dP}{d\alpha}=4\alpha(P-P_1).$$

A doua ecuaţie, ţinînd seama că $P_2=0$, devine

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2}+8\alpha\frac{dP}{d\alpha}+8\alpha^2=0.$$

Integrala generală a acestei ecuaţii este

$$P=C_1e^{-(2+\sqrt{2})\alpha^2}\int_0^\infty e^{-u\alpha}\,u^{\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}\,e^{-\frac{u^2}{8\sqrt{2}}}\,du+C_2\int_0^\alpha Q^{-2}(u)e^{2\sqrt{2}u^2}\,du,$$

unde Q este integrala din primul termen.

Cu aceasta, înlocuind în ecuaţia precedentă, vom avea expresia probabilităţii P_1 în funcţie de constantele C_1, C_2, ca şi a probabilităţii P. Valorile lui P şi P_1, pentru o alegere convenabilă a parametrului α, vor determina pe C_1 şi C_2. Determinarea depinde evident de curba A.

4. *Variabile aleatoare și valori medii.* Lungimea coardei interceptată de o curbă convexă închisă Γ pe o dreaptă D este o funcție $x = f(D) = f(p, \theta)$, determinată pentru orice dreaptă D.

Momentele acestei variabile aleatoare sînt

$$M_k = M[x^k] = \frac{1}{L}\int_{\Gamma(D)} f^k(p, \theta)\, \mathrm{d}p\mathrm{d}\theta \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

înțelegînd prin $\Gamma(D)$ domeniul acoperit de punctele de coordonate carteziene (p, θ), care corespund secantelor curbei Γ, iar prin L lungimea curbei.

Pentru cîmpurile geometrice determinate de perechi de puncte, o variabilă aleatoare este însăși distanța euclidiană între cele două puncte.

Un proces diferențial analog cu acela folosit de Crofton pentru determinarea probabilității unei configurații C, constituită din n puncte ale unui domeniu D, dă procedee de calcul pentru valorile medii.

Fie $x = f(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ o variabilă aleatoare simetrică, asociată sistemului celor n puncte $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Cu măsura euclidiană, valoarea medie a acestei variabile este

$$m = M[y] = \frac{1}{V^n}\int_{D_{(n)}} f(P_1, P_2, \ldots, P_n)\, \mathrm{d}P_1\mathrm{d}P_2 \ldots \mathrm{d}P_n = \frac{W}{V^n}. \tag{9}$$

Pentru domeniul D' vom avea, în mod analog,

$$m' = \frac{W'}{V'^n} \tag{10}$$

sau

$$(m + \delta m)\,(V + \delta V)^n = W + W_1 + \ldots + W_n, \tag{11}$$

unde $\frac{1}{V'^n} W_k$ este valoarea medie a variabilei x pentru configurațiile formate din k puncte situate în $D' - D$ și $n - k$ puncte în D.

Presupunem că deformarea domeniului D depinde de un singur parametru și vom obține din (11), ca și pentru probabilitate, relația diferențială

$$\delta m = n(m_1 - m)\,\frac{\delta V}{V}, \tag{12}$$

unde m_1 este valoarea medie a variabilei x pentru mulțimea configurațiilor obținute, păstrînd unuia dintre puncte poziția de pe frontiera lui D, care corespunde limitei diferenței $D' - D$.

Pentru exemplul I, dacă luăm $x = |x_2 - x_1|^k$.

$$m_1 = \frac{1}{a}\int_0^a l^k \mathrm{d}l = \frac{a^k}{k+1}$$

de unde ecuația (12), care devine

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}a} = 2(m_1 - m)\,\frac{1}{a},$$

și ne dă

$$m = \frac{2a^k}{(k+1)\,(k+2)}.$$

§ 4. Aplicații

1. *O teoremă de optică geometrică.* Teorema pe care o dăm aici, deși este un caz particular al unei teoreme generale de mecanică, se prezintă deosebit de simplu și sugestiv în lumina metodelor întrebuințate în acest capitol. Ea poate fi formulată astfel:

Distribuția razelor plane care se refractă de-a lungul unui arc de curbă Γ — despărțitoare a două medii plane — este invariantă prin refracție.

Demonstrația foarte simplă este datorită lui W. Blaschke. Fie Γ un arc de curbă simplă posedînd tangenta continuă, P un punct oarecare de pe acest arc, funcție de lungimea de arc s, τ unghiul tangentei în P în direcția arcului crescător, cu o direcție de reper, D o dreaptă (raza luminoasă) care trece prin P, iar φ direcția normală la D dusă din reperul O. Vom avea:

$$\mathrm{d}p\mathrm{d}\varphi = \cos(\tau - \varphi)\, \mathrm{d}s\mathrm{d}\varphi.$$

Notînd cu θ unghiul dintre raza D și normala la curbă, găsim

$$\theta = \pi - (\tau - \varphi).$$

Prin urmare,

$$dp\, d\varphi = -\cos\theta ds d\varphi.$$

După refracție, raza D se transformă în D'. Notînd cu θ' unghiul razei D' cu normala, avem relația

$$\frac{\sin\theta'}{\sin\theta} = i,$$

unde indicele de refracție i este o constantă. Din această relație rezultă

$$\cos\theta' d\theta' = i\cos\theta d\theta.$$

Pe de altă parte, $d\varphi = d\theta$ pentru O fix, deci

$$dp' d\varphi' = \cos\theta' ds d\varphi' = i\cos\theta ds d\varphi = i dp d\varphi.$$

Teorema este astfel demonstrată.

2. *Probabilitate cinematică.* După Poincaré, acest nume se dă probabilității ca un reper euclidian mobil, constituit — în cazul planului — dintr-un punct și o direcție, să împlinească anume condiții, formulate în termeni de geometrie euclidiană.

Pentru aceasta, trebuie să alegem, odată cu parametrii care fixează poziția reperului și care sînt x, y, cele două coordonate carteziene ale punctului față de un reper fix și φ, unghiul direcției mobile cu direcția fixă, densitatea de repartiție invariantă pentru mișcările euclidiene ale planului.

Se verifică imediat că această densitate este o constantă, pentru orice mișcare euclidiană, deoarece determinantul

$$\frac{D(X', Y', \theta')}{D(X, Y, \theta)} = 1$$

pentru orice mișcare euclidiană.

3. *Măsura mulțimii curbelor congruente cu o curbă dată.* L.A.Santaló a pus problema determinării măsurii μ a mulțimii segmentelor de lungime a care intersectează o curbă Γ, închisă, convexă, de lungime L și care mărginește aria S. Măsura acestei mulțimi este tocmai măsura cinematică.

În cazul de față pentru segmente orientate s-a obținut

$$\mu = 2\pi S + 2aL. \qquad (1)$$

Din (1) putem da următoarea interpretare cinematică:

Măsura mulțimii curbelor congruente cu o curbă închisă convexă Γ de lungime L, ce mărginește aria S și care intersectează un segment fix de lungime a, este egală cu $2\pi S + 2aL$. Din (1) urmează că

$$p = \frac{\pi S_1 + aL_1}{\pi S + aL} \qquad (2)$$

reprezintă probabilitatea ca un segment de lungime a care intersectează o curbă închisă convexă Γ, de lungime L și arie S, să intersecteze o curbă închisă convexă Γ_1, de lungime L_1 și arie S_1, interioară curbei inițiale.

Se observă că

$$\lim_{a\to\infty} p = \frac{L_1}{L},$$

adică probabilitatea ca o dreaptă care taie curba Γ să taie și curba Γ_1.

Analog cu (1), pentru măsura mulțimii curbelor congruente cu o curbă închisă convexă Γ (oval) de lungime L, arie S și care taie o curbă închisă convexă Γ_0 (oval) de lungime L_0, arie S_0

$$\mu = 2\pi(S + S_0) + LL_0, \qquad (1')$$

iar

$$p = \frac{2\pi(S + S_1) + LL_1}{2\pi(S + S_0) + LL_0} \qquad (2')$$

este probabilitatea ca ovalul Γ care taie Γ_0 să taie și ovalul Γ_1 de lungime L_1, arie S_1, interior lui Γ_0.

4. *Determinarea statistică a unor mărimi geometrice.* Un exemplu interesant de aplicare a probabilităților geometrice se datorează lui A. Rényi care formulează o problemă frecvent întîlnită în economia agriculturii.

Pe un cîmp (teren) de formă simplă (dreptunghi sau cerc) dintr-un domeniu D se găsesc porțiuni D_s necultivabile (sărături). Productivizarea acestor terenuri necesită cheltuieli ce depind natural de aria $|D_s|$ a sărăturilor. Se pune problema evaluării

cheltuielilor pentru desțelenire și prin urmare a determinării suprafeței $|D_s|$ din D printr-un procedeu cît mai ieftin și simplu. Este mai convenabil atunci să se determine raportul

$$r = \frac{|D_s|}{|D|}. \tag{1}$$

În practica statistică o primă cale pentru a afla o funcție de evaluare a lui r este

$$r \sim r_1 = \frac{n_s}{n}. \tag{2}$$

unde n_s reprezintă numărul punctelor (probelor) cu sare din cele n puncte (probe) repartizate uniform în D.

Expunem în continuare și alte metode de evaluare pentru r. Acestea apelează la măsura invariantă a mulțimii dreptelor și la proprietățile ei ([19]).

În locul punctelor uniform repartizate în D, considerăm drepte repartizate uniform. Este știut (§3., 4) că lungimea euclidiană a corzii determinată de o dreaptă g într-o mulțime D este o variabilă aleatoare (funcție măsurabilă de g) și o vom nota cu $x_D(g)$. Pentru momentele de ordinul unu și doi ale variabilei $x_D(g)$ folosim formulele integrale (W. Blaschke).

$$M[x_D] = \frac{\int_{g \cap D \neq \varnothing} x_D(g)\ \mathrm{d}g}{\int_{g \cap D \neq \varnothing} \mathrm{d}g} = \frac{\pi |D|}{L}, \qquad \int_{g \cap D \neq \varnothing} \mathrm{d}g = L, \tag{3}$$

$$M[x_D^2] = \frac{\int_{g \cap D \neq \varnothing} x_D^2(g)\ \mathrm{d}g}{\int_{g \cap D \neq \varnothing} \mathrm{d}g},$$

unde $\mathrm{d}g = \mathrm{d}p\mathrm{d}\theta$ este măsura elementară a mulțimii dreptelor în plan, iar L lungimea frontierei domeniului D.

Dacă g_i $(i = 1, \ldots, n)$ sînt n drepte repartizate uniform, astfel ca să intersecteze pe D, iar $x_{D_s}(g_i)$ lungimile corzilor corespunzătoare în $D_s \subset D$, obținem pentru r următoarea funcție de evaluare

$$r \sim r_2 = \frac{L}{\pi |D|} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{D_s}(g_i). \tag{4}$$

Într-adevăr, analog cu (3) pentru o variabilă $x_{D_s}(g)$, obținem valoarea medie condiționată (din faptul că $g \cap D \neq \varnothing$)

$$M[x_{D_s}] = \frac{\int_{g \cap D_s \neq \varnothing} x_{D_s}(g)\ \mathrm{d}g}{\int_{g \cap D \neq \varnothing} \mathrm{d}g} = \frac{\pi |D_s|}{L},$$

$$M[x_{D_s}^2] = \frac{\int_{g \cap D_s \neq \varnothing} x_{D_s}^2(g)\ \mathrm{d}g}{\int_{g \cap D \neq \varnothing} \mathrm{d}g} \tag{5}$$

Alegerea lui r_2 s-a făcut prin analogie cu un procedeu dat de H. Hadwiger în ([22]).

În cazul cînd nu se cunoaște $\frac{L}{\pi |D|}$, în baza relațiilor (3), (5) se poate lua pentru r funcția de evaluare:

$$r \sim r_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{D_s}(g_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_{D_s}(g_i)}. \tag{6}$$

Această funcție de evaluare nu este însă fidelă decît în cazul asimptotic $(n \to \infty)$. Se observă că:

La primul procedeu (2), forma domeniului D_s nu juca un rol esențial; la al doilea procedeu dat prin (4), forma domeniului D_s este esențială, deoarece ea determină funcția de repartiție a variabilei aleatoare x. Pentru evaluarea erorilor care intervin ne folosim de dispersia variabilei aleatoare $x_{D_s}(g)$;

$$D^2(x_{D_s}) = M[x_{D_s}^2] - (M[x_{D_s}])^2 = \frac{1}{L^2}(L\alpha(D_s) - \pi^2 |D_s|^2). \tag{6}$$

În (6) s-a folosit (5) și notația

$$\alpha(D_s) = \int_{g \cap D_s \neq \varnothing} x_{D_s}^2(g)\ \mathrm{d}g. \tag{7}$$

5) *Statistica dreptelor.* Din (4) și (7) obținem pentru dispersia lui r_2,

$$D^2(r_2) = \frac{1}{n}\left(\frac{L}{\pi^2 |D|^2}\,\alpha(D_s) - r^2\right). \tag{8}$$

Vom da aici *inegalitatea lui T. Carleman* ([20]).

$$\alpha(D_s) \leqslant \frac{2^4}{3\pi^{\frac{5}{2}}} |D_s|^{\frac{3}{2}}. \tag{9}$$

Inegalitatea (9) *afirmă de fapt că dintre toate domeniile* $D_s \subset D$ *care au arii egale, discul* D_R (de rază R) *are cea mai mare dispersie a lungimilor de coardă.*

Această inegalitate se deduce studiind maximul funcționalei

$$F(A) = \int_{A\times A} f(|\overline{P_1P_2}|)\mathrm{d}P_1\mathrm{d}P_2$$

pentru toate domeniile A care au ariile egale, $|\overline{P_1P_2}|$ fiind distanța între punctele P_1, P_2 din A ([20]), f — funcție strict pozitivă.

Din (8) și (9), obținem

Propoziția 1. *Pentru funcția* r_2 *de evaluare a lui* r *în orice domeniu* D_s *este valabilă relația*

$$D^2(r_2) \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{2^4}{3^4\pi^{5/2}} \cdot \frac{L}{|D|^{1/2}} r^{\frac{3}{2}} - r^2\right), \tag{10}$$

și are loc egalitatea cînd D_s *este un disc.*

Într-adevăr (10) se obține din (8) și (9).

Să folosim în (10) *inegalitatea izoperimetrică* ([21]), relativă la domeniul D presupus convex. Vom avea

$$L^2 - 4\pi|D| \geqslant 0$$

și deci

$$D^2(r_2) \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{2^5}{3\pi^2}\sqrt{r} - r\right)r, \tag{11}$$

egalitatea avînd loc dacă D_s și D sînt discuri.

6) *Statistica punctelor.* Ținînd seama că n_s urmează o lege de repartiție binomială cu parametrul de evaluat r, din (2) obținem pentru dispersia lui r_1

$$D^2(r_1) = \frac{1}{n} r(1-r). \tag{12}$$

Propoziția 2. *Din compararea relațiilor* (11) *și* (12) *rezultă că dacă* $0 \leqslant r \leqslant \frac{3^2\pi^4}{2^{10}}$, *atunci pentru orice domeniu* D_s *inclus în discul* D, *avem*

$$D^2(r_2) \leqslant D^2(r_1). \tag{13}$$

Dacă D_s este disc, atunci r atinge limita superioară $\frac{3^2\pi^4}{2^{10}}$.

Din (11) și (12) mai rezultă că pentru cunoașterea dispersiei $D^2(r_2)$ este necesar ca D_s și D să fie discuri, pe cînd pentru cunoașterea dispersiei $D^2(r_1)$ este necesară numai cunoașterea lui r. Presupunînd că D este un disc, s-a obținut tabelul următor

			D_s-disc	D_s-oarecare
r	$n_1D^2(r_1)$	$n_2D^2(r_2)$	$n_1 : n_2$	$n_1 : n_2$
0,01	0,0099	0,00098	10	10^4
0,1	0,09	0,024	3,7	111
0,5	0,25	0,132	1,9	12,4
0,9	0,09	0,113	0,8	1,4
0,99	0,0099	0,085	0,1	0,12
1,00	0	0,08	0,08	0

Din (1), (6), (8), obținem

$$D^2(r_2) = \frac{1}{n}\frac{L^2}{\pi^2|D|^2} D^2(x_{D_s}). \tag{14}$$

Pentru micșorarea dispersiei (14) se presupune că domeniul D_s este repartizat uniform în D. Apoi fixînd o direcție θ, se consideră dreptele $g(p, \theta)$ perpendiculare pe direcția fixată, care îl taie pe D și pentru care parametrul normal p variază într-un interval $[0, d]$. Facem o divizare a intervalului $[0, d]$ în n părți egale prin punctele d_i $(i = 1, \ldots, n)$ și alegem în fiecare interval parțial cîte un punct p_i, căruia îi va corespunde

o dreaptă g_i. Se consideră variabilele aleatoare $x_{D_s}(g_i)$ și funcția de evaluare

$$r_3 = \frac{d}{n}\frac{1}{|D|}\sum_{i=1}^{n} x_{D_s}(g_i). \tag{15}$$

Deoarece D_s este uniform repartizat în D, urmează

$$M[x_{D_s}(g_i)] = \frac{n}{d}\int_{d_{i-1}}^{d_i} x_{D_s}(p)\,\mathrm{d}p = \frac{n}{d}|D_s^i|, \tag{16}$$

unde $|D_s^i|$ este porțiunea din D_s aflată între dreptele

$$g(d_{i-1},\ \theta),\ g(d_i,\ \theta).$$

Deci,

$$M[r_3] = \frac{d}{n}\frac{1}{|D|}\sum_{i=1}^{n} M[x_{D_s}(g_i)] = r.$$

Pentru dispersia lui r_3 rezultă

$$D^2(r_3) = \frac{d}{|D|^2}\frac{1}{n}\beta - \frac{1}{|D|^2}\sum_{i=1}^{n}|D_s^i|^2, \tag{17}$$

unde

$$\beta = \int_0^d x_{D_s}^2(p)\,\mathrm{d}p,\ M[\beta] = \frac{1}{\pi}\alpha(D_s).$$

Propoziția 3. *Dacă domeniul D este un disc și dacă alegem convenabil direcția θ astfel ca $\beta \leqslant \frac{1}{\pi}\alpha\ (D_s)$, din (14) și (17), obținem*

$$D^2(r_2) - D^2(r_3) \geqslant \frac{1}{n|D|^2}\sum_{i<j}(|D_s^i| - |D_s^j|)^2,$$

egalitatea avînd loc pentru $\beta = \frac{1}{\pi}\alpha\ (D_s)$.

Aceleași probleme se pot trata în spațiul euclidian tridimensional. Notăm cu S o porțiune de suprafață dintr-un domeniu D al spațiului. Atunci „aria specifică" a lui S în domeniul D se evaluează prin funcția

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n}\nu(g_i)}{\sum_{i=1}^{n}x(g_i)} \sim \frac{1}{2}\frac{|S|}{|D|},$$

unde $|S|$ este aria suprafeței S, $|D|$ volumul lui D, $\nu(g_i)$ numărul punctelor din $g_i \cap S$, iar $x(g_i)$ lungimea coardei $g_i \cap D$. Evaluarea de mai sus a fost folosită în medicină la determinarea suprafețelor pulmonare ([23]). (Ea este fidelă asimptotic $(n \to \infty)$).

7. *Înfășurătoarea convexă a lui A. Rényi.* În planul euclidian se consideră n puncte P_i $(i = 1, \ldots n)$ aleatoare, independente și repartizate uniform. Să presupunem că punctele P_i se află într-un poligon convex K cu r vîrfuri A_k $(k = 1, \ldots, r)$. Construim variabila aleatoare

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } \overline{P_iP_j} \in \partial I_n \text{ și } i \neq j \\ 0 \text{ în rest} \end{cases}$$

unde ∂I_n este frontiera înfășurătoarei convexe, a celor n puncte aleatoare. Sistemului de puncte $\{P_1, \ldots, P_n\}$ îi asociem variabilele aleatoare X_n, L_n, F_n, reprezentînd respectiv numărul de laturi, perimetrul și aria înfășurătoarei convexe I_n.

Atunci

$$p_n = P(\varepsilon_{ij} = 1) \tag{1}$$

este probabilitatea ca sistemul de puncte $\{P_1, \ldots, P_n\}$ să aibă proprietatea că punctele $\{P_3, \ldots, P_n\}$ se află de o parte sau de alta a dreptei determinate de P_1 și P_2. În locul perechii (P_1, P_2) se putea lua orice altă pereche (P_i, P_j), deoarece punctele sînt independente și repartizate uniform. Deci

$$X_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \varepsilon_{ij}, \tag{2}$$

iar

$$M[X_n] = p_n C_n^2,$$

p_n fiind probabilitatea unui sistem de n puncte cu o anumită proprietate (§3. (1). Rezultă

$$p_n = \frac{1}{F^2}\int_{K\times K}\left[\left(1 - \frac{F_1}{F}\right)^{n-2} + \left(\frac{F_1}{F}\right)^{n-2}\right]\mathrm{d}P_1\,\mathrm{d}P_2, \tag{3}$$

unde F_1, $F - F_1$ sînt ariile celor două porțiuni ale lui K determinate de dreapta P_1P_2, cu condiția $F_1 \leqslant \frac{F}{2}$.

Din (3) deducem *

$$M[X_n] \sim \frac{C_n^2}{F^2} \int_{K\times K} \left(1 - \frac{F_1}{F}\right)^{n-2} \mathrm{d}P_1\, \mathrm{d}P_2. \tag{4}$$

Utilizînd expresia măsurii elementare $\mathrm{d}P_1\mathrm{d}P_2$ pentru perechi de puncte, obținem pentru comportarea asimptotică a valorii medii $M[X_n]$:

Propoziția 1. *Fie K un poligon convex cu r vîrfuri. Valoarea medie $M[X_n]$ a numărului de laturi a înfășurătoarei convexe I_n a n puncte aleatoare, independente și uniform repartizate în K este dată prin*

$$M[X_n] = \frac{2}{3}(c + \ln n) + \frac{2}{3} \ln \frac{\prod_{i=1}^{n} f_i}{F^r} + O(1), \tag{5}$$

unde c este constanta lui Euler, f_i aria triunghiului format de vîrfurile A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, $O(1)$ simbolul Landau.

În cazul unui triunghi K, $f_1 = f_2 = f_3 = F$ și $M[X_n] = 2(\ln n + c) + O(1)$.

Funcționala

$$\varphi(K) = \frac{\prod_{i=1}^{r} f_i}{F^r}$$

devine maximă cînd K este un r-poligon, afin echivalent cu un r-poligon regulat.

În cazul cînd K este un *domeniu convex* cu frontiera netedă, prin considerații analoage, obținem

$$M[X_n] \sim \frac{C_n^2}{F^2} \int_{K\times K} \left(1 - \frac{f}{F}\right)^{n-2} \mathrm{d}P_1\, \mathrm{d}P_2, \tag{6}$$

unde F este aria lui K, $f \leqslant \frac{F}{2}$ aria părții delimitată de dreapta P_1P_2 și frontiera lui K. Comportarea asimptotică a valorii medii $M[X_n]$ în acest caz se studiază folosind *cercul osculator* atașat frontierei lui K.

*) $\sim$ reprezintă „echivalența asimptotică" adică $x_n \sim y_n$ dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$.

Propoziția 2. *Fie K un domeniu convex, mărginit, de arie F, a cărui frontieră ∂K are curbura continuă $k = k(s)$; s este arcul curbei. Comportarea asimptotică a valorii medii $M[X_n]$ este dată prin:*

$$M[X_n] \sim \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \sqrt[3]{\frac{2n}{3F}} \int_{\partial K} k^{\frac{1}{3}}\, \mathrm{d}s, \tag{7}$$

unde Γ este funcția lui Euler de speța a II-a. Funcționala $\int_{\partial K} k^{\frac{1}{3}}\, \mathrm{d}s$ se numește lungime echiafină a curbei ∂K și ea este maximă cînd ∂K este o elipsă.

Fie acum cazul cînd punctele $\{P_1, \ldots, P_n\}$ sînt repartizate după o aceeași lege de *repartiție normală*. În acest caz,

$$\mathrm{d}P_i = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{x_i^2 + y_i^2}{2}}\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

este măsura elementară a mulțimii punctelor P_i de coordonate carteziene (x_i, y_i). În același mod, obținem

$$M[X_n] = p_n C_n^2,\ p_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left[\Phi^{n-2}(p) + (1 - \Phi(p))^{n-2}\right] \mathrm{e}^{-p^2}\, \mathrm{d}p,$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{p} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x.$$

De aici urmează

Propoziția 3. *Dacă P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sînt n puncte independente repartizate după o aceeași lege normală în planul euclidian, atunci comportarea asimptotică a valorii medii $M[X_n]$ este dată de*

$$M[X_n] \sim 2\sqrt{2\pi \ln n}. \tag{8}$$

Comportarea asimptotică a valorilor medii $M[L_n]$, $M[F_n]$ este dată de

Propoziția 4. *Fie K un domeniu plan convex, mărginit, de arie F, cu frontiera ∂K, (de clasă cel puțin 4). Fie L lungimea frontierei iar $k(s)$, $0 < k(s) < A$ curbura. Atunci lungimea L_n*

și aria F_n a înfășurătoarei convexe I_n a n puncte aleatoare independente și uniform repartizate în K vor avea valorile medii

$$\begin{cases} M[L_n] = L - \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\frac{(12F)^{\frac{2}{3}}}{12n^{2/3}}\int_{\partial K} k^{\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}s + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ M[F_n] = F - \Gamma\left(\frac{8}{3}\right)\frac{(12F)^{\frac{2}{3}}}{10n^{2/3}}\int_{\partial K} k^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}s + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{cases} \tag{9}$$

În cazul cînd K este un pătrat de latură a,

$$M[L_n] = 4a - \frac{a(2-b)\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$M[F_n] = a^2 - \frac{8a^2}{3n}\ln n + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

unde

$$b = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

§ 5. Extinderea la spații Minkowski

Problematica acestui capitol a fost extinsă în spații mai generale ca spațiul euclidian. Acestea sînt spațiile Minkowski n-dimensionale, cu metrică simetrică. H. Busemann definește distanța minkowskiană între două puncte folosind o hipersuprafață convexă, central simetrică numită „indicatoarea" spațiului. În cazul $n = 2$, în planul minkowskian au fost stabilite măsuri invariante pentru mulțimi de drepte, perechi de drepte, puncte, perechi de puncte și sisteme de puncte. De asemenea a fost definită o probabilitate ca un cît de măsuri invariante la mișcările minkowskiene, care poate servi drept model geometric pentru noțiunea generală de spațiu metric probabilist. Mulțimilor boreliene și mărginite le-au fost asociate variabile aleatoare pentru care s-au studiat momentele și funcțiile de

repartiție. Această problematică este dezvoltată în lucrarea [27] care constituie teza autorului R. Constantin. În legătură cu varibailele aleatoare $x_B(g)$, ce reprezintă lungimea minkowskiană a corzii determinată de o dreaptă g într-o mulțime $B \subset M_2$, borelianǎ, mărginită, convexă și de arie S se demonstrează:

Propoziția 1. *Variabilele $x_B(g)$ satisfac relația*

$$\int_{g \cap B \neq \Phi} x_B(g)\,\mathrm{d}g = cS,$$

unde $\mathrm{d}g$ *este măsura elementară a mulțimii dreptelor în M_2, iar c este aria izoperimetricei în M_2.*

Propoziția 2. *Funcțiile de repartiție asociate variabilelor aleatoare $x_B(g)$ sînt continue.*

Pentru funcțiile de repartiție notate cu $F_B(x)$ se găsește interpretarea geometrică dată de relația

$$F_B(\varepsilon) = 1 - \frac{L_{I_\varepsilon}}{L_B},$$

unde L_B este lungimea minkowskiană a frontierei ∂B, iar L_{I_ε} este lungimea minkowskiană a înfășurătoarei I_ε a acelei familii de drepte g, care taie pe mulțimea $B \subset M_2$ corzile $x_B(g) = \varepsilon > 0$.

Abordarea înfășurătoarei convexe a lui A. Rényi în planul minkowskian conduce la

Propoziția 3. *Fie K un domeniu convex din planul minkowskian cu frontiera netedă ∂K, avînd lungimea minkowskiană L și aria S. Fie $0 < \varkappa(s) < \infty$ curbura minkowskiană a curbei ∂K. Dacă X_n, Y_n, Z_n sînt variabilele aleatoare ce reprezintă respectiv numărul de laturi, lungimea și aria minkowskiană a înfășurătoarei convexe a n puncte aleatoare, independente, uniform repartizate în K, atunci comportarea asimptotică a valorilor medii este dată prin*

$$M[X_n] = \Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{3S}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{3}}\int_{\partial K} \varkappa^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}s + O\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right),$$

$$M[Y_n] = L - \frac{1}{n^{2/3}}A(K) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$M[Z_n] = S - \frac{1}{n^{2/3}}B(K) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Γ *fiind funcția lui Euler, iar* $A(K)$, $B(K)$ *funcționale ce depind de curbura minkowskiană* $\varkappa(s)$ *a frontierei* ∂K, *dar și de curbura minkowskiană a «izoperimetricei» planului Minkowski.*

BIBLIOGRFAFIE

[1] M.W. CROFTON, *On the theory of local probability*, Phil. Trans. of the Royal Soc., 1868.

[2] E. CARTAN, *Le principe de la dualité*, Bull. Soc. Math. de France, 24, 1896.

[3] H. POINCARÉ, *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1912.

[4] H. LEBESGUE, *Exposition d'un Memoire de M.W. Crofton*, Nouvelles Annalles, 12, 1912.

[5] G. CASTELNUOVO; *Calcolo delle probabilitá*, Roma, 1919.

[6] R. DELTHEIL, *Probabilités géometriques*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[7] W. BLASCHKE, *Integralgeometrie* 1, Actualités scientifiques, Hermann, Paris, 1935.

[8] W. BLASCHKE, *Integralgeometire* 2, Bull. Soc. Roumaine des Sciences, 1936.

[9] W. BLASCHKE, *Integralgeometrie* 12, Über vollkommene optische Instrumente, Abhandlungen, Hamburg, 1936.

[10] W. BLASCHKE, *Integralgeometrie* 13, Math. Zeitschrift, 40, 1935.

[11] W. BLASCHKE, *Cinematica integrale*, Rendiconti dell'Acad. dei Lincei, 1, 4, 1936.

[12] W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Integralgeometrie*, 3. Aufl., Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1955.

[13] W. MAAK, *Integralgeometrie*, 18 și 27, Abhandlungen, Hamburg, 12, 1936.

[14] L.A. SANTALÓ, *Über das kinematische Mass*, Actualités scientifiques, Hermann, Paris, 1936.

[15] IDEM, *Sobre la medida cinemática en el plano* Abh. Math. Sem Hans. Univ. Hamburg, 11, 222—236 1936.

[16] M. STOKA, *Măsura mulțimilor de varietăți dintr-un spațiu*, Buletinul Științific Acad. R.P.R., Secția de științe matematice și fizice, nr. 4, 1955.

[17] IDEM, *Geometrie integrală*, Ed. Academiei, București, 1967.

[18] R. TRANDAFIR, *Familles de courbes mesurables du plan euclidian*, Revue Roumaine de Math. Pures et Appl., T. 11, nr. 8, 1966 et II. T. 13, nr. 1, 1968.

[19] R. SULANKE, *Die Verteilung der Sehnenlängen an ebenen und räumlichen Figuren*, Math. Nachrichten, 23, 1, 51—74 (1961).

[20] T. CARLEMAN, *Über die isoperimetrische Probleme und Übungen*. Math., Z. 3. 1—7, 1919.

[21] T. BONNENSEN, *Theorie der Konvexen Körper*, Ergeb. der Math. ed. Springer, Berlin, 1934.

[22] H. HADWIGER, *Über die statistische Messung der Ebene und der Länge*, Miiteil. der Naturforschung, Berna, 1938.

[23] A. HESSIG, Zeitschrift über die Mikroscopie, Wien, 1956, 1957.

[24] A. RÉNYI, R. SULANKE, *Über die Konvexe Hülle von n Zufallig gewählten Punkten*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 2, 75—84, 1963; 3, 138—147, 1964.

[25] H. BUSEMANN, *The Foundations of Minkowskian Geometry*, Com. Math. Helv., 24, 1950.

[26] G.D. CHAKERIAN, *Integral Geometry in the Minkowski Plane*, Duke Math. J. 29, 375—382, 1962.

[27] R.F. CONSTANTIN, *Contribuții la studiul proprietăților mulțimilor convexe în planul Minkowski*, Teză de doctorat, București, 1975.

1. Reprezentarea lanțurilor continue și a lanțurilor continue aleatoare

1. *Lanțurile continue.* Definiții. a) *Fie* X *și* U *două spații topologice local compacte. O aplicație continuă* $y = C(x; u, v)$ *definită pe* $X \times U \times U$ *cu valori în* X *se numește lanț continuu dacă verifică următoarele două condiții*

$$C_0)\ C(x; u, u) = x;$$

$$C_1)\ C(C(x; u, v); v, w) = C(x; u, w)$$

pentru orice $x \in X$, $u, v, w \in U$.

b) *Să notăm cu* F *categoria familiilor continue* $T_u (u \in U)$ *de aplicații asociative și continue a lui* X *în* X *care verifică următoarele două condiții*

τ_1) *există* $u \in U$, *astfel încît* $T_u x = x$ *pentru orice* $x \in X$.

τ_2) *dacă există o aplicație continuă* $f(x; u, v)$ *definită pe* $X \times U \times U$ *cu valori în* X *cu proprietățile*

$$f(x; u, u) = x \tag{1}$$

și

$$T_v(f(x; u, v) = T_u x, \tag{2}$$

atunci ea este unică.

Pot fi enunțate acum următoarele teoreme

Teorema 1. *Fiind dat* $T_u \in F$, *aplicația* $C(x; u, v)$ *care verifică condiția* τ_2) *este continuă.*

Pentru demonstrare trebuie să verificăm proprietatea C_1). În virtutea relației (2), avem

$$T_w C(C(x; u, v); v, w) = T_v C(x; u, v) = T_u x = T_w C(x; u, w).$$

Folosind relația τ_2), obținem

$$C(C(x; u, v); v, w) = C(x; u; w),$$

care reprezintă exact proprietatea C_1).

Este evident că familia $T_{u_0} T_u$, u_0 fiind fixat, generează același lanț cu T_u.
Acest mod de generare este complet, după cum va rezulta și din teorema următoare

Teorema 2. *Lanțul* $C(x; u, v)$ *fiind dat, el poate fi generat cu ajutorul familiei de transformări.*

$$T_u x = C(x; u, v_0), \tag{3}$$

v_0 *fiind fixat.*

Într-adevăr, dacă punem în (2) $x = C(y; w, u)$ se obține

$$T_u C(y; w, u) = C(y, w, v_0) = T_w y. \tag{4}$$

Familia T_u are prin urmare, proprietatea cerută în definiție.

2. *Semigrupurile* T_u *și lanțurile omogene.* Definiție. *O familie de aplicații* $T_u (u \in U)$ *continue definite pe* X *cu valori în* X, *conținînd transformarea identică* T_w, *constituie un semigrup dacă pentru fiecare pereche* u, v, *de puncte din* U *există un punct* $\varphi = \varphi(u, v)$ *în* U, *astfel încît*

$$T_u T_v = T\varphi(u, v)$$

iar aplicația continuă φ *de la* $U \times U$ *la* U *are următoarele proprietăți*

$$\varphi_0)\ \varphi(w, u) = \varphi(u, w) = u,$$

$$\varphi_1)\ \varphi(\varphi(u, v), w) = \varphi(u, \varphi(v, w)),$$

pentru orice $u, v, w \in W$.

Din proprietatea φ_0), obținem $T_u T_w = T_w T_u = T_u$, iar din φ_1) obținem

$$(T_u T_v)\ T_w = T_u (T_v T_w).$$

Teorema 3. *Lanțul generat de semigrupul T_u este omogen.*

Într-adevăr, lanțul $C(x; u, v)$ care corespunde semigrupului T_u verifică relația C_1).

Dar atunci va verifica și egalitatea

$$T_w T_v C(x; u, v) = T_w T_u x$$

și ținînd cont că T_u este semigrup, avem

$$T_{\varphi(w, v)} C(x; u, v) = T_{\varphi(w, u)} x. \tag{5}$$

Atunci

$$C(x; u, v) = C(x; \varphi(w, u), \varphi(w, v)). \tag{6}$$

ceea ce arată că lanțul este invariant la transformarea

$$u \to \varphi(w, u), \quad v = \varphi(w, v),$$

pentru orice $w \in U$.

Exemple.

1°) $U = R_1^+$; $\varphi(u, v) = u + v$, sau mai general $\varphi(u, v) > 0$ în afară cazului cînd $u = v = 0$.

2°) U este o parte conexă a unui grup G multiplicativ, care conține unitatea ω, și cu proprietatea că dacă $u \in U$ și $v \in U$, atunci $uv \in U$.

Mai general, U este o parte conexă a grupului G care conține pe ω și există o aplicație continuă $\varphi(u, v)$ a lui $U \times U$ în U cu proprietățile (5) și (6).

3. *O altă formă de reprezentare a lanțurilor omogene.* Fie X un spațiu Banach cu elementul unitate I

Teorema 4. *Dacă $T \in F$, atunci aplicația continuă $f(x, t)$ definită pe $X \times R^+$ cu valori în X care verifică egalitatea*

$$Tf(x, t) = Tx + tI \tag{7}$$

reprezintă un semigrup.

Într-adevăr, dacă notăm $x = f(y, s)$ relația (7) devine

$$Tf(f(y, s), t) = Tf(y, s) + tI = Ty + (s + t) I$$

de unde, ținînd cont că $T \in F$, avem

$$f(f(y, s), t) = f(y, s + t) \tag{8}$$

În același timp, dacă $t = 0$, relația (7) devine

$$Tf(x, 0) = Tx,$$

pentru orice x, și din nou ținînd cont că $T \in F$, avem

$$f(x, 0) = x. \tag{8}$$

Egalitatea (8) și (8') caracterizează semigrupul.

Teorema 5. *Dacă $y = f(x, t)$ este un semigrup pe X orice aplicație T care îl reprezintă ca în teorema 4 este determinată de o transformare $T \in F$, cu excepția unei constante arbitrare.*

Vom demonstra teorema pentru cazul $X = E_1$. În acest caz transformarea căutată T, dacă există, trebuie să verifice (7). Deoarece T nu depinde nici de t nici de x, vom avea egalitățile

$$Tf(x, t) = Tx + t$$

și

$$Tf(x_0, t') = Tx_0 + t',$$

de unde

$$Tf(x, t) - Tf(x_0, t) = Tx - Tx_0 \tag{9}$$

$$Tf(x_0, t') - Tf(x_0, t) = t' - t \tag{10}$$

sau, dacă luăm

$$x = f(x_0, u) \tag{11}$$

cu $u = t - t'$, vom avea $f(f(x_0, u), t) = f(x_0, t')$ și deci membrii din stînga relațiilor (9) și (10) sînt egali.

Urmează că

$$Tx = Tx_0 + u. \tag{12}$$

Dar u este definit, cel puțin în vecinătatea lui x_0, prin ecuația (11). Fie $l^{-1}(x, x_0)$ o soluție care se anulează pentru $x = x_0$.

Pentru a mai simplifica — lucru care este posibil deoarece căutăm o soluție particulară — putem lua $x_0 = 0$ și $Tx_0 = 0$.

Vom avea deci

$$Tx = l^{-1}(x),$$

unde $l^{-1}(x)$ este inversa funcției $l(u) = f(0, u)$. Dar atunci

$$Tf(x, t) = l^{-1}(x) + t$$

sau

$$f(x, t) = l(l^{-1}(x) + t), \tag{13}$$

ceea ce demonstrează teorema în cazul particular $X = E_1$. Demonstrarea în cazul general se face în mod analog.

4. *Transformări, semigrupuri și lanțuri aleatoare.* a) *Cîmpuri de transformări.* Pentru a pune în relație obiectele considerate pînă acum, transformările T sau familiile de transformări și lanțurile, cu un spațiu de evenimente aleatoare, trebuie să examinăm în prealabil condițiile de măsurabilitate ale spațiilor constituite pentru aceste obiecte. În primul rînd noi trebuie să examinăm condițiile de măsurabilitate asupra spațiilor X și U și prin urmare asupra transformărilor T sau ale familiilor T_u care sînt toate transformările lui F.

Precizăm că T este o transformare F dacă ea este continuă și dacă $Tf(x,u) = Tg(x,u)$ implică egalitatea $f(x,u) = g(x,u)$, dacă noi știm că $f(x,u_0) = g(x,u_0)$. Am cerut ca transformările T ale spațiului topologic local compact X să aibă proprietatea F. Dacă $\mathfrak{L}$ este un corp de părți al lui X (corpul borelian $\mathfrak{B}$ de exemplu, dacă X este spațiul euclidian cu n dimensiuni) cerem ca transformările să fie măsurabile în raport cu $\mathfrak{L}$, adică $T^{-1}(A) \in \mathfrak{L}$ pentru orice $A \in \mathfrak{L}$. Dacă corpul $\mathfrak{L}$, nu este dat, această condiție de măsurabilitate a transformărilor T, constituie o condiție pentru $\mathfrak{L}$. O a doua condiție va fi formulată astfel.

Fiecare T definește o mulțime de perechi (x, y) cu $y = Tx$, x luînd toate valorile din X. T corespunde prin urmare unei părți a lui $X \times X$. Această parte trebuie să aparțină corpului borelian $\mathfrak{L}_2$ indus pe $X \times X$ de $\mathfrak{L}$.

Trebuie să examinăm acum condițiile în care spațiul S al transformărilor măsurabile $\mathfrak{L}$ are o structură de corp borelian.

Să observăm pentru aceasta că fiecare mulțime $\mathfrak{A}$ finită, respectiv măsurabilă, de transformări de elemente ale corpului $\mathfrak{L}$ este încă un element al lui $\mathfrak{L}$.

Spațiul mulțimilor $\mathfrak{A}$ este, evident, ordonat și inductiv, admite deci conform teoremei lui Zorn cel puțin un element maximal care aparține ca fiecare $\mathfrak{A}$, aceleiași mulțimi. Fiecărei mulțimi maximale de transformări T îi corespunde deci un subcorp al lui $\mathfrak{L}_2$. Fiecare T aparține cel puțin unui spațiu maximal S_m, subspațiu al lui S, el aparține deci unui spațiu avînd o structură de corp, ca subcorp al lui $\mathfrak{L}_2$.

b) *Cîmpuri aleatoare.* Fie $\{\mathfrak{S}, \mathfrak{K}, P\}$ un cîmp de evenimente constituite din părți ale spațiului $\mathfrak{S}$ de elemente aleatoare ξ.

La punctul a), pentru construirea unui cîmp $\mathfrak{L}$ convenabil, am găsit următoarele condiții pentru elementele cîmpului:

1° Măsurabilitatea transformărilor T;

2° Cîmpul $\mathfrak{L}_2$ indus trebuie să conțină mulțimile de perechi (x, y) care corespund la diverse transformări.

Este necesară în continuare o nouă condiție. Dacă $x = a(\xi)$ este o aplicație a lui $\mathfrak{S}$ în X, această funcție trebuie să fie $\mathfrak{L}$ măsurabilă, adică pentru $\omega \in \mathfrak{K}$ dat, mulțimea maximală a părților A ale lui X pentru care $a^{-1}(A) = \omega$ aparține lui $\mathfrak{L}$ pentru fiecare ω. $\mathfrak{L}$ fiind determinat prin aceste condiții, fie S_m unul din spațiile maximale definite anterior și avînd o structură de cîmp bine definită, compatibilă și cu funcția $x = a(\xi)$.

Să considerăm spațiul V_m al aplicațiilor măsurabile $T(\xi)$ ale lui $\mathfrak{S}$ în $\mathfrak{S}$ și aplicațiile continue $\{T(\xi)\}_u = T_u(\xi)$ ale lui V_m în V_m. Transformările aleatoare $T(\xi)$ generează lanțurile aleatoare omogene $f(a(\xi), t, \xi)$ care verifică relația

$$T(\xi)\, f(a(\xi); t; \xi) = T(\xi)\, a(\xi) + It \tag{14}$$

și care poate fi reprezentată, cu convențiile deja adoptate pentru T^{-1}, prin

$$f(a(\xi); t, \xi) = T^{-1}(\xi)\, (T(\xi)\, a(\xi) + It). \tag{15}$$

Familiile de aplicații aleatoare $T_u(\xi)$ care dau loc lanțurilor aleatoare generale $f(a(\xi); u, v, \xi)$ care, cu aceleași convenții se prezintă sub forma

$$f(a(\xi), u, v, \xi) = T_v^{-1}(\xi)\, T_u(\xi)\, a(\xi). \tag{16}$$

În secțiunea următoare funcțiile aleatoare reprezentate în (15) și (16) și care verifică pentru fiecare ξ ecuațiile funcționale

$$f(f(a(\xi); s, \xi); t, \xi) = f(a(\xi); s + t, \xi) \tag{17}$$

și respectiv

$$f(f(a(\xi); u, v; \xi); v, w, \xi) = f(a(\xi); u, w; \xi) \tag{18}$$

vor fi regăsite ca reprezentînd, pentru cazul cînd U este axa timpului, procese aleatoare markoviene, omogene sau variabile în timp.

Este necesară pentru aceasta reluarea elementelor unei teorii a proceselor markoviene în care să nu intervină probabilități condiționate ci probabilitățile absolute.

5. *Procese markoviene.* a) *Baza procesului.* Fie $\{X, \mathfrak{K}\}$ un cîmp de evenimente definit pe un spațiu local compact și topologic X.

Traiectoriile $x(t)$, $t \in R^+$, care sînt aplicații ale lui R^+ în X, constituie evenimentele elementare ale procesului

$$\xi = (x(t)),$$

$\mathfrak{S} = \{x(t)\}$ este spațiul procesului.
Evenimentele pe care le vom considera în primul rînd sînt

$$\mathfrak{S}_a(s) = \{x(t) \mid x(s) = a\}, \tag{19}$$

care este mulțimea traiectoriilor care are în comun punctul a al lui S, pentru $t = s$ și

$$\mathfrak{S}_{a,b}(s, u) = \{x(t) \mid x(s) = a,\ x(t) = b\}. \tag{20}$$

Proprietățile următoare sînt evidente

$$\mathfrak{S}_{a,b}(s, s) = \begin{cases} \mathfrak{S}_a(s) & \text{dacă } b = a \\ \varnothing & \text{dacă } b \neq a, \end{cases} \tag{21}$$

$$\mathfrak{S}_{a,b}(s, t) = \mathfrak{S}_a(s) \cap \mathfrak{S}_b(t),$$

$$\bigcup_{a \in X} \mathfrak{S}_a(s) = \mathfrak{S};\ \bigcup_{b \in X} \mathfrak{S}_{a,b}(s, t) = \mathfrak{S}_a(s). \tag{22}$$

Relația de tip Chapmann

$$\mathfrak{S}_{a,b}(s, t) = \bigcup_{x \in X} [\mathfrak{S}_{a,x}(s, u) \cap \mathfrak{S}_{x,b}(u, t)] \tag{23}$$

care este verificată pentru orice $s \leqslant u \leqslant t \in R^+$ și $a, b \in X$ stă la baza definiției funcțiilor aleatoare atașate procesului.

b) *Funcțiile aleatoare atașate unui proces markovian.*

Fie $f(t, \xi)$ o funcție aleatoare atașată unui proces markovian cu valoare în X. Pentru fiecare $\xi \in \mathfrak{S}$ această funcție are la momentul t o valoare bine definită prin valoarea sa $a \in X$, la momentul anterior s; $f(t, \xi)$ depinde deci de aceste două elemente pe care trebuie să le punem în evidență, scriind în loc de $f(t, \xi)$ expresia $f(a, s, t, \xi)$.

Dar pentru s, u, t trei momente consecutive, $f(t, \xi)$ poate fi determinat fie cum am făcut mai sus, direct prin valoarea a la momentul s, fie prin valoarea $f(a, s, u; \xi)$ la momentul intermediar u, ξ fiind presupus fix.

Vom avea deci

$$f(f(a; s, a; \xi); u, t, \xi) = f(a; s, t, \xi) \tag{24}$$

cu condiția inițială

$$f(a, s, s; \xi) = a, \tag{25}$$

pentru fiecare $\xi \in \mathfrak{S}_a(s)$, unde $\mathfrak{S}_a(s)$ este mulțimea punctelor ξ pentru care (25) are loc iar prin $\mathfrak{S}_{a,b}(s, t)$ mulțimea punctelor din $\mathfrak{S}_a(s)$ pentru care

$$f(a; s, t; \xi) = b. \tag{26}$$

Atunci relația (24) implică egalitatea

$$\mathfrak{S}_{a,b}(s, t) = \bigcup_{c \in X} \mathfrak{S}_{a,c}(s, u) \cap \mathfrak{S}_{c,b}(u, t). \tag{27}$$

Putem deci lua pentru $\mathfrak{S}_a(s)$ și $\mathfrak{S}_{a,b}(s, t)$ interpretările pe care le-au primit în secțiunea anterioară ca părți ale spațiului traiectoriilor.

S-a arătat modul în care făcînd ipoteza de independență a evenimentelor succesive $\mathcal{E}_{a,c}(s, u)$ și $\mathcal{E}_{c,b}(u, t)$ pentru $s < u < t$ se poate construi un sistem de probabilități,

$$P(s, a; t, A) = P(\mathcal{E}_{a,A}(s, t)),$$

unde A este o parte oarecare măsurabilă a lui X, probabilitate care să verifice relația caracteristică a proceselor markoviene.

$$P(s, a; t, A) = \int_X P(s, a; u, \mathrm{d}c)\, P(u, c; t, A)$$

cu condiția inițială

$$P(s, a; s, A) = \delta(a, A) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } a \in A \\ 0 \text{ dacă } a \notin A. \end{cases}$$

Funcțiile $f(a, s, t; \xi)$ care verifică (24) și (25) capătă astfel caracterul propriu funcțiilor aleatoare definite pe un proces markovian.

Dacă aplicăm acestor funcții rezultatele obținute anterior se poate enunța următoarea propoziție.

Orice funcție aleatoare continuă cu valori în X și definită pe un proces markovian poate fi reprezentată în forma

$$f(a; x, t, \xi) = T_t^{-1}(\xi)\, T_s(\xi)\, a, \quad s \leqslant t,$$

unde $T_u(\xi)$ este familia aleatoare de transformări asociate lui X bucurîndu-se de proprietatea F.

În cazul particular în care $f(a; s + u, t + u; \xi) \equiv f(a; s, t; \xi)$ oricare ar fi $u > 0$, vom avea

$$\mathcal{E}_{a,b}(s + u, t + u) = \mathcal{E}_{a,b}(s, t)$$

și probabilitățile respective constituie un sistem omogen verificînd condiția

$$P(a; u + v; A) = \int_X P(a; u, \mathrm{d}c)\, P(c; v, A).$$

În acest caz transformările $T_u(\xi)$ constituie un grup de homeomorfisme aleatoare pe X și reprezentarea lui f este următoarea

$$f(a, \tau, \xi) = T_{-\tau}(\xi)\, a$$

dat fiind că în acest caz $T_t^{-1}(\xi) = T_{-t}(\xi)$ și $T_{-t} T_s(\xi) = T_{-(t-s)}(\xi)$ pentru fiecare ξ.

Funcțiile aleatoare $f(a(\xi); s, t; \xi)$ unde $a(\xi)$ este valoarea inițială (pentru $t = s$) a funcției f este o funcție definită pe $\mathcal{E}$ și cu valori în X.

Să observăm acum că o singură funcție $a(\xi)$ este compatibilă cu interpretarea precedentă. Amintind că ξ este o traiectorie $y = x(\xi)$, funcția $a(\xi)$ este valoarea lui ξ în punctul $u = s$, deci $x(s)$.

În toate celelalte cazuri interpretarea markoviană a procesului pare imposibilă. Funcția $f(a(\xi); s, t; \xi) = T_t^{-1}(\xi)\, T_s(\xi)\, a(\xi)$ nu este în general markoviană.

2. Sisteme aleatoare cu legături complete. Teoreme limită

1. *Introducere.* Introduse în 1935 ([7], [8]) de Octav Onicescu și Gheorghe Mihoc, lanțurile cu legături complete reprezintă o generalizare naturală și în același timp necesară a lanțurilor Markov finite. În 1963 ([5]), M. Iosifescu a dat o generalizare importantă a lanțurilor cu legături complete introducînd noțiunea de sistem aleator cu legături complete, generalizare care pe lîngă faptul că realizează încadrarea conceptului de lanț cu legături complete în teoria modernă a proceselor stochastice, lărgește extensiv posibilitățile de aplicare ale acestei teorii la domenii din ce în ce mai numeroase. Menționăm că noțiunea de sistem aleator cu legături complete reprezintă modelul matematic adecvat pentru studiul unui experiment general de învățări, dar este în același timp un instrument puternic și elegant în rezolvarea unor probleme de teoria metrică a numerelor.

2. *Noțiunea de sistem aleator cu legături complete.* Definiția 1. *Un sistem* $\{(W, \mathfrak{W}), (X, \mathfrak{X},), u, P\}$ *se numește sistem aleator cu legături complete omogen dacă*

i) $(W, \mathfrak{W})$ *și* $(X, \mathfrak{X})$ *sînt două spații măsurabile arbitrare,*

ii) $u(.\,;.) : W \times X \to W$ *este o aplicație* $(\mathfrak{W} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{W})$ *măsurabilă,*

iii) $P(.\,;.)$ *este o probabilitate de trecere de la* $(W, \mathfrak{W})$ *la* $(X, \mathfrak{X})$, adică

a) *pentru fiecare* $w \in W$, $P(w;\cdot)$ *este o probabilitate pe* $(X, \mathfrak{X})$;

b) *pentru fiecare* $A \in \mathfrak{X}$, $P(.\,;A)$ *este o funcție* $(\mathfrak{W}, \mathfrak{R})$ *măsurabilă* (prin $\mathfrak{R}$ vom nota σ-algebra mulțimilor boreliene ale dreptei reale).

Să definim iterativ aplicațiile $u(.\,;(.)^n) : W \times X^{(n)} \to W$ prin relația

$$u(w; x^{(n+1)}) = u(u(w; x^{(n)}); x_{n+1})$$

pentru $w \in W$, $n \in N^*$, $x^{(n)} = (x_1 \dots x_n) \in X^{(n)}$, $x^{(n+1)} = (x_1 \dots$

$$\dots x_n, x_{n+1}) \in X^{(n+1)} \text{ iar } u(.\,;(\cdot)^1) = u(.\,;.).$$

Este ușor de arătat că măsurabilitatea aplicației $u(.\,;.)$ implică măsurabilitatea aplicațiilor $u(.\,;(.)^n)$.

Pentru $w \in W$, $l \in N^*$, $A^{(l)} \in \mathfrak{X}^{(l)}$ să mai definim

$$P_l(w; A^{(l)}) = \int_X P(w; \mathrm{d}x_1) \int_X P(u(w; x_1); \mathrm{d}x_2) \dots$$

$$\dots \int_X P(u(w; x^{(l-1)}); \mathrm{d}x_l)\, I_{A^{(l)}}(x_1 \dots x_l)$$

unde $I_{A^{(l)}}$ este funcția caracteristică a mulțimii $A^{(l)}$;

$$P_l^n(w; A^l) = P_{n+l-1}(w; X^{(n-1)} \times A^{(l)}).$$

Aceste noțiuni fiind introduse se poate demonstra următoarea teoremă de existență:

Teorema de existență ([6]). *Fiecărui sistem aleator cu legături complete omogen* $\{(W, \mathfrak{W}), (X, \mathfrak{X}), u; P\}$ *și fiecărui* $w_0 \in W$ *fixat, i se poate asocia un spațiu probabilist* $(\Omega, \mathfrak{K}, P_{w_0})$ *și*

un șir de variabile aleatoare $(\xi_n)_{n \in N^*}$ *definite pe acest spațiu și cu valori în* X, *astfel încît*

1) $P_{w_0}\{[\xi_n, \dots, \xi_{n+l-1}] \in A^{(l)}\} = P_l^n(w; A^{(l)})$,

$$P_{w_0}\{[\xi_{n+m} \dots \xi_{n+m,\, l-1}] \in A^{(l)} \mid \xi^{(n)}\} = P_l^m(u(w_0; \xi^{(n)}); A^{(l)}); P_{w_0} a; s)$$

pentru orice

$$l, m, n \in N^*, \quad A^{(l)} \in \mathfrak{X}^{(l)}, \text{ unde } \xi^{(n)} = (\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n).$$

2) *Șirul de variabile aleatoare* $(\zeta_n)_{n \in N}$ *cu valori în* W *definite prin relațiile*

$$\zeta_0 \equiv w_0, \quad \zeta_n = u(w_0; \xi^{(n)}), \quad x \in N^*$$

formează un lanț Markov omogen cu repartiția inițială concentrată în w_0 *și operatorul de trecere definit de relația*

$$(Uf)(w) = \int_X P(w; \mathrm{d}x) f(x),$$

pentru orice $f : X \to R$ *mărginită și* $(\mathfrak{W}, \mathfrak{R})$ *măsurabilă.*

3) *Șirul de vectori aleatori* $(\zeta_n')_{n \in N^*} = (\xi_n, \zeta_n)_{n \in N^*}$ *cu valori în* $X \times W$, *formează un lanț Markov omogen cu operatorul de trecere* U' *definit de relația*

$$(U'f)(x; w) = \int_X P(w; \mathrm{d}x_1) f(x_1, u(w; x_1)),$$

pentru orice $f : X \times W \to R$ *mărginită și* $(\mathfrak{X} \times \mathfrak{W}, \mathfrak{R})$ *măsurabilă.* Se observă ușor că un lanț cu legături complete este un caz particular de sistem aleator cu legături complete pentru care $X = \{1, 2, \dots, m+1\}$

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{Z}(X), \quad W = \Delta =$$

$$= \left\{ p = (p_1, p_2, \dots, p_{m+1}) : 0 \leqslant p_i \leqslant 1, \sum_{i=1}^{m+1} p_i = 1 \right\}$$

$\mathfrak{W}$ = σ-algebra mulțimilor boreliene pe mulțimea $\Delta \subset R^{(m+1)}$, $u(p; i) = \Phi_i(p)$ și $P(p; i) = p_i$, unde p_i este componența i a vectorului p.

Se poate arăta de asemenea că orice lanț Markov multiplu de multiplicitate k este un caz particular de sistem aleator cu

legături complete în care $(X, \mathfrak{X})$ este spațiul stărilor lanțului Markov considerat, $(W, \mathfrak{W}) = (X^{(K)}, \mathfrak{X}^{(K)})$, $u(w, x) = u([x_1, ..., x_k]; x) = [x_2, x_3, ..., x_k, x]$, iar $P(w; A) = P([x_1, ..., x_k]; A)$ este funcția de trecere a lanțului Markov considerat.

3. *Ergodicitate.* D e f i n i ț i a 2. *Un sistem aleator cu legături complete omogen* $\{(W, \mathfrak{W}), (X, \mathfrak{X}), u, P\}$ *se numește uniform ergodic dacă pentru fiecare* $l \in N^*$ *există o funcție de mulțime* $P_l^\infty : \mathfrak{X}^{(l)} \to R$ *astfel încît*

$$\varepsilon_n = \sup_{\substack{w \in W \\ A^{(l)} \in \mathfrak{X}^{(l)} \\ l \in N^*}} | P_l^n(w; A^{(l)}) - P_l^\infty(A^{(l)}) | \to 0$$

cînd $n \to \infty$, *sau echivalent*

$$| P_w\{[\xi_n, \xi_{n+1} \dots \xi_{n+l-1}] \in A^{(l)}\} - P_l^\infty(A^{(l)}) | \to 0$$

cînd $n \to \infty$, *uniform în* $w \in W$, $A^{(l)} \in \mathfrak{X}^{(l)}$, $l \in N^*$.

Rezultă imediat din teorema Vitali-Hahn-Saks că P_l^∞ este o probabilitate pe $(X^{(l)}, \mathfrak{X}^{(l)})$.

Pentru a pune în evidență proprietățile de bază care rezultă din ipoteza de ergodicitate avem nevoie de noțiunea de φ-mixing.

D e f i n i ț i a 3. ([9]). *Un șir de variabile aleatoare* $(\xi_n)_{n \in N^*}$ *definite pe un spațiu probabilist* $(\Omega, \mathfrak{K}, P)$ *se numește* φ*-mixing dacă există un șir de numere* $\varphi_P^{(n)} \to 0$, *astfel încît*

$$| P(A \cap B) - P(A)\, P(B) | \leqslant \varphi_P^{(n)} P(A),$$

pentru orice $A \in \mathfrak{K}_{[1, k]}$, $B \in \mathfrak{K}_{[k+n, \infty)}$, $n, k \in N^*$, *unde* $\mathfrak{K}_{[m, n]}$ *este* σ*-algebra generată de variabilele* $\xi_m, \xi_{m+1}, ..., \xi_n$ *sau echivalent*

$$| P(B\, \mathfrak{K}_{[1, k]}) - P(B) | \leqslant \varphi_P^{(n)},$$

pentru orice $n, k \in N^*$, $B \in \mathfrak{K}_{[n+k, \infty)}$).

Următoarea lemă este o consecință directă a Definiției 3.

L e m a 1. σ*-algebra coadă* $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}_{[n, \infty)}$ *a unui șir de variabile aleatoare* φ*-mixing este trivială, adică*

$$P(A) = 0 \text{ sau } 1$$

pentru orice $A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}_{[n, \infty)}$.

Rezultatele din teorema următoare, datorate lui H. Cohn [3] și G. Theiler [11] stau la baza demonstrării teoremelor limită prin punerea în evidență a unei probabilități P_∞, în raport cu care șirul $(\xi_n)_{n \in N^*}$ este strict staționar și prin legătura strînsă care există între P_w și P_∞.

Teorema 2. *Pentru un sistem aleator cu legături complete omogen uniform ergodic există o probabilitate* P_∞ *pe spațiul* $(\Omega, \mathfrak{K})$, *astfel încît*

1) $P_\infty\{[\xi_1, ..., \xi_l] \in A^{(l)}\} = P_l^\infty(A^{(l)},)$

pentru orice $l \in N^*$, $A^{(l)} \in \mathfrak{X}^{(l)}$;

2) Șirul $(\xi_n)_{n \in N^*}$ este strict staționar în raport cu P_∞.

3) $| P_w(A) - P_\infty(A) | \leqslant \varepsilon_n$,

pentru orice $w \in W$, $x \in N^*$, $A \in \mathfrak{K}_{[n, \infty)}$ și deci

$$P_w(A) = P_\infty(A),$$

pentru orice $A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}_{[n, \infty)}$, — σ-algebra coadă a lui $(\xi_n)_{n \in N^*}$.

4) Șirul $(\xi_n)_{n \in N^*}$ este φ-mixing atît în raport cu P_∞ cît și în raport cu P_w pentru orice $w \in W$; în fapt se poate lua

$$\varphi_{P_\infty}^{(n)} = \varphi_\infty^{(n)} = \varepsilon_n \quad \text{și} \quad \varphi_{P_w}^{(n)} = \varphi_w^{(n)} = \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}.$$

5) σ-algebra coadă $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}_{[n, \infty)}$ este trivială atît în raport cu P_∞ cît și în raport cu P_w, $w \in W$.

În continuare vom considera date funcțiile

$$\Psi : X^{(k_0)} \to R, \quad k_0 \in N^* \text{ dat},$$

Ψ fiind $(\mathfrak{X}^{(k_0)}, \mathfrak{R})$ măsurabilă și

$$\Phi : X^{(N^*)} \to R,$$

Φ fiind $(\mathfrak{X}^{(N^*)}, \mathfrak{R})$ măsurabilă.

Să definim

$$f_n = \Psi \circ [\xi_n, \xi_{n+1}, ..., \xi_{n+k_0-1}]$$

și

$$g_n = \Phi \circ [\xi_n, \xi_{n+1}, ...],$$

pentru orice $n \in N^*$.

Evident, şirurile $(f_n)_{n\in N^*}$ şi $(g_n)_{n\in N^*}$ sînt staţionare în raport cu P_∞. De asemenea, şirul $(f_n)_{n\in N^*}$ este φ-mixing în raport cu P_∞ şi P_w, $w\in W$. În acest caz,

$$\varphi_\infty^{(n)} = \begin{cases} \varepsilon_n - k_0 \text{ pentru } & n \geqslant k_0 \\ 1 \quad \text{pentru } & n < k_0 \end{cases}$$

$$\varphi_w^{(n)} = \begin{cases} \varepsilon_{n-k_0} + \varepsilon_{n+1-k_0} & \text{pentru } n \geqslant k_0. \\ 1 & \text{pentru } n < k_0. \end{cases}$$

Evident, şirurile $(f_n)_{n\in N^*}$ şi $(g_n)_{n\in N^*}$ nu sînt staţionare în raport cu P_w, iar şirul $(g_n)_{n\in N^*}$ nu este φ-mixing nici în raport cu P_∞ nici în raport cu P_w, $w\in W$.

Următoarea teoremă este o consecinţă imediată a teoremei ergodice a lui Birkoff şi a teoremei 2.

Teorema 3. *Pentru un sistem aleator cu legături complete uniform ergodic, şirurile* $(f_n)_{n\in N^*}$ *şi* $(g_n)_{n\in N^*}$ *se supun legii tari a numerelor mari atît în raport cu* P_∞ *cît şi în raport cu* P_w, $w\in W$, *adică* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i$ *şi* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i$ *converg a.s. în raport cu* P_w *şi* P_∞ *respectiv către* $\int_{X^{(k_0)}} \Psi P_{k_0}^{\infty}$ *şi* $\int_{X^{(N^*)}} \Phi \, dP_\infty$ *dacă şi numai dacă avem respectiv* $\int_{X^{(k_0)}} |\Psi| \, dP_{k_0}^{\infty} < \infty$ *şi* $\int_{X^{N^*}} |\Phi| \, dP_\infty < \infty$.

4. *Teorema limită centrală.* Să considerăm mai întîi şirul $(f_n)_{n\in N^*}$ şi să presupunem, fără a restrînge generalitatea că $E_\infty(f_1) = 0$.

Să notăm $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$, $n\in N^*$ şi să definim un element aleator X_n al spaţiului $D[0, 1]$ prin

$$X_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

unde $\sigma > 0$ este o constantă definită mai jos.

Teorema 4 ([9]). *Să presupunem că pentru un sistem aleator cu legături complete uniform ergodic* $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{1/2} < \infty$ *şi pentru un* $w_0\in W$, *avem* $\liminf_{n\to\infty} E_{w_0}(f_n^2) < \infty$. *Atunci seria*

$$\sigma^2 = E_\infty(f_1^2) + 2\sum_{k=1}^{\infty} E_\infty(f_1 f_{k+1})$$

este absolut convergentă; dacă $\sigma^2 > 0$, atunci

$$X_n \xrightarrow{\mathfrak{D}_{P_w}} W \text{ cînd } n \to \infty,$$

unde „$\xrightarrow{\mathfrak{D}_{P_w}}$" *reprezintă convergenţa în distribuţie pe spaţiul* $D[0, 1]$ *corespunzătoare probabilităţii* P_w *iar* W *este mişcarea browniană standard pe spaţiul* $D[0, 1]$.

Demonstraţie. Din condiţia de ergodicitate uniformă rezultă că şirul de probabilităţi $(P_w \circ f_n^{-1})_{n\in N^*}$ este slab convergent şi are limita $P_\infty \circ f_1^{-1}$. Pe baza lemei lui Fatou referitoare la convergenţa slabă şi din ipoteza că $\liminf_{n\to\infty} E_{w_0}(f_n^2) < \infty$ rezultă că $E_\infty(f_1^2) < \infty$. De asemenea condiţia $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{1/2} < \infty$ implică că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_\infty^{1/2}(n) < \infty.$$

Prin urmare pentru şirul $(f_n)_{n\in N^*}$ considerat pe spaţiul probabilist $(\Omega, \mathfrak{K}, P_\infty)$ poate fi aplicată Teorema 20.1 din [1] pentru a obţine convergenţa seriei din enunţul teoremei iar în cazul $\sigma^2 > 0$

$$\mathbf{X} \xrightarrow{\mathfrak{D}_{P_\infty}} \mathbf{W}.$$

cînd $n \to \infty$.

Să definim un nou element aleator $\mathbf{X}_n'$ prin relaţia

$$X_n'(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=p_n}^{[nt]} f_i, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

unde $p_n \to \infty$ în aşa fel ca $\frac{p_n}{\sqrt{n}} \to 0$. $\left(X_n'(t) = 0 \text{ dacă } t < \frac{p_n}{n}\right)$.

Dar

$$d(\mathbf{X}_n\mathbf{X}'_n) = \sup_{t\in[0,\,1]} |X_n(t) - X'_n(t)| = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{1\leqslant i\leqslant p_n} |S_i| \leqslant \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{p_n} |f_i| =$$

$$= \frac{p_n}{\sigma\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{p_n} \sum_{i=1}^{p_n} |f_i|.$$

Dar pe baza teoremei 2

$\frac{1}{p_n} \sum_{i=1}^{n} |f_i| \to E_\infty |f_1|$ a.s. în raport cu P_∞ și P_w pentru fiecare $w \in W$.

Prin urmare, $d(\mathbf{X}_n, \mathbf{X}'_n) \to 0$ cînd $n \to \infty$ în probabilitate P_∞ și P_w pentru fiecare $w \in W$.
Așadar,

$$\mathbf{X}'_n \xrightarrow{\mathfrak{D}_{P_\infty}} \mathbf{W}$$

cînd $n \to \infty$.
Ținînd cont de definiția lui $\mathbf{X}'_n$, observăm că

$$(\mathbf{X}'_n)^{-1}(A) \in \mathfrak{K}_{[p_n,\,\infty]},$$

pentru orice $A \in \mathfrak{D}\,[0, 1]$ și deci

$$|P_w\{\mathbf{X}'_n \in A\} - P_\infty\{\mathbf{X}'_n \in A\}| \leqslant \varepsilon_{p_n}.$$

În această relație făcînd $n \to \infty$ obținem imediat că

$$\lim_{n\to\infty} P_w\{\mathbf{X}'_n \in A\} = \mathbf{W}(A),$$

pentru orice $A \in \mathfrak{D}[0, 1]$ cu $\mathrm{W}(\partial A) = 0$, unde ∂A este frontiera lui A. Prin urmare,

$$X'_n \xrightarrow{\mathfrak{D}_{P_w}} W$$

cînd $n \to \infty$. Deoarece $d(\mathbf{X}_n, \mathbf{X}'_n) \to 0$ în probabilitate P_w, rezultă imediat că

$$\mathbf{X}_n \xrightarrow{\mathfrak{D}_{P_w}} \mathbf{W}$$

cînd $n \to \infty$, și teorema a fost demonstrată.

5. *Consecințe ale teoremei limită centrală.* Următoarele corolare sînt consecințe imediate ale teoremei limită centrală a teoremei referitoare la transportul convergenței slabe și a proprietăților mișcării browniene.

a) Teorema limită centrală

Corolarul 1. *În condițiile Teoremei* 4,

$$\lim_{n\to\infty} P_w\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t,$$

(vezi de asemenea [3]).

b) Repartiția limită a maximelor și minimelor șirului de sume parțiale.

Să definim $m_n = \min_{0\leqslant i\leqslant n} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_i$, $M_n = \max_{0\leqslant i\leqslant n} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_i$ și $\overline{M}_n =$

$$= \max_{0\leqslant i\leqslant n} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} |S_i|.$$

Corolarul 2. *În condițiile Teoremei 4 distribuția limită a vectorului* (m_n, M_n, S_n) *și repartițiile sale marginale sînt date de*

$$\lim_{n\to\infty} P_w\{a < m_w \leqslant M_n < b,\ u < S_n < v\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u+2k(b-a)}^{v+2k(b-a)} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{2b-v+2k(b-a)}^{2b-u+2k(b-a)} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t,$$

pentru orice

$$a \leqslant 0 \leqslant b \quad \text{și} \quad a \leqslant u < v \leqslant b;$$

$$\lim_{n\to\infty} P_w\{M_n < b,\ u < S_n < v\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^v \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{2b-v}^{2b-u} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t,$$

pentru orice $u < v \leqslant b$, $b \geqslant 0$;

$$\lim_{n\to\infty} P_w\{M_n < b\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^b \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t,$$

pentru orice $b \geqslant 0$ și

$$\lim_{n\to\infty} P_w\{\overline{M}_n < b\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(2k-1)b}^{(2k+1)b} e^{-t^2/2}\, dt =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} e^{-\pi^2(2k+1)^2/8b^2},$$

pentru orice $b > 0$, (vezi de asemenea [6]).

c) Legea arcsinusului.

Să definim

$$T_n = \max\{i,\ 1 \leqslant i \leqslant n;\ (S_i = 0) \cup (S_{i-1} > 0 > S_i) \cup (S_{i-1} < 0 < S_i)\},$$

(T_n este ultima oară cînd șirul $S_0, S_1, \ldots, S_n$ intersectează axa Ox).

U_n = numărul acelor i : $1 \leqslant i \leqslant n$ pentru care $S_i > 0$;

V_n = numărul acelor i, $1 \leqslant i \leqslant T_n$ pentru care S_i;

$$\tau_n = \min\{k : 1 \leqslant k \leqslant n:\ S_k = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} S_i\}.$$

Corolarul 3. *În condițiile Teoremei 4, avem*

i) $\lim_{n\to\infty} P_w\{T_n \leqslant n\alpha\} = \frac{2}{\pi} \arcsin\sqrt{\alpha},\ \alpha \in [0, 1]$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} P_w\{U_n \leqslant n\alpha\} = \frac{2}{\pi} \arcsin\sqrt{\alpha},\ \alpha \in [0, 1]$;

iii) $\lim_{n\to\infty} P_w\{\tau_n \leqslant n\alpha\} = \frac{2}{\pi} \arcsin\sqrt{\alpha},\ \alpha \in [0, 1]$;

iv) Distribuția condiționată limită a lui V_n date fiind T_n și S_n este distribuția uniformă pe $[0, T_n]$;

v) Distribuția condiționată limită a lui U_n dat fiind că $T_n = k$ și $S_n = x$ este distribuția uniformă pe $[n-k, n]$ dacă $x > 0$ și distribuția uniformă pe $[0, k]$ dacă $x < 0$.

Teorema 5. ([9]). *Teorema 4 rămîne adevărată dacă* P_w *este înlocuită cu o probabilitate arbitrară* P *absolut continuă în raport cu* P_w.

Teorema 6 ([9]). *În ipotezele Teoremei 3, dacă* $(\nu_n)_{n\in N^*}$ *sînt variabile aleatoare definite pe* $(\Omega, \mathfrak{K}, P_w)$ *și iau valori întregi pozitive în așa fel încît* $\frac{\nu_n}{a_n} \to \theta$ *în probabilitate* P_w, *unde* θ *este o variabilă aleatoare pozitivă și* $a_n \in N$, $a_n \to \infty$, *atunci*

$$\mathbf{U}_n \xrightarrow{\mathfrak{D}_{P_w}} \mathbf{W}$$

cînd $n \to \infty$, *unde* $\mathbf{U}_n$ *este definit prin relația*

$$U_n(t, w) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\nu_n(\omega)}} S_{[\nu_n(\omega)\, t]}\ (w),\quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Pentru teorema următoare vom presupune că funcția Ψ din definiția șirului $(f_n)_{n\in N^*}$ este pozitivă și deci $\mu = E_\infty f_1 > 0$.

Fie ν_t numărul de reînnoiri pînă la momentul t al șirului $(f_n)_{n\in N^*}$, adică

$$\nu_t(\omega) = \max\{k : S_k(\omega) \leqslant t\},\ t \geqslant 0,$$

$$(\nu_t(\omega) = 0 \text{ dacă } f_1(\omega) > t).$$

Să definim un element aleator $\mathbf{Z}_n$ al lui $D[0, 1]$ prin relația

$$Z_n(t, \omega) = \frac{\nu_{nt}(\omega) - nt\,\mu^{-1}}{\sigma\mu^{-3/2}\sqrt{n}},\quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Teorema 7 ([9]). *În condițiile Teoremei 4,*

$$Z_n \xrightarrow{\mathfrak{D}_P} \mathbf{W}$$

cînd $n \to \infty$.

În încheierea acestei secțiuni menționăm că teoreme analoage Teoremei 4 pot fi demonstrate și pentru șirul $(g_n)_{n\in N^*}$, în ipoteza suplimentară că g_1 este „aproximată suficient de bine" prin funcții finit dimensionale (vezi [9]).

6. *Convergența procesului empiric.* În această secțiune vom presupune că funcția Ψ ia valori în $[0, 1]$, (aceasta poate fi obținută printr-o transformare convenabilă) astfel încît $0 \leqslant f_n(\omega) \leqslant 1$ pentru orice $n \in N^*$ și $\omega \in \Omega$.

Funcția empirică de repartiție $F_n(t, \omega)$ corespunzătoare punctelor $f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots, f_n(\omega)$ este definită prin relația

$$F_n(t, \omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I_{[0,t]} \circ f_k(\omega), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

unde I_A este indicatorul mulțimii A.

Fie Y_n un element aleator al lui $D[0, 1]$ definit prin

$$Y_n(t, \omega) = \sqrt{n}\,[F_n(t, \omega) - F_\infty(t)],$$

unde $F_\infty(t) = P_\infty(f_1 \leqslant t)$.

Teorema 8 ([9]). *Să presupunem că pentru un sistem aleator cu legături complete uniforme ergodic $\varepsilon_n = O(n^{-2})$ și F_∞ este continuă pe* [0, 1]. *Atunci*

$$\mathbf{Y}_n \xrightarrow{\mathfrak{D}_{P_w}} \mathbf{Y},$$

unde Y este un proces gaussian cu traiectorii continue determinat prin condițiile

$$E(Y(t)) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

și

$$E(\mathbf{Y}(s)\,\mathbf{Y}(t)) = E_\infty(g_s(f_1)\,g_t(f_1)) + \sum_{k=1}^{\infty} E_\infty(g_s(f_1)\,g_t(f_{k+1})) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} E_\infty(g_s(f_{k+1})\,g_t(f_1)),$$

unde $g_t(\alpha) = I_{[0,t]}(\alpha) - F_\infty(\alpha)$ și seriile de mai sus sînt absolut convergente.

Demonstrație. Să observăm că Y_n poate fi scris și sub forma

$$Y_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\infty} g_t(f_k).$$

Să definim un nou element aleator Y_n' al lui $D[0, 1]$ prin

$$Y_n'(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=p_n}^{n} g_t(f_k),$$

unde $p_n \to \infty$, astfel încît $p_n/\sqrt{n} \to 0$.

Dar

$$d(\mathbf{Y}_n, \mathbf{Y}_n') = \sup_{t \in [0,1]} |\, Y_n(t) - Y_n'(t)\,| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{t \in [0,1]} \left| \sum_{k=1}^{p_n - 1} g_t(f_k) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{t \in [0,1]} \sum_{k=1}^{p_n - 1} |g_t(f_k)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{p_n - 1} [I_{[0,t]} \circ f_k + F_\infty(t)] \leqslant \frac{2(p_n - 1)}{\sqrt{n}} \to 0$$

cînd $n \to \infty$.

Prin urmare $d(\mathbf{Y}_n \mathbf{Y}_n') \to 0$ în probabilitate P_∞ și P_w pentru fiecare $w \in W$.

Șirul $(f_n)_{n \in N^*}$ este φ-mixing și strict staționar în raport cu P_∞. În plus, condiția $\varepsilon_n = O(n^{-2})$ implică $\varphi_\infty^{(n)}(n) = O(n^{-2})$. Rezultă din [12] că

$$\mathbf{Y}_n \xrightarrow{\mathfrak{D}_{P_w}} \mathbf{Y} \quad \text{cînd } n \to \infty.$$

Din acest moment demonstrația este similară demonstrației Teoremei 4 și detaliile nu vor mai fi date.

Observație. Găsirea repartițiilor limite ale statisticilor lui Kolmogorov și Smirnov (referitoare la testele Kolmogorov și Smirnov) revine la calculul repartițiilor lui $\sup_{t \in [0,1]} |\, Y(t)\,|$ și $\sup_{t \in [0,1]} Y(t)$, unde $Y(t)_{t \in [0,1]}$ este un proces gaussian centrat cu covarianta dată și traiectorii continue. Această problemă nu este încă rezolvată (vezi [4], p. 4).

BIBLIOGRAFIE

[1] R. BILLINGSLEY, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1968.

[2] G. CIUCU, R. THEODORESCU, *Procese cu legături complete*, Editura Academiei, București, 1960.

[3] H. COHN, *Teorema limită pentru procese stochastice*, Stud. Cercet. Mat., 18, 993–1027 (1966).

[4] X. FERNIQUE, *Regularité des trajectories des fonctions aléatoires gaussiennes*, Ecole d'été, Calcul des Probabilitées, St. Flour., 1974.

[5] M. IOSIFESCU, *Sisteme aleatoare cu legături complete cu o mulțime arbitrară de stări*, Rev. Math. Pures Appl., 8, 611–645; 9, 91–92 (1963) (în limba rusă).

[6] M. IOSIFESCU, R. THEODORESCU, *Random processes and learning*, Springer Verlag, Berlin, 1969.
[7] O. ONICESCU, GH. MIHOC, *Sur les chaînes statistiques*, C.R. Acad. Sci., Paris, 200, 511–512 (1935).
[8] O. ONICESCU, GH. MIHOC, *Sur les chaînes de variables statistiques*, Bull. Sci. Math., 59, 174–192 (1935).
[9] GH. POPESCU, *Comportament asimptotic pentru sisteme aleatoare cu legături complete* (Teză de doctorat), București, 1974.
[10] IDEM, *Functional limit theorems for random systems with complete connections*, Proc. Vth Conference on Probability Theory, Editura Academiei, București, 1976.
[11] G. THEILER, *Uniformly ergodic stochastic processes with discret parameter*, Rev. Math. Pures Appl., 12, 191–223 (1967).
[12] KEN-ICHI YOSHIHARA, *Extention of Billingsley's Theorems on weak convergence of empirical processes*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebite, 29, 87–92 (1974).

3. Procese semi-Markov

1. *Introducere.* Procesele semi-Markov reprezintă o generalizare atît a lanțurilor Markov, cît și a proceselor Markov cu o mulțime numărabilă de stări. Aceste procese au fost introduse independent de P. Lévy, W. L. Smith și L. Takacs în 1954.

Intuitiv, un proces semi-Markov cu o mulțime numărabilă de stări este un proces stochastic pentru care stările succesive vizitate formează un lanț Markov iar timpul aleator petrecut într-o stare are o funcție de distribuție care depinde atît de starea prezentă cît și de starea de care urmează a fi vizitată.

Fie $(\Omega, \mathfrak{F})$ și $(E, \mathcal{S})$ două spații măsurabile astfel încît $\{x\} \in \mathcal{S}$ pentru orice $x \in E$ iar $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{C})$, unde $\mathcal{C}$ este o anumită topologie pe E. Presupunem că, pentru fiecare pereche (x, s) $(x \in E,\ s \in R_+)$, este dată o probabilitate pe $\mathfrak{F}$, pe care o vom nota $\mathbf{P}_{(x,s)}$.

Pentru fiecare $t \geqslant 0$ fie

$$Z_t : (\Omega, \mathfrak{F}) \to (E, \mathcal{S})$$

și

$$\mathfrak{F}_t = \sigma\,(Z_s,\ s \leqslant t)$$

Definiția 1. *Un proces* $(Z_t)_{t \in R_+}$ *este numit proces în salturi dacă pentru fiecare* $t \geqslant 0$ *și* $\omega \in \Omega$ *există* $\delta_t(\omega) > 0$, *astfel încît* $Z_s(\omega) = Z_t(\omega)$, *pentru orice* $s \in (t,\ t + \delta_t(\omega))$. Dacă $(Z_t)_{t \in R_+}$ este un proces în salturi, definim

$$U_t(\omega) = \begin{cases} t + T_0 & \text{dacă } Z_s(\omega) = Z_t(\omega) \text{ pentru toți } 0 \leqslant s \leqslant t \text{ (adică dacă pînă la momentul, } t \text{ procesul n-are nici un salt)} \\ t - \sup\ \{s\,;\ 0 \leqslant s \leqslant t,\ Z_s(\omega) \neq Z_t(\omega)\} & \text{în caz contrar,} \end{cases}$$

unde $T_0 : (\Omega, \mathfrak{F}_0) \to (\mathbf{R}_+, \mathcal{R}_+)$ altfel arbitrară

Notăm $T = \inf\ \{t > 0\,;\ U_t = 0\}$.

Definiția 2. $(Z_t, U_t, \mathfrak{F}_t, P_{(x,s)})$ *este numit proces semi-Markov, cu spațiul stărilor* $(E, \mathcal{S})$ *dacă* (Z_t) *este un proces în salturi, continuu la dreapta și dacă procesul* $((Z_t, U_t), \mathfrak{F}_t, P_{(x,s)})$ *este un proces tare Markov, omogen, cu spațiul stărilor* $(E \times R_+, \mathcal{S} \times \mathcal{R}_+)$, *astfel ca funcția sa de trecere* $P(t, \alpha, c)$ $(t \geqslant 0,\ \alpha \in E \times R_+, C \in \mathcal{S} \times \mathcal{R}_+)$ *este măsurabilă în cuplul* (t, α) *pentru fiecare* $C \in \mathcal{S} \times \mathcal{R}_+$,
iar

$$\mathbf{P}_{(x,s)}(Z_T \in A,\ T \leqslant t) = \mathbf{P}_{(x,0)}(Z_T \in A,\ T \leqslant t - s) \qquad (1)$$

pentru orice $x \in E$, $A \in \mathcal{S}$, $s, t \in R_+$.

Dacă, pentru orice $\omega \in \Omega$, mulțimea punctelor de salt ale traiectoriei lui ω nu are puncte de acumulare, procesul semi-Markov se numește regulat (t se numește punct de salt pentru traiectoria lui ω dacă $Z_{t-0}(\omega) \neq Z_t(\omega)$.

Vom presupune în cele ce urmează că

$$\mathfrak{F} = \sigma(Z_t,\ t \geqslant 0)$$

2. *Proprietăți generale și existență.* Vom introduce următoarele notații:

$T_1, T_2, \ldots$ momentele succesive de salt ale procesului semi-Markov, adică

$$T_1 = T,\ T_n = T_{n-1} + \theta_{T_{n-1}} T \quad (n > 1),$$

unde θ_0 este operatorul de translație corespunzător procesului Markov (Z_t, U_t);

$$X_n = T_n - T_{n-1} (n \geqslant 1),\ X_0 = T_0;$$

$$\mathfrak{N}_n = \mathfrak{F}_{T_n} (n \geqslant 1),\ \mathfrak{N}_0 = \mathfrak{F}_0,\ \mathfrak{N}_\infty = \sigma(Z_{T_n}, n \geqslant 0);$$

$$Q(x, t, A) = \mathbf{P}_{(x,0)}(Z_T \in A,\ T \leqslant t),\ (s, t \in R_+,\ x \in E,\ A \in \mathcal{S});$$

$$Z_{T_n} = J_n (n \geqslant 1),\ J_0 = Z_0.$$

Variabilele T_1, $T_2 =$, ... sînt evident timpi markovieni pentru procesul (Z_t, U_t) iar $Z_{T_n} = 0 (n \geqslant 1)$ conform relației (1)

$$\mathbf{P}_{(x,s)}(Z_T \in A,\ T \leqslant t) = Q(x, t-s, A).$$

Dacă procesul semi-Markov este regulat, atunci $T_n \to \infty$ cînd $n \to \infty$.

În cele ce urmează vom presupune că procesul semi-Markov este regulat.

Teorema 1. i) *Procesul* $(J_n, \mathfrak{N}_n, P_{(x,s)})$ *este un lanț Markov cu spațiul stărilor* $(E, \mathcal{E})$, *avînd funcția de trecere după un pas*

$$p(x, A) = Q(x, \infty, A);$$

ii) *Procesele* $((J_n, X_n), \mathfrak{N}_n, \mathbf{P}_{(x,s)})$ *și* $((J_n, T_n), \mathfrak{N}_n, \mathbf{P}_{(x,s)})$ *sînt lanțuri Markov cu spațiul stărilor* $(E \times R_+, \mathcal{E} \times \mathcal{R}_+)$ *și cu funcțiile de trecere după un pas date de relațiile*

$$\mathbf{P}_{(x,s)}(J_n \in A,\ X_n \leqslant t,\ \mathfrak{N}_{n-1}) = Q(J_{n-1}, t, A). \tag{2}$$

$$\mathbf{P}_{(x,s)}(J_n \in A,\ T_n \leqslant t \mid \mathfrak{N}_{n-1}) = Q(J_{n-1},\ t - T_{n-1},\ A) \tag{3}$$

Observație. Relația (2) arată că procesul (J_n, X_n) este un proces de tip $J - X$ după o terminologie utilizată de mai mulți autori (de ex. O'Brien în 1973).

Vom da acum o teoremă de existență pentru procesele semi-Markov.

Definiția 3. *O funcție* $F : R \to R$ *este numită funcție de masă dacă este nedescrescătoare, continuă la dreapta, astfel încît*

$$F(\infty) \leqslant 1.$$

Definiția 4. *Dacă* $p(x, A)$ *este un nucleu Markov pe spațiul măsurabil* $(E, \mathcal{E})$ $(x \in E,\ A \in \mathcal{E})$ *și*

$$F_{x,y}(\cdot) : R \to [0, 1] \quad (x, y \in E)$$

este o familie de funcții cu proprietățile

i) $F_{x,y}(\cdot)$ *este o funcție de masă pentru orice* $x, y \in E$ *și* $F_{x,y}(t) = 0$ *pentru* $t \leqslant 0$;

ii) *Pentru orice* $t \in R$ *fixat,* $F_{x,y}(t)$ *este* $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ *— măsurabilă ca funcții de* (x, y) *iar* $F_{x,y}(\infty) = 1$, *atunci funcția* $Q : E \times R \times \mathcal{E} \to [0, 1]$ *definită prin* $Q(x, t, A) = \int_A F_{x,y}(t)\, p(x, \mathrm{d}y)$

se numește nucleu semi-Markov. Dacă E *este cel mult numerabilă, nucleul semi-Markov se numește matrice semi-Markov.*

Nucleul Markov $(p(x, s);\ A \times [0, t]) = Q(x, t - s, A)$ $((x, s) \in E \times R_+,\ A \in \mathcal{E})$ determină un lanț Markov $((J_n, T_n), \mathfrak{N}_n, \mathbf{P}_{(x,s)})$ pe un spațiu măsurabil $(\Omega, \mathfrak{N})$ și cu spațiul stărilor $(E \times R_+, \mathcal{E} \times \mathcal{R}_+)$

Fie $X_n = T_n - T_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$, $X_0 = T_0$,

$$N(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x_1 > t \\ \sup\{n \geqslant 1;\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant t\} & \text{dacă } x_1 \leqslant t \end{cases} \tag{4}$$

$$Z_t = J_{N(t)} (t \geqslant 0)$$

$$U_t = \begin{cases} t + T_0 & \text{dacă} \\ t - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{N(t)} & \text{dacă } t \geqslant x_1 \end{cases}$$

Teorema 2. *Procesul* $(Z_t, U_t, \mathfrak{F}_t, \mathbf{P}_{(x,s)})$ *este un proces semi-Markov cu spațiul stărilor* $(E, \mathcal{E})$.

3. *Teoreme limită.* Fie φ o măsură oarecare pe spațiul măsurabil $(E, \mathcal{E})$. (dacă E este cel mult numerabilă se consideră că φ este măsura care asociază fiecărui punct masa 1).

Fie $\mathbf{P}(x, A)$ $(x \in E,\ A \in \mathcal{E})$ funcția de trecere după un pas a lanțului Markov (J_n) iar $\tau(A)$ momentul primei intrări a procesului (J_n) în mulțimea $A \in \mathcal{E}$, adică

$$\tau(A) = \inf\{n \geqslant 1;\ J_n \in A\}.$$

Fie de asemenea ${}_A\mathbf{P}(x, A)$ probabilitatea ca procesul să viziteze pentru prima dată mulțimea A la momentul n, adică

$${}_A\mathbf{P}^{(n)}(x, A) = \mathbf{P}_{(x,0)}(\tau(A) = n).$$

Definiția 5. *Procesul Markov* (J_n) *va fi numit uniform* φ*-recurent dacă pentru orice mulțime* $A \in \mathcal{E}$ *cu* $\varphi(A) > 0$,

$$\sum_{m=1}^{n} = {}_A\mathbf{P}(x, A) \to 1 \quad \textit{uniform în } x \textit{ cînd } n \to \infty.$$

În legătură cu lanțurile Markov uniforme se poate demonstra următoarea teoremă:

Teorema 3. *Dacă procesul* (J_n) *este uniform* φ*-recurent atunci el admite o măsură probabilistică invariantă unică* π. *Dacă în plus procesul este aperiodic, atunci există constantele* $a < \infty$ *și* $0 < \rho < 1$, *astfel încît, pentru orice probabilitate* μ *pe* $\mathcal{E}$,

$$\| (\mu - \pi)\, P^{(n)} \| \leqslant a \rho^n.$$

S-a notat cu $\mathbf{P}^{(n)}(x, A)$ probabilitatea de trecere după n paşi iar măsura $\mu\mathbf{P}^{(n)}$ este definită prin relaţia

$$\mu\mathbf{P}^{(n)}(A) = \int_E \mathbf{P}^{(n)}(x, A)\, \mu(dx)$$

Teorema următoare generalizează o teoremă cunoscută din teoria reînnoirii.

Teorema 4. *Presupunem că procesul (J_n) este uniform φ-recurent şi aperiodic. Fie π o probabilitate invariantă a procesului J_n (care există conform Teoremei 3).*

Presupunem de asemenea că

$$m = \pi E(x_1) > 0 \text{ şi } \pi E(x_1^2) < \infty.$$

Atunci seria

$$\sigma^2 = \pi E(x_1 - m)^2 + 2\sum_{k=2}^{\infty} \pi E[(x_1 - m)(x_k - m)]$$

este absolut convergentă şi dacă $\sigma^2 > 0$, atunci pentru orice probabilitate μ pe $\mathcal{S}$, avem

$$\mathbf{P}_{(x,0)} \circ \left[\frac{N(nt) - nt/\mu}{\sigma m^{-3/2}\sqrt{n}}\right] \Rightarrow \mathbf{W}. \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

unde $N(t)$ este cel definit de relaţia (4) iar $\mathbf{W}$ este măsura Wiener pe $C[0, 1]$.

BIBLIOGRAFIE

1. P. BILLINGSLEY, *Convergence of probability measures*, Wiley, New York, 1968.
2. S. GRIGORESCU, GH. OPRIŞAN, *Limit Theorems for J-X Processes with a General State Space*, Z. Wahr. verw. Gebiete, 35, 65–73 (1976).
3. GH. OPRIŞAN, *Teoreme limită pentru procese semi-Markov*, Centrul de statistică matematică, Bucureşti, 1974.
4. R. PYKE, *Markov Renewal Processes with finitely many state*, Am. Math. Stat., 32, 1243–1259 (1961).
5. J. YACKEL, *Limit Theorems for semi-Markov processes*, Trans. Amer. Math. Soc., 123, 402–424 (1966).

4. Principii de teoria aşteptării

Introducere. Teoria aşteptării ca teorie probabilistă, îşi are originea în colaborarea dintre economişti, ingineri şi probabilişti în vederea găsirii unor soluţii optime a problemei încărcării optime a unor centrale telefonice, astfel încît, cererile de servicii ale abonaţilor să fie cît mai prompt satisfăcute, dar în acelaşi timp şi capacitatea centralelor să fie cît mai bine folosită.

Primele lucrări în domeniul teoriei aşteptării sînt cele ale lui Erlang (1908), efectuate pentru compania de telefoane din Copenhaga. Au urmat apoi o serie de lucrări dintre care menţionăm pe cele ale lui Kolmogorov (*Sur le problème d'attente*), Hincin (*Model cu sosiri Poisson şi timp de aşteptare oarecare*), Molina, Fry, Crommelin.

Teoriile riguroase ale acestui nou domeniu sînt făcute pe modele diverse, sugerate de practică, dar pînă în prezent nu există o axiomatizare specifică şi nici un ansamblu de teoreme care să se identifice ca constituind teoria aşteptării.

Şirurile de aşteptare sau cozile sînt fenomene pe care noi le observăm frecvent în activitatea personală, dar ele se întîlnesc de asemenea în numeroase probleme economice, sociale, militare etc.

Caracteristicile unui fenomen de aşteptare sînt, în general, următoarele:

i) Sosirile unităţilor, la intervale de timp considerate în general aleatoare, într-un punct dat, numit centrul de servicii. Ca exemple menţionăm: sosirile camioanelor la o staţie de încărcare, intrarea clienţilor într-un magazin, sosirea vapoarelor într-un port etc.

Pentru fiecare model de aşteptare studiat se specifică legea de probabilitate a sosirilor. Printre modelele de aşteptare tratate în literatura de specialitate cele mai frecvente sînt acelea în care sosirile se supun unei legi exponenţiale sau Poisson.

ii) Timpul de serviciu necesar unei unităţi pentru a fi servită într-o staţie de serviciu.

Acest timp este considerat de asemenea aleator şi pentru fiecare model se specifică legea sa de probabilitate.

iii) Staţii de serviciu reprezentate de mecanismul care asigură servirea unităţilor.

În modelele de așteptare putem avea una sau mai multe stații de serviciu.

iv) Disciplina așteptării dată de regula după care se dispun unitățile în șirul de așteptare și ordinea în care sînt servite. În general în modelele de așteptare se consideră regula „primul venit, primul servit", dar există și modele cu serviri prioritare.

Într-un fenomen de așteptare se pot forma unul sau mai multe șiruri de așteptare.

Pentru a se forma un șir de așteptare este suficient ca sosirile și (sau) serviciile să se facă la intervale de timp neregulate. Șirul de așteptare se poate forma și în cazul sosirilor la intervale de timp egale, dacă durata servirii unei unități este mai mare decît intervalul de timp care separă sosirile.

În acest caz, șirul de așteptare crește indefinit. Un astfel de caz nu prezintă interes pentru teoria așteptării.

Ansamblul format din șirurile de așteptare și stațiile de serviciu constituie așa-numitul „sistem de așteptare".

Mărimile esențiale care intervin în studiul oricărui model de așteptare sînt următoarele:

$p_n(t)$ — probabilitatea ca în sistemul de așteptare să existe n unități la momentul t;

m — numărul de unități în ansamblul fenomenului, m putînd fi finit sau infinit;

n — numărul de unități în sistemul de așteptare;

ν — numărul de unități în șirurile de așteptare;

j — numărul de unități în curs de servire;

S — numărul de stații;

g — numărul de stații neocupate.

Mărimile n, ν și j variază în funcție de timp și sînt variabile aleatoare, legea lor de probabilitate urmînd a fi determinată. Desigur valorile medii ale acestor variabile vor prezenta importanță în aplicații.

Pentru a familiariza cititorul cu modul de abordare a unui model de așteptare, vom trata în cele ce urmează unul dintre modelele cele mai des întîlnite în aplicații.

A. Model de așteptare cu o singură stație de serviciu. Ecuațiile de stare ale modelului. Vom face următoarele ipoteze:

Sosirile sînt aleatoare, independente și se supun unei legi de repartiție exponențială negativă cu parametrul λ;

Serviciile sînt independente și timpul de serviciu urmează de asemenea o lege de repartiție exponențială negativă cu parametrul μ;

Sistemul de așteptare conține o singură stație de serviciu, iar o unitate după ce a fost servită părăsește sistemul.

Să considerăm sistemul de așteptare la momentul inițial $t = 0$. Vom avea o primă sosire a unei unități la momentul $\Delta t > 0$. Probabilitatea $A(\Delta t)$ ca să avem o sosire la momentul Δt este

$$A(\Delta t) = \lambda \int_0^{\Delta t} e^{-\lambda x}\, dx = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \tag{1}$$

Dezvoltînd pe $e^{-\lambda \Delta t}$ în serie avem

$$A(\Delta t) = \lambda \Delta t + \Delta t\, h\,(\Delta t), \tag{2}$$

unde

$$\lim_{\Delta t \to 0} h\,(\Delta t) = 0.$$

Din (2) rezultă că sosirea unei unități în sistem o putem considera proporțională cu λ.

Probabilitatea ca în intervalul $(t, t + \Delta t)$ să aibă loc o sosire este

$$A(t, t + \Delta t) = \lambda \int_t^{t+\Delta t} e^{-\lambda x}\, dx = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda \Delta t})$$

sau, ținînd seama de (1), rezultă

$$A(t, t + \Delta t) = e^{-\lambda t} \cdot A(\Delta t) = [1 - A(\Delta t)]\, A(\Delta t).$$

În mod analog, probabilitatea $B(\Delta t)$ ca o unitate să părăsească sistemul este dată de

$$B(\Delta t) = \mu \Delta t + \Delta t g(\Delta t),$$

unde

$$\lim_{\Delta t \to 0} g\,(\Delta t) = 0.$$

Să considerăm acum evenimentul $E_n(t)$ ca la momentul t să avem în sistemul de așteptare n unități cu probabilitatea corespunzătoare $p_n(t)$.

Evenimentul $E_n = (t + \Delta t)$ ca la momentul $t + \Delta t$, să avem n unități în sistem, cu probabilitatea $p_n(t + \Delta t)$ se realizează avînd în vedere următoarele posibilități:

a) La momentul t să avem în sistem n unități cu probabilitate $p_n(t)$, dar
— în intervalul Δt nu se produce nici o sosire, cu probabilitatea $1 - A(\Delta t)$;
— în intervalul Δt nu se produce nici o plecare, cu probabilitatea $1 - B(\Delta t)$.

Deoarece aceste evenimente sînt independente, rezultă că în acest caz, avem

$$p_n(r + \Delta t) = p_n(t)\,[1 - A(\Delta t)]\,[1 - B(\Delta t)].$$

b) La momentul t să avem $n + 1$ unități în sistem, cu probabilitatea $p_{n+1}(t)$, dar
— în intervalul Δt nu se produce nici o sosire, cu probabilitatea $1 - A(\Delta t)$;
— în intervalul Δt se produce o singură plecare, cu probabilitatea $B(\Delta t)$.

Deci, în acest caz, avem

$$p_n(t + \Delta t) = p_{n+1}(t)\ B(t)\,[1 - A\ (\Delta t)].$$

c) La momentul t să avem $n - 1$ unități în sistem, cu probabilitatea $p_{n-1}(t)$, dar
— în intervalul Δt se produce o singură sosire, cu probabilitatea $A(\Delta t)$;
—în intervalul Δt nu se produce nici o plecare, cu probabilitatea $1 - B(\Delta t)$.

Deci, probabilitatea acestei stări va fi

$$p_n(t + \Delta t) = p_{n-1}(t)\ A(\Delta t)\,[1 - B(\Delta t)];$$

d) La momentul t să avem în sistem n unități cu probabilitatea $p_n(t)$, dar
— în intervalul Δt să se producă o sosire, cu probabilitatea $A(\Delta t)$;
— în intervalul Δt să se producă o plecare, cu probabilitatea $B(\Delta t)$.

Rezultă că, în acest ultim caz, avem

$$p_n(t + \Delta t) = p_n(t)\ A(\Delta t)\ B(\Delta t) = 0\ \ (\Delta t).$$

Rezumînd cele de mai sus, putem scrie, ținînd seama că evenimentele descrise sînt incompatibile,

$$p_n(t + \Delta t) = p_{n-1}\ (t)\ A(\Delta t)\,[1 - B(\Delta t)] + p_n(t)\,[1 - \\ - A(\Delta t)]\ [1 - B(\Delta t)] + p_{n+1}(t)\ B(\Delta t)\ [1 - A(\Delta t)] + 0(\Delta t).$$

Neglijînd termenii care conțin pe Δt la diverse puteri, egalitatea precedentă se mai poate scrie sub forma

$$p_n(t + \Delta t) = p_{n-1}(t)\ A(\Delta t) + p_n(t)\ [1 - A(\Delta t)]\ [1 - B(\Delta t)] + \\ + p_{n+1}(t)\ B\ (\Delta t). \qquad (3)$$

Pentru $n = 0$, probabilitatea $p_0(t + \Delta t)$ ca să avem zero unități de sisteme la momentul $t + \Delta t$ este dată de suma următoarelor două probabilități:

$p_0(t)\,[1 - A(\Delta t)]$, care reprezintă probabilitatea ca la momentul t să nu avem nici o unitate în sistem și nici o sosire în intervalul Δt;

$p_1(t)\ B(\Delta t)\,[1 - A(\Delta t)]$, care reprezintă probabilitatea ca la momentul t să avem o unitate în sistem, o plecare și nici o sosire.

Rezultă deci, că pentru $n = 0$, avem

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t)\,[1 - A(\Delta t)] + p_1(t)\ B(\Delta t)[1 - A\ (\Delta t)]. \qquad (4)$$

În egalitățile (3) și (4), trecînd pe $p_n(t)$, respectiv pe $p_0(t)$ în membrul întîi, împărțind cu Δt și trecînd la limită pentru $\Delta t \to 0$, obținem

$$\begin{cases} \dfrac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + \mu)\,p_n(t) + \mu p_{n+1}(t) & \text{pentru } n > 0 \\ \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) & \text{pentru } n = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Acest sistem de ecuații diferențiale poartă numele de ecuațiile de stare ale modelului sau ecuațiile de naștere și de moarte.

Mărimea

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

poartă numele de factor de serviciu (sau intensitate de trafic) și indică numărul mediu de unități care sosesc în perioada unui singur timp de serviciu.

Acest factor are o mare importanță în teoria așteptării deoarece majoritatea caracteristicilor modelului de așteptare se exprimă în funcție de acest parametru.

Soluția sistemului (5) ne va permite să calculăm caracteristicile modelului de așteptare.

Cazul cel mai simplu este acela al regimului permanent (sau staționar) cînd probabilitățile $p_n(t)$ sînt independente de timp.

Studiul modelului în cazul regimului permanent. În acest caz sistemul de ecuații diferențiale (5) devine un sistem algebric

$$\begin{cases} \lambda p_{n-1} - (\lambda + \mu)p_n + \mu p_{n+1} = 0 & (n > 0) \\ -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 & (n = 0), \end{cases} \tag{6}$$

unde am notat $p_n(t) = p_n$.
Din ecuația a doua a sistemului (6), obținem

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0.$$

Dacă facem pe $n = 1$ în prima ecuație a sistemului și înlocuim pe p_1, avem

$$p_2 = \rho^2 p_0.$$

Din aproape în aproape găsim

$$p_n = \rho^n p_0 \tag{7}$$

expresie care constituie o soluție a sistemului (6).

Rezultă că dacă intensitatea traficului ρ este dată, probabilitățile p_n depind de p_0.

Să observăm că dacă $\rho \geqslant 1$, avem o aglomerare nelimitată, dacă $\rho < 1$, capacitatea sistemului este corespunzătoare, iar dacă $\rho \ll 1$, practic nu avem șir de așteptare.

Să admitem deci că sîntem în cazul $\rho < 1$, cînd

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho}.$$

Deoarece

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1,$$

însumînd egalitatea (7), obținem

$$p_0 = 1 - \rho.$$

Atunci soluția sistemului se scrie sub forma

$$p_n = (1 - \rho)\rho^n,$$

care ne permite să determinăm maximul lui p_n.
Acesta se realizează pentru $\rho = \frac{n}{n+1}$ și deci

$$\max p_n(\rho) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}.$$

Să determinăm acum principalele caracteristici ale modelului. Numărul mediu $\bar{n}$ de unități care se află în sistemul de așteptare este

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = (1-\rho)\frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Numărul mediu de unități în șirul de așteptare $\bar{\nu}$ este dat de

$$\bar{\nu} = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)p_n = p_0 \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\rho^n = (1-\rho)\frac{\rho^2}{1-\rho^2} = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Să calculăm acum probabilitatea ca numărul unităților din sistem să nu depășească un număr dat, fie acesta k.

Avem, prin definiție,

$$P(n \leqslant k) = \sum_{i=0}^{k} p_i = p_0 \sum_{i=0}^{k} \rho^i = (1-\rho)\frac{1-\rho^{k+1}}{1-\rho} = 1 - \rho^{k+1}.$$

Probabilitatea complementară

$$P(n > k) = \rho^{k+1}$$

ne duce la concluzia că probabilitatea ca să avem cel puțin o unitate în sistem este

$$P(n > 0) = \rho.$$

În anumite probleme interesează timpul mediu de așteptare în șir, pe care îl vom nota $\bar{t}_f$.

Acesta va fi

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{\nu}}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{\bar{n}}{\mu}.$$

Analog, timpul mediu de așteptare în sistem, $\bar{t}_s$, va fi

$$\bar{t}_s = \frac{\bar{n}}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}.$$

Din cele de mai sus rezultă imediat următoarea relație, utilă în aplicații

$$\frac{\bar{n}}{\mu} = \frac{\bar{\nu}}{\lambda}.$$

În sfîrșit, ne propunem acum să determinăm probabilitatea ca o unitate să aștepte în șir un timp mai mare decît un timp dat. Să considerăm un moment t_0 și o unitate „reperată" la acest moment.

Urmărim să calculăm probabilitatea elementară $f(\tau)\,d\tau$ ca această unitate să aștepte un timp cuprins între τ și $\tau + d\tau$.

Dacă la momentul t_0, cînd unitatea considerată intră în sistem, înaintea ei erau alte n unități, atunci probabilitatea elementară căutată va fi dată de suma probabilităților $p(n, \tau)\,d\tau$ care reprezintă probabilitatea elementară ca la momentul t_0 în sistem să avem n unități, iar unitatea „reperată" să aștepte un timp cuprins între τ și $\tau + d\tau$.

Să observăm însă că dacă timpul de serviciu urmează o lege exponențială negativă de parametru μ, așa cum am admis la definirea modelului, atunci momentele terminării serviciului urmează o lege Poisson, atît timp cît stația este ocupată.

Deci probabilitatea ca o stație ocupată să devină disponibilă în intervalul Δt este $\mu\Delta t$. Astfel repartiția numărului de plecări este dată de

$$p(s) = \frac{(\mu t)^s}{s!} e^{-\mu t} \qquad (s = 0, 1, \ldots).$$

Vom presupune $n > 0$, deoarece pentru $n = 0$ avem $p(0, \tau) = 0$.

Să revenim acum la calculul probabilității elementare $p(n, \tau)d\tau$.

Această probabilitate este dată de produsul următoarelor trei probabilități:

— probabilitatea ca în sistem să avem n unități la începutul intervalului de timp τ, care în regim permanent am văzut că are expresia

$$\rho^n(1-\rho);$$

— probabilitatea condiționată ca sistemul să conțină n unități la momentul t_0 și să existe $s = n - 1$ unități care urmează a fi servite și care părăsesc sistemul în intervalul τ. Această probabilitate, după cum rezultă din observația făcută, este dată de

$$\frac{(\mu\tau)^{n-1} e^{-\mu\tau}}{(n-1)!};$$

— probabilitatea condiționată ca, cele două condiții de mai sus fiind realizate în intervalul $d\tau$ o singură unitate să plece din sistem, este dată de $\mu\, d\tau$.

Putem deci scrie

$$p(n, \tau)\, d\tau = \rho^n(1-\rho) \frac{(\mu\tau)^{n-1} e^{-\mu\tau}}{(n-1)!} \mu\, d\tau.$$

Însumînd, obținem

$$f(\tau)d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} p(n, \tau)\, d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n(1-\rho) \frac{(\mu\tau)^{n-1} e^{-\mu\tau}}{(n-1)!} \mu\, d\tau =$$

$$= (1-\rho)\,\rho\, e^{-\mu\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{n-1}(\mu\tau)^{n-1}}{(n-1)!} d\tau$$

sau

$$f(\tau)\, d\tau = (1-\rho)\,\rho\, e^{-\mu\tau} d\tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\rho\mu\tau)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Deoarece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\rho\mu\tau)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{\rho\mu\tau}$$

rezultă că

$$f(\tau)\, d\tau = (1-\rho)\, \rho\mu\, e^{-\mu\tau(1-\rho)}\, d\tau.$$

Probabilitatea ca o unitate care sosește în sistem să aștepte un timp mai mare decît τ va fi

$$p(>\tau) = \int_{\tau}^{\infty} f(t)\, dt = (1-\rho)\, \rho\mu \int_{\tau}^{\infty} e^{-\mu t(1-\rho)}\, dt = \rho\, e^{-\mu\tau(1-\rho)}.$$

Deducem că probabilitatea ca o unitate să aștepte este

$$p(>0) = \rho,$$

iar probabilitatea ca să nu aștepte

$$1 - p(>0) = 1 - \rho$$

sau

$$p(n=0) = p_0 = 1 - \rho,$$

rezultat pe care l-am obținut și pe altă cale.

Aplicație. Să studiem fenomenul de aglomerare într-o clinică. Să presupunem că într-o zi (24 ore), în medie sosesc 96 pacienți care solicită consultarea.

Să presupunem, de asemenea, că în medie un pacient este consultat în 10 minute și că organizarea clinicii permite tratarea unui singur bolnav în fiecare unitate de timp.

Să presupunem că din cercetări prealabile se știe că sosirile și duratele de consultație urmează o lege exponențială de parametri λ și respectiv μ.

Să determinăm principalele caracteristici ale modelului.

Avem, aplicînd formulele deduse,

$$\lambda = \frac{96}{24} = 4 \text{ pacienți pe oră}; \quad \mu = \frac{1}{10}\, 60 = 6 \text{ pacienți pe oră}.$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}\ ; \quad \bar{n} = \frac{\rho}{1-\rho} = 2; \quad \bar{\nu} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{4}{3}.$$

$$p_0 = 1 - \rho = \frac{1}{3}\ ; \quad \bar{t}_f = \frac{\bar{\nu}}{\lambda} = 20 \text{ minute}; \quad \bar{t}_s = \frac{\bar{n}}{\lambda} = 30 \text{ minute}.$$

Probabilitatea ca numărul pacienților să nu depășească un număr dat, spre exemplu 5, este

$$P(n \leqslant 5) = 1 - \rho^6 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 0{,}209.$$

Probabilitatea ca un pacient să aștepte un timp mai mare decît un timp dat, spre exemplu 45 minute, este

$$p\left(>\frac{3}{4}\right) = \rho\, e^{-\frac{3}{4}\mu(1-\rho)} = \frac{2}{3}\, e^{-\frac{3}{2}} = 0{,}15.$$

Probabilitatea ca un pacient să aștepte este

$$p(>0) = \rho = \frac{2}{3},$$

iar probabilitatea ca un pacient să nu aștepte este $1 - \rho = \frac{1}{3}$.

Studiul modelului în cazul nestaționar. În cazul regimului nestaționar, probabilitățile $p_n(t)$ depind efectiv de timp și va trebui să determinăm soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale (5).

Pentru aceasta, să notăm cu $p_{ij}(t)$ probabilitatea condiționată ca la momentul t, să avem j unități în sistem, dacă la momentul $t = 0$, am avut i unități. Atunci sistemul (5) devine

$$\begin{cases} \dfrac{dp_{i0}(t)}{dt} = -\lambda p_{i0}(t) + \mu p_{i1}(t) & (j=0) \\ \dfrac{dp_{ij}(t)}{dt} = \lambda p_{i,j-1}(t) - (\lambda+\mu)\, p_{ij}(t) + \mu p_{i,j+1}(t) & (j>0) \end{cases} \tag{8}$$

cu condițiile inițiale

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij}. \tag{9}$$

Vom aduce mai întîi sistemul (8) la o formă mai simplă, făcînd substituția

$$p_{ij}(t) = \rho^{\frac{j}{2}}\, e^{-(\lambda+\mu)t}\, f_{ij}(u), \tag{10}$$

unde am notat

$$u = 2t\sqrt{\lambda\mu}.$$

Efectuînd calculele, sistemul (8) devine

$$\begin{cases} 2f'_{i0}(u) = \alpha f_{i0}(u) + f_{i1}(u) & (j = 0) \\ 2f'_{ij}(u) = f_{i,j-1}(u) + f_{i,j+1}(u) & (j > 0), \end{cases} \tag{11}$$

unde am notat

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\rho}}.$$

Determinarea soluției sistemului (11) o vom face utilizînd funcțiile Bessel de speța I. Pentru orice $j \geqslant 0$, să punem

$$f_{ij}(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{a}_n I_{n+j}(u), \tag{12}$$

unde $\mathbf{a}_n$ sînt constante iar $I_n(u)$ funcțiile Bessel.

Condițiile inițiale (9) se scriu acum

$$f_{ij}(0) = \alpha^j \delta_{ij}. \tag{13}$$

Deoarece $I_n(0) = \delta_{n0}$, rezultă din (12) și (13) că

$$\mathbf{a}_j = 0 \qquad (j \neq i; \quad j > i; \quad \mathbf{a}_{-i} = \alpha^i). \tag{14}$$

Pentru determinarea celorlalte constante $\mathbf{a}_n$ vom introduce (12) în prima ecuație a sistemului (11) și ținem seama de relația cunoscută

$$2I'_n(u) = I_{n-1}(u) + I_{n+1}(u). \tag{15}$$

Efectuînd calculele, obținem

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{a}_n I_{n-1}(u) = \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{a}_n I_n(\bar{u}).$$

Deoarece

$$I_{-n} = I_n,$$

rezultă că coeficienții a_n verifică relația

$$\mathbf{a}_{n+1} = \alpha(\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{\bar{n}}) - \mathbf{a}_{n+1},$$

care prin iterație ne conduce la

$$\mathbf{a}_{n+1} = \alpha\mathbf{a}_{-n} + (\alpha^2 - 1)(\mathbf{a}_{-n+1} + \alpha\mathbf{a}_{-n+2} + \ldots + \alpha^{n-1}\mathbf{a}_0) \tag{16}$$
$$(n = 1, 2, \ldots)$$

Din (16) și (14), obținem

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_1 = \ldots = \mathbf{a}_i = 0,$$
$$\mathbf{a}_{i+1} = \alpha\mathbf{a}_{-i} = \alpha^{i+1},$$
$$\mathbf{a}_{i+k} = (\alpha^2 - 1)\,\alpha^{i+k-2},$$
$$(k = 2, 3, \ldots).$$

Atunci soluția generală a sistemului (8) se scrie ținînd seama de (10):

$$p_{ij}(t) = \rho^{\frac{j}{2}} e^{-(\lambda+\mu)t}\Big[\alpha^{i+1} I_{i+j+1}(u) + \alpha^i I_{j-i}(u) + \\ + (\alpha^2 - 1)\alpha^{i-2} \sum_{k=2}^{\infty} \alpha^k I_{i+j+k}(u)\Big]. \tag{17}$$

B. *Model cu șir de așteptare limitat.* Un caz deseori întîlnit în aplicații este acela în care capacitatea sistemului este limitată. Fie N numărul de unități pe care sistemul îl poate cuprinde. Modelul fiind cu o singură stație, înseamnă că șirul de așteptare este constituit din cel mult $N - 1$ unități.

Unitățile care sosesc și găsesc în sistem N unități, vor părăsi sistemul, neavînd loc în șirul de așteptare.

În cazul regimului permanent, am văzut că ecuațiile de stare ale modelului sînt

$$\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \qquad (n = 0)$$
$$\lambda p_{n-1} - (\lambda + \mu)\, p_n + \mu p_{n+1} = 0 \qquad (n = 0, 1 \ldots, N - 1).$$

Pentru $n = N$, avem

$$\lambda p_{N-1} - (\lambda + \mu)\, p_N = 0.$$

Caracteristicile modelului se calculează ușor.

Deoarece

$$1 = \sum_{n=0}^{N} p_n = p_0(1 + \rho + \ldots + \rho^N),$$

rezultă

$$p_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}},$$

iar

$$p_n = p_0 \rho^n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho^n.$$

Numărul mediu de unități în sistem va fi

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{N} n p_n = \sum_{n=0}^{N} n\rho^n \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} = \frac{\rho(1-\rho)}{1-\rho^{N+1}} \sum_{n=0}^{N} n\rho^{n-1} =$$

$$= \frac{\rho[1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}]}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}.$$

Numărul mediu de unități în șirul de așteptare este

$$\bar{\nu} = \sum_{n=2}^{N} (n-1) p_n = \sum_{n=2}^{N} (n-1) \rho^n \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} =$$

$$= \frac{\rho(1-\rho)}{1-\rho^{N+1}} \sum_{n=2}^{N} (n-1)\rho^{n-1} = \frac{\rho^2[1-N\rho^{N-1}+(N-1)\rho^N]}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}.$$

Calculul celorlalte caracteristici se poate face acum fără nici o dificultate. Cititorul interesat în aprofundarea cunoștințelor de teoria așteptării poate consulta lucrările de specialitate indicate în bibliografie.

BIBLIOGRAFIE

1. V.E. BENES, *On queues with Poisson arrivals*, Ann. Math. Statist., 28 670–77 (1957).
2. W. COX, L. SMITH, *Queues*, Methuen & Co, London, 1961.
3. W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 1, Wiley, New York, 1957.
4. M. GIRAULT, *Une méthode simple d'étude des processus de files d'attente à service exponentiels*, 35 sesion de L'Institut International de Statistique, 1965.

5. A.Y. HINCIN, *Mathematical theory of a Stationary queue*, Mat. Sb., 39, 4, 73–84 (1932).
6. D.G. KENDALL, *Some problems in the theory of queues*, J. Roy. Statist. Soc. B, B 13, 151–173 (1951).
7. D.V. LINDLEY, *The theory of queues with a single server*, Proc. Cambridge Philos. Sos., 48, 1952.
8. GH. MIHOC, G. CIUCU, *Introducere în teoria așteptării*, Editura tehnică, București, 1967.
9. P.M. MORSE, *Queues, Inventories and Maintenance*, Wiley, New York, 1958.
10. L. TAKÀCS, *Introduction to the theory of queues*, Oxford University Press, 1–268 (1962).

INDEX

A doua teoremă generală asupra extensiunii în fază 344
Abaterea medie pătratică 26, 183
Aditivitatea totală a măsurii 157
Argumentul funcției caracteristice 174
Avogadro, numărul ~ 414

Bayes, teorema ~ 22
Bernoulli, teorema ~ 22, 37, 231, 232
Bernstein, ecuațiile cu diferențe ~ 419
Birkhof, teorema ergodică ~ 327, 356
Bochner, teorema ~ 173, 176
Boltzmann, constanta ~ 339
—, funcția H a lui ~ 336
—, teorema ~ asupra densității de repartiție după viteză a moleculelor unui gaz 331
—, teorema H a lui ~ 371
Boole, inegalitatea ~
Borel, funcția măsurabilă 158

Cantelli, teorema ~ 39, 231
Cauchy, funcția caracteristică 192
Carleman, inegalitatea 452
Cebîșev, inegalitatea generalizată ~ 26, 232
—, teorema ~ 227
Chandrasekar, mișcările browniene ~ 421
Chapman—Kolmogorov, ecuația ~ 293
Chapman, relația ~ 58, 315
Charlier, dezvoltări de tip ~ 209
{ Clasă finală
{ Clasă de trecere 79, 81
Cîmp atomistic de evenimente 14
— de evenimente 156
— — probabilitate 156
— — — canonic 327
— — — continuu 432
— — — elementar 13, 14
Cîmp finit de evenimente 14
— — — probabilitate 16
Cîmpuri microcanonice 327
Coeficient de conexiune 387, 409
— — corelație 201
Coeficientul de corelație a variabilelor 51
— — — internă 402
— — difuzie 414
— — precizie al repartiției 179
Completitudinea spațiului 377
Componentele unui sistem dinamic 340
— vectorului aleator 174
Conexiune 387, 389
Continuitate 386
Continuitatea funcțiilor aleatorii complexe 388
— în probabilitate 386
— m. p. (în medie pătrată) 386

Convergența aproape sigură (C_{as}) 222, 223
— B (în sensul lui Bernoulli) 215
— în medie 217
— — probabilitatea (C_p) 216, 225
— tare (C_t) 216, 225
Corelația între doi vectori 53
— — două variabile aleatoare 160, 201,
Corelație 50, 160
Corelații interne 55
Covarianța a două variabile 201
Cramer, teorema ~ 404
—, — (referitoare la variabilele gaussiene) 240
Crofton, ecuația ~ 441, 443
—, formula (referitoare la un sistem echivalent de puncte) 443
Curbe de regresiune 197, 198
— — — parabolică 201

Densitate de probabilitate 330
— — repartiție 192
— — — a unui proces Markov omogen 306
— — — gaussiană 330, 202
— — — marginală 192
Derivabilitate stochastică 386
Derivata m. p. (în medie pătratică) a unei funcții aleatoare 392
Desfaceri 29
Discontinuitatea funcției de repartiție 167
Dispersia energiei 347
— variabilei aleatoare 160, 27
Dispersie 389, 400
Distribuentă 351
Distribuția abaterilor urnei elementare 182
— binomială (urna lui Bernoulli) 183
— canonică 346
— exponențială 181
— gaussiană 178, 202
— limită 184, 286
— medie clasică (statică) 368
— — dinamică 369
— microcanonică 351
— redusă a urnei elementare 183
— — limită a urnei lui Bernoulli 184
— stabilă 333
— urnei elementare 182
Domeniul de stabilitate al unui șir 226

Echipartiția energiei 335, 352
Echivalența asimptotică a două șiruri 226
Ecuația energiei 334
— funcțională a probabilității totale 132
Einstein, ecuația difuziei ~ 418
—, formula ~ (referitoare la mișcarea browniană) 414
—, relația ~ 416
—, repartiția 339
— — Smoluhovschi, schema ~ (referitoare la mișcarea browniană) 421
Ergodicitatea globală a unui lanț 317, 321
Ergodicitatea unui sistem aleator cu legături complete 474
Euler, funcția de speța a II-a 457
Eveniment imposibil 14, 156
— total (sigur) 14, 156
Evenimente compatibile 14
— contrarii 14
— elementare ale unui cîmp 14
— incompatibile 14
— rare dependente 276
— — independente 20, 267
Extensiune în fază 344

Familie de funcții 385
— — lanțuri 71
Feller proces de tip ~ 294, 295
—, — de tip finit ~ 322
—, procese total discontinue de tip ~ 299
—, teorema ~ 247
Fermi, repartiția ~ 339
Fisher, repartiția ~ 214
Fokker—Planck ecuația ~ 424
Fokker—Planck—Kolmogorov, ecuația ~ 426
Forma canonică a repartițiilor limită 234
Fréchet M., teorema ~ 67
Frecvență redusă a unui eveniment oarecare dintr-un lanț Markov 262

Funcția caracteristică a repartiției lui Poisson 269
— — — unei variabile indefinit divizibile 238
— — — unui vector 54
Funcția caracteristică a unui vector aleator 169, 174
— — — variabilei aleatoare 170
— — — vitezei medii normate 373
— de repartiție 167
— — — conjugată 169
— — — repartiție a unui vector 169
— vectorială generatoare a procesului omogen 295
Funcție aleatoare 385, 386, 418
— — continuă 390, 391
— — cu creșteri independente 404
— — omogenă 404
— caracteristică 170
— de stare (de undă) 376
— măsurabilă 158, 188, 385
— monotonă nedescrescătoare cu variație mărginită 402
— spectrală 403
Funcții de structură 353
— proprii 379
Funcțiile caracteristice ale frecvenței unui eveniment 256

Gauss, funcția de repartiție ~ 254
—, legea ~ 246, 262, 370
— — (referitoare la repartițiile limită)
Gibbs W., spațiul fazelor ~ 327
Gnedenko, evaluările asimptotice ~ 216
—, repartițiile ~ 262
—, teorema ~ (referitoare la variabilele de tip Poisson) 240
Graf 76
Graf redus 77

Helly, teorema ~ 168
Hermite, polinoamele ~ 210
Hincin, funcția de repartiție ~ 275
— — — structură ~ 351
Hincin, teorema ~ 401
—, — (referitoare la condițiile de stabilitate) 230
Hölder-Jensen, inegalitatea ~ 28

Ionescu C. Tulcea și Marinescu Gh. teorema ~ 138
Inegalitate izoperimetrică 452
Indecompozabilitate metrică 355
Independența desfacerilor 29
— evenimentelor 20, 267
— variabilelor aleatoare 160
Integrala în probabilitate 394
— m. p. (în medie patratică) 394
— stochastică 394
Invarianții geometrici ai curgerii 340
— mișcării unui sistem dinamic 339
Iosifescu M. 471
Iteratele operatorului T 258

Jacobi, ecuația ~ (asupra analogiei hidrodinamice) 345

Kolmogorov, ecuațiile diferențiale ~ 289
—, mecanica aleatorie 423
—, procesele ~ 300
Koopman, funcțiile caracteristice (pentru cazul unui lanț cu două evenimente) 285
Kronecker, simbolul ~ 311

Langevin, ecuația diferențială stochastică ~ (relativă la mișcarea browniană) 415
Lanț continuu cu legături complete la stînga 316
— la stînga 241
— — de evenimente 56
— variabile aleatoare 56
— dublu 416
— ergodic 66, 81, 131
— invers unui lanț dat 70
— la dreapta (drept) 316
— liniar (asociat) 316
— Markov 55, 57 59
— — constant 68, 256
Lanț Markov continuu
— — cu evenimente rare 284

Lanț Markov discontinu 421, 426
— — multiplu 56, 112
— — omogen (permanent) 59
— — periodic 68
— — simplu 56
— — — constant 68
— omogen 59
— stabil invariant 68
— — periodic 68
— variabil 130
Lanțuri cu legături complete 123, 126, 127
— — — — de ordinul al doilea 128
Laplace-Cauchy, distribuție 191
Laplace-Gauss, legea ~ 242
Lebesgue, integrală ~ 159
— măsură ~ a unor mulțimi 327, 332
Legea arcsinusului 480
Legea de repartiție a energiei într-un gaz ideal 329
— limită a frecvenței variabilei 246
— numerelor mari (teorema lui Bernoulli) 231
— tare a numerelor mari 231
Liapunov, teorema de convergență 245
Liouville, teorema ~ 327
—, — (asupra extensiei de fază) 344
Lindeberg, teorema de convergență ~ 247
Lipschitz, condiții de tip ~ 311
Loeve, teorema ~ 404

Matrice fundamentală 59, 85, 86
Matrice indecompozabilă 61
Matrice de trecere a unui lanț Markov finit 59, 117
Maxwell, legea ~ 372
—, teorema ~ 329
Maxwell-Boltzman, teorema ~ 329
Mărime asociată unui proces Markov omogen 305
Mărimi asociate cîmpului de evenimente 381
Măsura condiționată a evenimentelor unui cîmp 19
— probabilitatea evenimentelor unui cîmp 15, 16
Măsurabilitatea funcției aleatoare 158
Media repartiției marginale 195
Medie condiționată 197
— spațială 360
— temporală 360
Mersul la întîmplare 146, 413
Metoda funcțiilor arbitrare
Mihoc, funcțiile caracteristice ~ 284
—, teorema ~ 115,
Mișcarea browniană 303, 413
Moivre-Laplace, teorema de convergență ~ 245
Momentul absolut al variabilei aleatoare 24
— repartiției normale 180
— unui vector 53
Multiplicatori întregi 378
Mulțime boreliană 160
— măsurabilă Lebesgue 342
— uniform distribuită 366

Operatori diferențiali 378
— liniari autoadjuncți 377, 379

Pasul variabilei aleatoare 186
Pearson, distribuțiile ~ 212
Planck, constanta ~ 336
—, formula de repartiție ~ 339
—, legea de repartiție ~ 336
—, problema de repartiție ~ 336
Poincaré, teorema de recurență ~ 360
Poisson, distribuția ~ 185
—, legea ~ (referitoare la repartițiile limită) 275
—, rapartiția 267
—, variabila de tip 240
— — — — ~ generalizată 240
Polinoame ortogonale corespunzătoare unei repartiții 208
Pólya, schema ~ 130
Principii de teoria așteptării 489
Probabilitate cinematică 448

Probabilitate cinematică condiționată 362
— de trecere 58
— gaussiană 432
— —microcanonică 360, 362
Probabilitatea cîmpului de evenimente 157
— — finit de evenimente 15
Probabilitate condiționată 19
Probabilitate condiționată de o σ — algebră 162, 164
Probabilitățile elementare (de trecere) ale unui lanț 113
— fundamentale ale unui lanț 113
Proces empiric de repartiție 481
Problema ergodică pentru sistemele indecompozabile 64
Proces aleator 303
— — în lanț continuu cu legături complete 311
— — liniar 314
— — staționar 400
— continuu cu o dimensiune 295
— de difuzie 303
— discontinuu 426
Proces Markov 276, 468
— omogen 267, 294
— staționar 400
— stochastic 113
— — discontinuu 123
— — ramificat 105
— — — cu timp continuu 105, 288
— — — cu timp continuu 105 288
Procese cu o mulțime numărabilă de stări 288
Proces semi-Markov 484
Produsul intern al unei familii aleatoare 396
Proprietățile ergodice ale unui lanț 317, 322
Puncte de creștere 208

Rayleigh, exemplul ~ 55
—, mișcarea 67
Reacții în lanț 94
— — — concomitente 95
— — — cu absorbție 103
— — — succesive 95
Relația caracteristică a lanțului Markov simplu 57
— funcțională a lanțurilor cu legături complete 125
Repartiția energiei în spațiul fazelor 352
— — între oscilatori 337
— gaussiană (normală) 202, 178
— — cu două dimensiuni 192
— — — n dimensiuni 202, 206
— limită 184, 261, 286
— marginală relativă 192
— medie normală 369
— stabilă 333, 337
— vitezei medii normale 373
Repartiții condiționate 195
Repartiții indefinit dicizibile 237
— — — cu mai multe dimensiuni 241
Reprezentarea armonică 397
— spectrală a unei funcții aleatoare 396
Rényi, înfășurătoarea convexă a lui ~ 455
Reversibilitatea procesului în lanț 69
— unui lanț Markov multiplu 115

Schwartz, inegalitatea ~ 377
—, lema ~ 389, 401
—, teorema ~ 387
Sistem aleator cu legături complete 471
Sistem canonic 346, 354
— de evenimente 61
— — — final 62
— — trecere 62
— decompozabil 62
— dinamic 361, 363
— — ergodic 360
— ergodic 426
— final 62
— indecompozabil 61
— izolat (separat) 62
— Kolmogorov pentru lanțuri Markov continui 321
— lacunar 316
— reversibil 426
Slutsky, criteriul ~ 216
Smoluhovski, ecuația ~ (relativă la mișcarea browniană) 414

Smoluhovski-Hostinski, ecuația ~ 423
— —, — funcțională 305
Spațiu Banach 376
— Hilbert 54, 376, 377
Spațiul fază-timp 367
Spații Minkowski 458
Spectrul funcției aleatoare 403
— unui operator 379
Stabilitatea procesului în lanț 115
— — — — — multiplu 116
Stare absorbantă 80
Steinhaus, independențe ~ 330
Stieltjes, integrala ~ 168
Stirling, formula ~ 333
Stokes, teorema ~ 352
Student, repartiție ~ 215
Subcîmp de probabilitate 16
Suspensie 414

Șir propriu stabil 226
Șirul sumelor parțiale 243

Teorema acului 443
— de existență pentru lanțuri Markov 472
— de inversiune 177
— — stabilitate proprie a frecvenței 230
— ergodică clasică 360
— — redusă 356
— limită pentru sume de mărimi 254
— vectoriale (în mecanica statistică) 251
Teorema limită centrală 476
Teorema lui Bayes 22
Teoria bernoulliană a probabilităților 431
Timp continuu 328
— spectral 328

Uhlenbeck-Ornstein, procedeul de integrare ~ 417
— — schema (referitoare la mișcarea browniană) 421
Urna lui Bernoulli (distribuția binomială) 183

Valoarea medie, 23, 157, 195
Valoarea medie a energiei 347
— — — unui produs de variabile aleatoare independente 35, 161
— — — variabilei aleatoare 158
Valorile proprii ale unui operator 257
Variabila gaussiană 408, 247
Variabila gaussiană generalizată 254
— normală 408
Variabile aleatoare 22, 157
— — cu valori întregi 186
— — dependente 50
— — independente 31, 33, 160
— — mărginite 356
— — vectoriale 52, 187
— — — cu coordonate întregi 187
— indefinit divizibile 405
— vectoriale 251
Variantele a două variabile 201
Variația repartiției marginale 201
Varietate ergotică 360
— metric idecompozabilă 360
Vectori aleatori 53
— — independenți 53
— întregi independenți 264
Viteză medie normată 373

Wiener, integrala ~ pentru funcția continuă 420
Wiener-Doob, procesul cu creșteri independente 420

Coli de tipar: 32. Tiraj: 5600 ex. Bun de tipar: 4. XI. 1977

Tiparul executat sub comanda
nr. 1046 la
Întreprinderea Poligrafică
„13 Decembrie 1918"
str. Grigore Alexandrescu nr. 89—97
București,
Republica Socialistă România